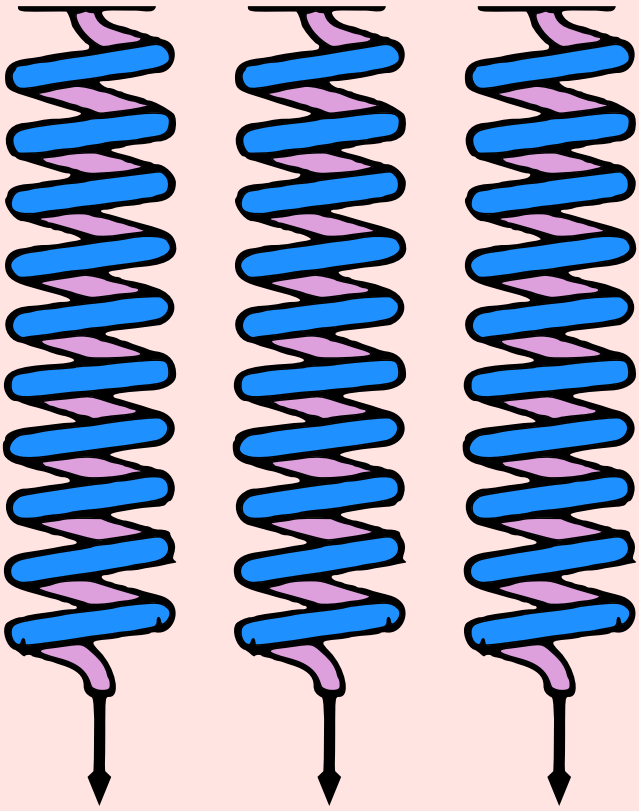
I. Mirolioubov, S. Engalytchev, N. Serguievski,
F. Almamétov, N. Kouritsyne, K. Smirnov-Vassiliev,
L. Iachina

PROBLÈMES DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX



Éditions Mir Moscou

И. Н. МИРОЛЮБОВ, С. А. ЕНГАЛЫЧЕВ, Н. Д. СЕРГИЕВСКИЙ,
Ф. З. АЛМАМЕТОВ, Н. А. КУРИЦЫН, К. Г. СМИРНОВ-ВАСИЛЬЕВ,
Л. В. ЯШИНА

ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА» МОСКВА

I. MIROLIOUBOV, S. ENGALYTCHEV, N. SERGUIEVSKI,
F. ALMAMÉTOV, N. KOURITSYNE, K. SMIRNOV-VASSILIEV,
L. IACHINA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

MANUEL DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

CDU 620.10=40

TRADUIT DU RUSSE
PAR
JEAN SISLIAN

На французском языке

Copyright by les Editions Mir
U.R.S.S. 1973

M $\frac{0314-363}{041(01)-73}$

AVANT-PROPOS

C'est dans la résolution des problèmes que les étudiants du cours de « Résistance des matériaux » rencontrent le plus de difficultés. Le présent manuel facilitera l'étude de ce cours et, ce qui est essentiel, les aidera à s'assimiler les méthodes de résolution des problèmes et à acquérir l'expérience nécessaire.

Les problèmes ont trait aux questions suivantes: traction, compression, cisaillement, caractéristiques géométriques des figures planes, torsion, flexion plane, sollicitations composées, flambement, méthodes énergétiques de calcul des corps élastiques, poutres à courbure initiale, tubes épais et effet dynamique des forces.

Le manuel contient les notions théoriques fondamentales, les instructions méthodologiques nécessaires, des exemples de résolution de problèmes types, des problèmes à résoudre seul et leurs réponses, ainsi qu'un formulaire général. Pour la commodité d'utilisation et pour une meilleure assimilation, le contenu du manuel est disposé de façon concentrique dans chaque partie brève et indépendante; les réponses aux problèmes et le formulaire général sont disposés en fin de livre. L'étudiant doit tout d'abord faire connaissance avec les notions théoriques, les instructions méthodologiques et les résolutions des problèmes types du chapitre correspondant. Cela lui permettra de se rappeler, de mieux comprendre et d'assimiler les notions théoriques indispensables, de comprendre la méthode de résolution de problèmes d'un type donné et d'acquérir des connaissances suffisantes pour résoudre les problèmes seul correctement.

Les données des problèmes à résoudre seul sont présentées sous forme de schémas avec les valeurs des grandeurs initiales nécessaires. Chaque schéma peut caractériser non seulement une construction quelconque, mais plusieurs, destinées parfois à différents buts. Pour la plupart des problèmes les conditions limitatives d'utilisation données de tel ou tel schéma ne s'appliquent pas à un seul cas particulier et les noms des mêmes quantités données ou à déterminer ne sont pas toujours répétés.

Pour chaque ensemble de problèmes se rapportant à un même thème et poursuivant un même but objectif, on donne une brève

indication du résultat à obtenir dans la résolution du problème. Un tel exposé tout en ne diminuant pas la clarté du contenu des problèmes doit obliger les étudiants à formuler seuls les données et, par conséquent, à mieux se représenter le sens des questions à résoudre et des grandeurs initialement données. De plus l'absence de texte d'énoncé permet d'augmenter considérablement le nombre de schémas de calcul et de considérer un nombre suffisant de questions tant pour autant augmenter le volume du manuel.

L'explication du sens physique, mécanique ou géométrique des grandeurs désignées par les différents symboles est donnée dans le tableau des notations conventionnelles et dans les parties de chaque paragraphe où sont exposées les notions théoriques et les instructions méthodologiques.

Les auteurs seront très reconnaissants pour toutes remarques critiques contribuant à l'amélioration du présent manuel.

PRINCIPALES NOTATIONS

A — réaction d'appui; amplitude d'oscillations forcées

a — longueur d'un tronçon de la barre; dimension de la section droite; accélération du centre de gravité d'une masse

B — réaction d'appui; largeur de la section droite; longueur de la planchette de liaison dans les colonnes composées

b — longueur d'un tronçon de la barre; largeur de la section

C — rigidité de la barre, du système

°C — degré Celsius

D, d — diamètre

E — module d'élasticité longitudinale

e — distance déterminant la position du centre de flexion; le déplacement de la ligne neutre du centre de gravité lors de la flexion d'une barre à courbure initiale

F, F_x — aire de la section droite d'une barre

F_{cis}, F_{mat} — aires de cisaillement, de matage

f, f_x — déplacement vertical d'une poutre

G — module d'élasticité transversale

g — accélération de la pesanteur

h — hauteur d'une section rectangulaire, hauteur de chute d'une charge

i_z, i_y, i_u, i_v — rayons de giration par rapport aux axes z, y, u, v

i — rayon de giration minimal d'une section droite

I_z, I_y, I_u, I_v — moments d'inertie axiaux de l'aire d'une figure par rapport aux axes z, y, u, v

I_p — moment d'inertie polaire de l'aire d'une figure

$I_{\substack{\max \\ \min}}$ — moments d'inertie principaux de l'aire d'une figure

I_t — caractéristique géométrique de rigidité de la section en torsion

I_m — moment d'inertie d'une masse par rapport à l'axe de rotation

$I_{z,y}$ — produit d'inertie de l'aire d'une figure par rapport aux axes z, y

k — coefficient de forme qui tient compte de l'effet de la configuration de la section droite sur la valeur de l'énergie potentielle due à l'effort tranchant; coefficient qui tient compte du degré de courbure d'une spire du ressort et de l'effet de l'effort tranchant

k_d — coefficient dynamique

k_m — coefficient de réduction d'une masse

l — longueur de la barre (ou une partie de sa longueur)

L — longueur libre de voilement

Δl — variation absolue de la longueur d'une barre

l_0 — longueur (libre) d'une branche de la colonne entre les planchettes

M — moment d'un couple concentré extérieur

M_t — moment de torsion

M, M_x — moment fléchissant

M_{max} — moment fléchissant maximal en valeur absolue

M_{fx} — moment fléchissant d'une poutre fictive

M_z, M_y — moments fléchissants par rapport aux axes principaux centraux d'inertie z et y de la section

$M_{éqI}$, $M_{éqII}$, $M_{éqIII}$, $M_{éqIV}$, $M_{éqV}$ — moments fléchissants équivalents (de calcul) selon les hypothèses de résistance

$\overline{M}$, $(\overline{M_t})$ — moment fléchissant (de torsion), dû à une force généralisée unitaire

$M_{réd}$ — moment fléchissant réduit dans les poutres de section variable

M_d — moment dynamique

m — moment sur l'unité de longueur de couples extérieurs uniformément répartis suivant la longueur; masse de la charge, d'une barre

$m_{réd}$ — masse réduite

N, N_x — effort longitudinal; puissance en chevaux vapeur, en watts, kilowatts; fréquence d'oscillations $\left(\frac{1}{s}\right)$; nombre de cycles

$\overline{N}$ — effort dû à une force généralisée unitaire

N_d — effort longitudinal dynamique

n — nombre de tours par minute; coefficient de sécurité

$n_{éc}$, n_R — coefficient de sécurité par rapport à la limite d'écoulement et à la limite de résistance

$[n]$ — coefficient de sécurité admissible

n_y — coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité

P — force concentrée

P_{cr} — force critique

P_i — force généralisée

P_f — force généralisée fictive

P_d — force dynamique

P_e — force excitante

P_0 — amplitude de la force excitante

p — intensité d'une charge répartie sur l'aire; pression; contrainte (totale) résultante

p_0 — contrainte résultante octaédrique; pression de serrage entre des tubes cylindriques composés

p_{max}, p_{min}, p_{moy} — contraintes maximale, minimale et moyenne d'un cycle

P_a — amplitude d'un cycle

p'_{max}, p'_{moy}, p'_a — contraintes maximale, moyenne et amplitude d'un cycle à la limite d'endurance du matériau

p_r — limite d'endurance

p_{-1} — limite d'endurance pour un cycle symétrique

$[p_r]$ — contrainte admissible pour un cycle avec un coefficient d'asymétrie r

$[p_{-1}[$ — contrainte admissible pour un cycle symétrique

Q, Q_x — poids de la barre; de la charge; effort tangentiel; effort tranchant dans la section

Q_{f_x} — effort tranchant dans la poutre fictive

Q_y, Q_z — efforts tranchants suivant les axes y, z

$\overline{Q}$ — effort tranchant dû à une force généralisée unitaire

Q_0 — poids du corps soumis au choc

q, q_x — coefficient de charge linéique

q — coefficient de sensibilité du matériau aux concentrations de contraintes

r — rayon; rayon de courbure de la couche neutre d'une barre à courbure initiale; coefficient d'asymétrie du cycle

S_z, S_y, (S) — moments statiques de l'aire d'une figure par rapport aux axes z, y (neutre)

s — dimension suivant l'arc, longueur d'une courbe

ds — élément de longueur de l'axe géométrique du tronçon

T — période d'oscillation; énergie cinétique

$t°$ — température du système, de la barre en degrés Celsius

t — temps

U — énergie potentielle de déformations élastiques

u, u_f, u_V — énergie potentielle spécifique de déformation élastique; ses composantes correspondant au changement de forme et au changement de volume

V, v — volume initial; notation d'axe

ΔV, $\frac{\Delta V}{V}$ — variation absolue, relative du volume

W_p — module de résistance polaire des sections circulaire et annulaire

W_t — module de résistance de la section en torsion

W (W_1, W_2) — module de résistance de la section droite d'une poutre par rapport à l'axe neutre (modules de résistance axiaux pour les fibres tendue et comprimée)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ — inconnues surabondantes

x, y, z — axes ; coordonnées

α — angle ; coefficient de dilatation linéique du matériau ; coefficient de répartition des contraintes lors de la flexion d'une barre à courbure initiale ; coefficient de concentration de contraintes

α_{eff} — coefficient effectif de concentration

β — angle ; coefficient d'accroissement d'oscillation

γ — poids spécifique du matériau ; glissement relatif (déformation angulaire)

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — déformations angulaires principales

γ_o — glissement octaédrique

Δ — grandeur linéique du défaut de fabrication d'un élément élastique du système ; différence de diamètres des tubes cylindriques en frettage

δ — déplacement élastique généralisé ; déplacement statique

$\delta_z, \delta_y, \delta_v, \delta_h$ — projections du déplacement sur les axes z, y sur la verticale et l'horizontale

$[\delta]$ — déplacement admissible d'un point

$\delta_{ip}, \delta_{ii}, \delta_{ik}$ — déplacements généralisés ; coefficients dans les équations de la méthode des forces

δ_d — déplacement dynamique

δ_0 — déplacement généralisé du point de suspension lors de l'action statique de la force excitante

ε — dilatation linéique (allongement relatif)

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — dilatations principales

ε' — déformation relative transversale

ε_E — coefficient d'échelle

ε_s — coefficient de sensibilité de surface

θ, θ_x — rotation de la section d'une poutre

θ_d — rotation dynamique

K — module d'élasticité volumique du matériau

$\varkappa$ — coefficient de compressibilité du matériau

λ — élancement de la barre

λ_c, λ_b — élancement de la colonne, d'une branche de la colonne

μ — coefficient de Poisson du matériau ; coefficient de longueur d'une barre comprimée lors du flambement

ρ — distance au centre ; rayon de courbure de l'axe géométrique d'une barre à courbure initiale

ρ_t, ρ_m — rayons de courbure des sections circonférentielle (annulaire) et méridienne de la paroi du réservoir

$\sigma, \sigma_x, \sigma_\alpha$ — contraintes normales

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — contraintes principales au point considéré

σ_p — limite de proportionnalité

$\sigma_{éc}$ — limite d'écoulement

σ_R — limite de résistance

$[\sigma]$ — contrainte admissible en traction et compression

σ_0 — contrainte normale octaédrique

$[\sigma_t]$, $[\sigma_c]$, $[\sigma_f]$, $[\sigma_{mat}]$ — contraintes admissibles en traction, compression, flexion, de matage

$\sigma_{éq_I}$, $\sigma_{éq_{II}}$, ..., $\sigma_{éq_V}$ — contraintes équivalentes (de calcul) selon les hypothèses de résistance; la première, la seconde, . . ., la cinquième (hypothèse de Mohr)

σ_{cr} — contrainte critique

$[\sigma_{st}]$ — contrainte admissible vis-à-vis de la stabilité

σ_r, $\sigma\tau$ — contraintes normales radiale et tangentielle dans un tube épais

σ_τ, σ_m — contraintes circonférentielle et méridienne dans les réservoirs à parois minces

σ_r — limite d'endurance

σ_{max}, σ_{moy}, σ_a — contraintes normales maximale, moyenne et amplitude du cycle

σ_{-1} — limite d'endurance pour un cycle symétrique

σ_{-1p} — limite d'endurance lors d'une traction-compression axiale symétrique

$[\sigma_r]$ — contrainte normale admissible lors d'un cycle de coefficient d'asymétrie r

$[\sigma_{-1}]$ — contrainte normale admissible lors d'un cycle symétrique

σ_d — contrainte normale dynamique

τ, τ_α — contrainte tangentielle; τ_{max} contrainte tangentielle maximale

τ_1, τ_2, τ_3 — contraintes tangentielles extrémales

τ_0 — contrainte tangentielle octaédrique

$[\tau]$ — contrainte tangentielle admissible

τ_d — contrainte tangentielle dynamique

τ_r — limite d'endurance en torsion

τ_{max}, τ_{moy}, τ_a — contraintes tangentielles maximale, moyenne et amplitude du cycle

τ_{-1} — limite d'endurance lors d'une torsion symétrique

$[\tau_r]$ — contrainte admissible lors d'une torsion pour un cycle de coefficient d'asymétrie r

$[\tau_{-1}]$ — contrainte admissible lors d'un cycle symétrique

φ — angle de torsion; coefficient de réduction de la contrainte admissible en flambement

$[\varphi]$ — angle de torsion admissible

ω — aire du diagramme des moments fléchissants; vitesse angulaire; fréquence circulaire d'oscillations

ω_0 — fréquence circulaire de variation de la force excitante

UNITÉS DE MESURE

Système d'unités international (SI)

m, kg, s — mètre, kilogramme, seconde; unités de longueur, de masse et de temps

cm, mm — parties d'unité de longueur (centimètre, millimètre)

N — Newton, unité de force (1 N $\simeq$ 1/9,81 kgf $\simeq$ 0,102 kgf)

kN, MN, daN — unités multiples de force: kiloNewton, MegaNewton, décaNewton (daN) — (1 kN = 10^3 N; 1 MN = 10^6 N; 1 daN = 10 N $\cong$ 1,02 kgf)

N/m^2 — unité de contrainte et de pression (1 $N/m^2 \approx 1{,}02 \cdot 10^{-5}$ kgf/cm^2)

MN/m^2 — unité multiple de contrainte et de pression (1 $MN/m^2 = 10^6$ $N/m^2 = 10$ $daN/cm^2 \approx 10{,}2$ kgf/cm^2)

daN/cm^2, daN/mm^2 — unités de contrainte et de pression hors système (1 $daN/cm^2 = 10^5$ $N/m^2 = 1$ bar $\approx 1{,}02$ kgf/cm^2; 1 $daN/mm^2 = 10^7$ $N/m^2 \cong 102$ $kgf/cm^2 \approx 1{,}02$ kgf/mm^2)

J — joule, unité de travail (1 J $\approx \frac{1}{9{,}81}$ kgf·m $\approx$ $\approx$ 0,102 kgf·m)

W, kW — watt, kilowatt; unités de puissance (1 W $\approx$ $\approx$ 102 kgf·m/s $\approx$ 1,36 CV)

Système d'unités technique (MKS)

m, kgf, s — mètre, kilogramme-force, seconde (1 kgf = 9,81 N = = 0,981 daN)

t — tonne-force (1 t = 10^3 kgf $\approx 9{,}81 \cdot 10^3$ N = 9,81 kN)

kgf/cm^2 — unité de contrainte et de pression (1 $kgf/cm^2 \approx 9{,}81 \cdot 10^4$ $N/m^2 \approx 0{,}0981$ $MN/m^2 \approx 0{,}981$ daN/cm^2)

bar — unité de pression hors système (1 bar = 10^5 N/m^2 = = 1 $daN/cm^2 \approx 1{,}02$ kgf/cm^2)

kgf·m — unité de travail (1 kgf·m $\approx$ 9,81 J)

CV — unité de puissance hors système — cheval-vapeur (1 CV = 75 kgf·m/s $\approx$ 0,736 kW)

REMARQUES GÉNÉRALES SUR LES CONDITIONS DES PROBLÈMES

1. Dans tous les problèmes les quantités indiquées sur les figures sont supposées connues; les quantités recherchées (là où cela est nécessaire) sont indiquées par un point d'interrogation.

2. Les problèmes dont les conditions sont données dans le Système d'unités international sont prévus pour être résolus dans ce système.

3. Les valeurs numériques des grandeurs géométriques dont les dimensions ne sont pas indiquées sur les figures sont données en millimètres.

4. Supposer les pièces indiquées sur les figures par deux lignes avec une hachure parfaitement rigides.

5. Supposer que la stabilité de tous les éléments en compression (sauf indication spéciale) est assurée.

I. TRACTION ET COMPRESSION

§ 1. Effort longitudinal

La résultante des forces normales d'élasticité dans une section est appelée *effort longitudinal.* L'effort longitudinal est déterminé par la méthode des sections. La valeur de l'effort longitudinal N_x dans une section droite quelconque d'une barre est égale à la somme algébrique de tous les efforts longitudinaux extérieurs (concentrés P et arbitrairement répartis d'intensité q_x) appliqués à l'une des parties de la barre séparées par la section droite considérée. On admet que l'effort de traction est positif, l'effort de compression négatif.

La formule générale donnant la valeur de l'effort longitudinal dans une section droite arbitraire de la barre est de la forme:

$$N_x = \sum P + \sum \int q_x \, dx. \qquad (1)$$

L'intégrale s'étend à la totalité de la longueur de chaque partie soumise à une charge répartie et la sommation à toutes les parties se trouvant d'un côté de la section considérée.

Si on oriente le vecteur de l'effort longitudinal N_x suivant la normale extérieure à la section droite considérée, la condition d'équilibre de la partie tranchée de la barre, c'est-à-dire la formule (1), nous donnera et la valeur et le signe de l'effort recherché.

Exemple 1. Construire le diagramme de l'effort N. On prendra: $P_1 = P$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 2P$; la charge répartie varie linéairement de $q = 0$ à $q = \dfrac{P}{a}$ (fig. 1).

Solution. En effectuant une section droite dans chaque partie de la barre, la formule (1) nous donnera les valeurs suivantes pour les efforts longitudinaux:

$$N_1 = -P_1 = -P; \quad N_2 = -P_1 + P_2 = -P + 3P = 2P;$$

$$N_3 = -P_1 + P_2 - \int_0^x P \frac{x}{2a^2} dx = -P + 3P - P\frac{x^2}{4a^2} = P\left(2 - \frac{x^2}{4a^2}\right);$$

$$N_{3_{x=0}} = 2P; \; N_{3_{x=a}} = \frac{7}{4}P; \; N_4 = -P_1 + P_2 - \int_a^x P \frac{x}{2a^2} dx -$$

$$- P_3 = -P\frac{x^2}{4a^2};$$

$$N_{4_{x=a}} = -\frac{P}{4};\ N_{4_{x=2a}} = -P;\ N_5 = -P_1 + P_2 - \int_0^{2a} P\frac{x}{2a^2}dx -$$

$$-P_3 = -P$$

Le diagramme de l'effort N est représenté fig. 1.

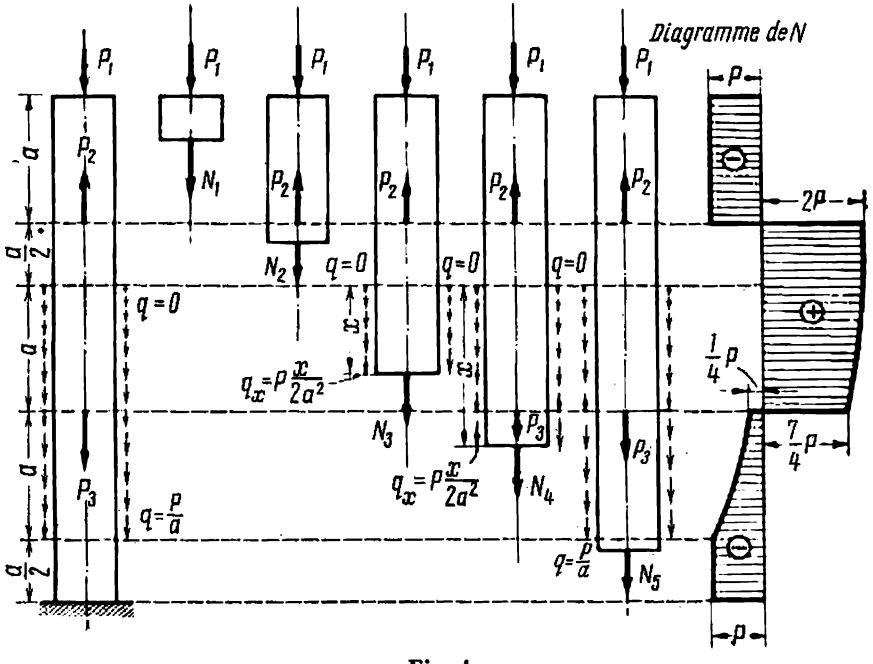
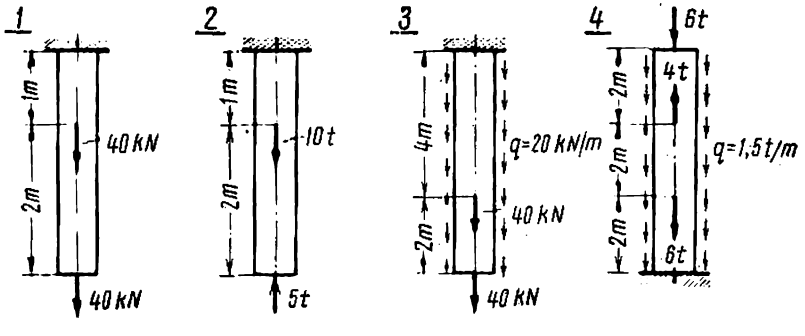
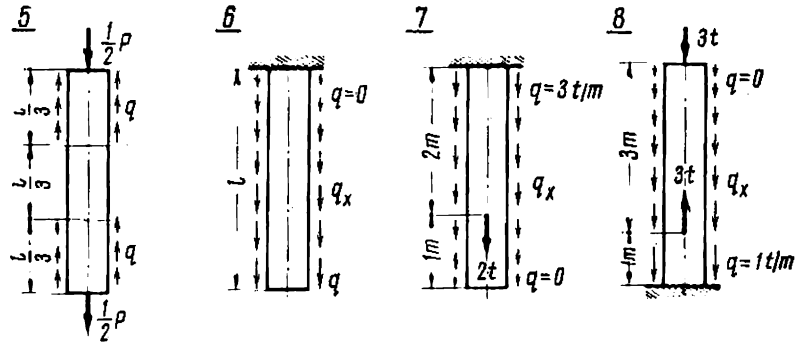


Fig. 1

Problèmes 1-8. Construire les diagrammes de l'effort longitudinal. Dans les problèmes 6, 7, 8 les charges réparties q_x varient linéairement.





§ 2. Contraintes normales, allongement absolu et énergie potentielle

On suppose que dans toutes les sections droites des barres en extension ou en compression les contraintes normales sont uniformément réparties (ceci est vrai approximativement aussi pour les barres à section variable). La valeur de la contrainte normale dans une section droite arbitraire est de ce fait déterminée par le rapport de l'effort longitudinal N_x à l'aire F_x de la section, c'est-à-dire:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F_x}. \tag{2}$$

En admettant que les matériaux des barres obéissent à la loi de Hooke, la valeur de l'allongement absolu longitudinal peut être calculée d'après la formule:

$$\Delta l = \sum \int \frac{N_x\, dx}{EF_x}, \tag{3}$$

où E est le module d'élasticité longitudinale du matériau.

L'intégration s'effectue suivant la longueur de chaque partie, et la sommation, suivant toutes les parties de la barre.

Si N et F sont constants suivant la longueur l, on a $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$.

La formule générale donnant la valeur de l'énergie potentielle de déformation élastique U accumulée dans la barre pendant la traction ou la compression est de la forme:

$$U = \sum \int \frac{N_x^2\, dx}{2EF_x}. \tag{4}$$

L'intégration et la sommation s'effectuent de la même manière que pour déterminer l'allongement de la barre.

Puisque dans les limites d'élasticité du matériau l'énergie potentielle est égale à la somme des travaux des forces extérieures, pour les barres en extension ou en compression sous l'action des forces P, appliquées en leurs extrémités

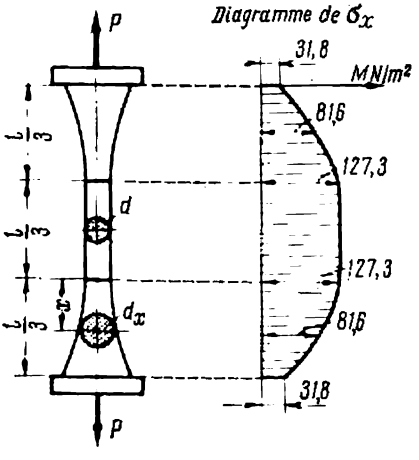


Fig. 2

$$U = \frac{1}{2} P \Delta l. \qquad (5)$$

Exemple 2. Construire le diagramme de σ_x et déterminer les valeurs de Δl et de U. On prendra : $P = 10$ kN, $l = 0{,}3$ m, $d = 0{,}01$ m, $d_x = (0{,}01 + x^2)$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m² (fig. 2).

Solution. L'effort longitudinal dans une section droite arbitraire est : $N_x = P = 10$ kN. Les aires de ces sections sont :

pour la partie cylindrique :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}25\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2;$$

pour les parties intermédiaires :

$$F_x = \frac{\pi d_x^2}{4} = \frac{\pi}{4} (0{,}01 + x^2)^2 \text{ m}^2$$

Les contraintes normales sont :

pour la partie cylindrique :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} = \frac{10^4}{0{,}25\pi \cdot 10^{-4}},$$

ou

$$\sigma_x \approx 1{,}273 \cdot 10^8 \text{N/m}^2 = 127{,}3 \text{ MN/m}^2;$$

pour les parties intermédiaires :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F_x} = \frac{4P}{\pi (0{,}01 + x^2)^2} = \frac{4 \cdot 10^4}{\pi (0{,}01 + x^2)^2} \text{ N/m}^2 \approx$$

$$\approx \frac{127{,}3}{(1 + 100x^2)^2} \text{ MN/m}^2;$$

$$\sigma_{x=0} = 127{,}3 \text{ MN/m}^2; \quad \sigma_{x=\frac{l}{6}} = \frac{127{,}3}{(1 + 100 \cdot 0{,}05^2)^2} \approx 81{,}6 \text{ MN/m}^2;$$

$$\sigma_{x=\frac{l}{3}} = 31{,}8 \text{ MN/m}^2$$

Le diagramme de σ_x est représenté fig. 2. L'allongement absolu de la barre est donné par la formule (3):

$$\Delta l = \sum \int \frac{N_x\,dx}{EF_x} = \frac{Pl}{3EF} + \frac{2P\cdot 4}{\pi E}\int_0^{l/3} \frac{dx}{(0{,}01+x^2)^2} =$$

$$= \frac{Pl}{3EF} + \frac{8P}{\pi E}\left| \frac{x}{2(0{,}01+x^2)}\cdot\frac{1}{0{,}1^2} + \frac{1}{2\cdot 0{,}1^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{0{,}1}\right|_0^{0{,}1} =$$

$$= \frac{10\cdot 10^3\cdot 0{,}3}{3\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 0{,}25\pi\cdot 10^{-4}} + \frac{8\cdot 10^4}{\pi\cdot 2\cdot 10^{11}}\left(\frac{0{,}1}{2(0{,}01+0{,}1^2)\cdot 0{,}1^2} + \right.$$

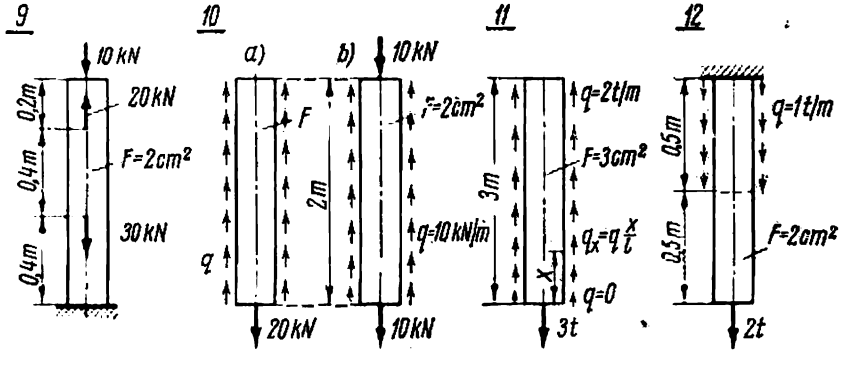
$$\left. + \frac{1}{2\cdot 0{,}1^3}\operatorname{arctg} 1\right);$$

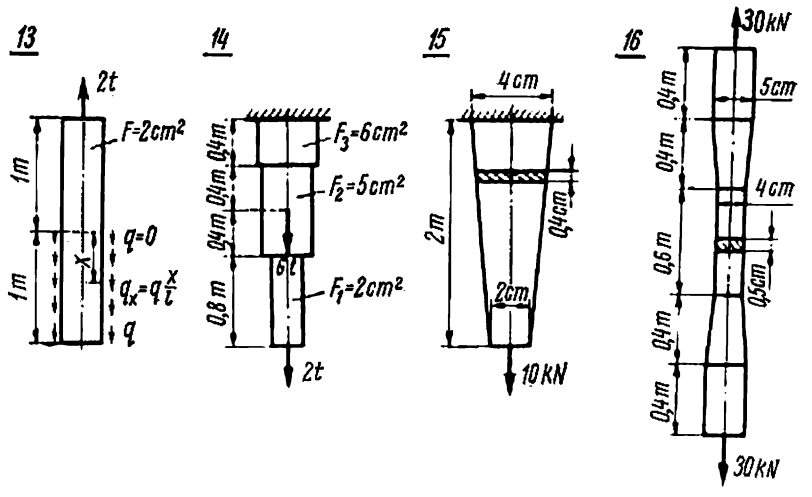
$$\Delta l \approx 1{,}46\cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0{,}0146\,\text{cm}.$$

La valeur de l'énergie potentielle de déformation élastique, accumulée dans le volume de la barre, est donnée par la formule (5):

$$U = \frac{P\Delta l}{2} = \frac{10^4\cdot 1{,}46\cdot 10^{-4}}{2} = 0{,}73\ \text{J} \approx 7{,}45\ \text{kgf}\cdot\text{cm}.$$

Problèmes 9-16. Construire les diagrammes des contraintes normales σ et déterminer les valeurs absolues des variations des longueurs Δl des barres, ainsi que des énergies potentielles de déformation élastique U accumulées dans les barres. On prendra $E = 2\cdot 10^5$ MN/m^2. Dans les problèmes 11-14 on prendra $E = 2\cdot 10^6$ kgf/cm^2.





§ 8. Déformation latérale et variation de volume

D'après la loi de Hooke, la déformation relative longitudinale ε en traction ou en compression, est:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{6}$$

et la déformation latérale:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}, \tag{7}$$

où μ est le coefficient de Poisson du matériau.

La variation relative de l'aire de la section droite de la barre est calculée par la formule:

$$\frac{\Delta F}{F} \approx -2\mu\varepsilon = -2\mu\frac{\sigma}{E}. \tag{8}$$

On détermine la variation absolue du volume de la barre par la formule:

$$\Delta V = \frac{(1-2\mu)}{E}\sum\int N_x\,dx. \tag{9}$$

L'intégrale s'étend à la totalité de la longueur de chaque partie, la sommation à toutes les parties.

Si la barre travaille en extension ou en compression sous l'action de forces P appliquées en ses extrémités, nous avons:

$$\Delta V = \frac{(1-2\mu)}{E}Pl. \tag{10}$$

Exemple 3. Calculer ε_x, $\Delta F_x/F_x$, ΔV. Les quantités P, q, l, F_x, E, μ sont supposées connues (fig. 3).

Solution. D'après les formules (1) et (2) l'effort longitudinal et la contrainte normale dans une section droite arbitraire sont:

$$N_x = P + qx; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{F_x} = \frac{P + qx}{F_x}.$$

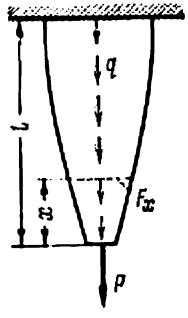


Fig. 3

Puisque l'allongement relatif, d'après la loi de Hooke, est égal à $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P + qx}{EF_x}$, selon la formule (8) nous aurons pour la variation relative de l'aire de la section droite de la barre:

$$\frac{\Delta F_x}{F_x} = -2\mu \frac{\sigma_x}{E} = -2\mu \frac{P + qx}{EF_x}.$$

On trouve la variation absolue du volume de la barre à partir de la formule (9):

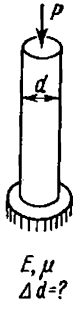
$$\Delta V = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \int_0^l N_x \, dx = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \int_0^l (P + qx) \, dx =$$

$$= \frac{(1 - 2\mu)}{E} \left(P + \frac{ql}{2} \right) l.$$

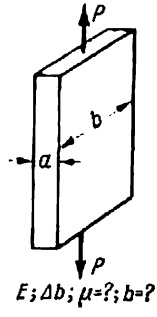
Problèmes 17-24. Déterminer les quantités inconnues.

Dans le problème 24 on prendra pour l'acier: $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $\mu = 0{,}3$.

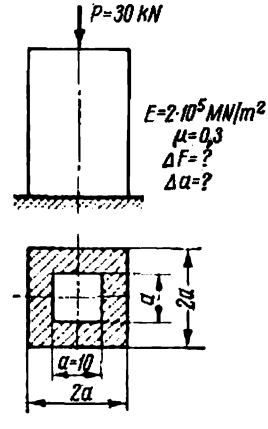
17



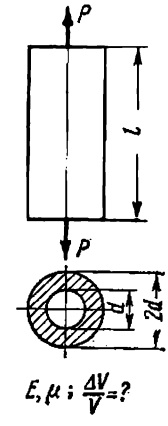
18

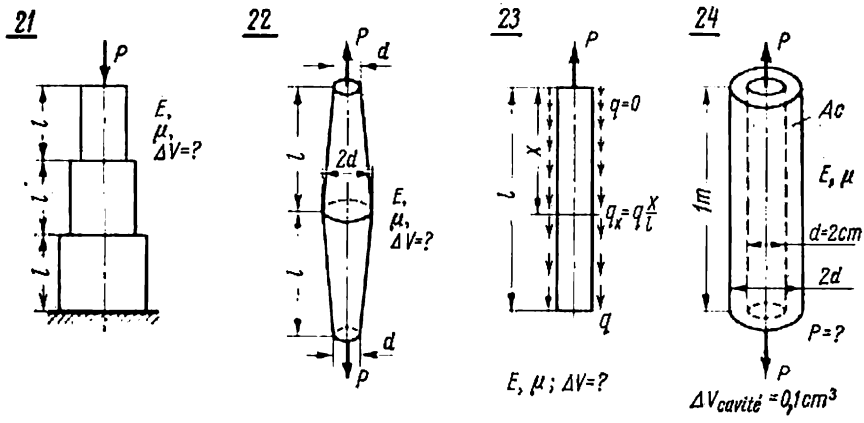


19



20





§ 4. Déplacements des points d'un système articulé

Les déplacements élastiques des points d'un système articulé sont déterminés d'après le schéma général suivant.

Au moyen des équations de la statique on trouve les efforts longitudinaux dans toutes les barres élastiques du système. D'après la loi de Hooke on détermine les valeurs des allongements absolus.

En admettant que les barres du système ne se séparent pas pendant la déformation, on établit les conditions de compatibilité des déplacements, c'est-à-dire les relations géométriques entre les déplacements des barres du système. Le déplacement recherché s'obtient à partir de ces relations.

Il faut avoir en vue que chaque barre du système, en plus d'une déformation axiale, peut encore tourner autour du nœud correspondant. C'est pour cela que chaque point de la barre peut se déplacer et suivant l'axe de la barre et suivant un arc circulaire de rayon correspondant. Ces arcs peuvent être remplacés par des perpendiculaires aux rayons de rotation, puisque les allongements élastiques des barres sont négligeables devant leurs longueurs.

Exemple 4. Déterminer la projection horizontale δ_x et la projection verticale δ_y du déplacement δ du point d'application de la force P. Les quantités P, a, E_1, F_1, E_2, F_2 sont données (fig. 4, *a*).

S o l u t i o n. On décompose le système donné en deux systèmes en coupant les tiges *I* et *II* (fig. 4, *b*).

D'après les conditions de la statique, $\sum M_A = 0$ et $\sum M_B = 0$, on détermine les efforts dans les tiges: $N_1 = P/3$ et $N_2 = 2/3P$. La loi de Hooke donne

$$\Delta l_1 = Pa/3E_1F_1 \quad \text{et} \quad \Delta l_2 = 2Pa/3E_2F_2.$$

De la géométrie de la fig. 4, *b*, on détermine le déplacement horizontal Δl_2 du point C et son déplacement perpendiculairement à BC: $\delta_C = \Delta l_2 \sqrt{2}$.

Le point D ne peut se déplacer que dans le sens horizontal. Ce déplacement est: $\delta_D = \delta_C \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} = 2\Delta l_2$.

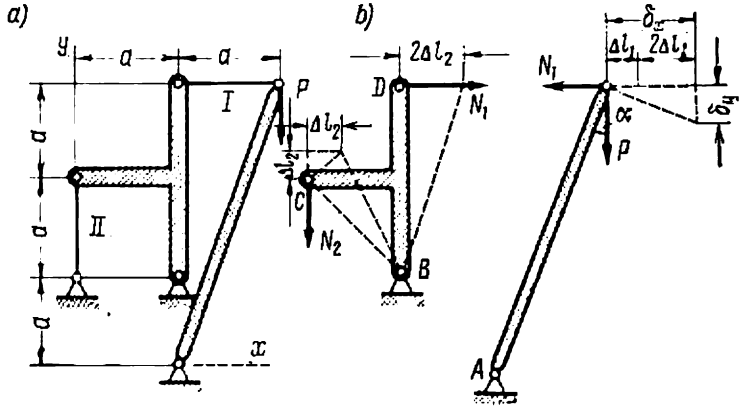


Fig. 4

Le déplacement horizontal du point d'application de la force P est la somme du déplacement horizontal du point D et de l'allongement de la tige I, c'est-à-dire:

$$\delta_x = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{4Pa}{3E_2F_2} + \frac{1}{3}\frac{Pa}{E_1F_1} = \frac{Pa}{3}\left(\frac{4}{E_2F_2} + \frac{1}{E_1F_1}\right).$$

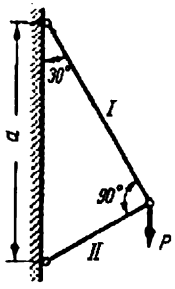
Le déplacement vertical du point d'application de la force P sera:

$$\delta_y = \delta_x \operatorname{tg}\alpha = \delta_x \frac{a}{3a} = \frac{Pa}{9}\left(\frac{4}{E_2F_2} + \frac{1}{E_1F_1}\right).$$

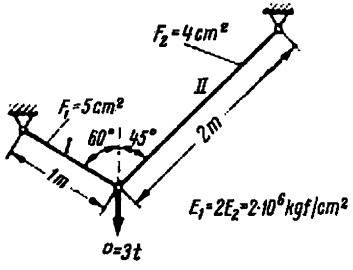
Problèmes 25-40. Déterminer les déplacements des points d'application des forces P (ou des autres points indiqués dans les conditions des problèmes) et les contraintes normales dans les sections droites des barres élastiques.

Les quantités E et F, ne figurant pas dans les problèmes avec des données littérales, sont supposées connues et les mêmes pour toutes les barres élastiques du système. Dans les problèmes 37-40, on prendra pour toutes les barres $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m^2. Dans les problèmes 35 et 36 on prendra $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2.

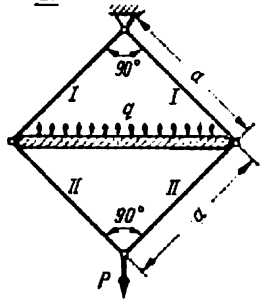
25



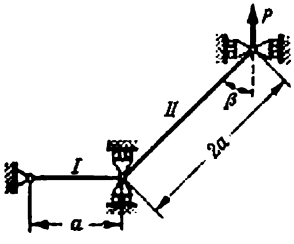
26



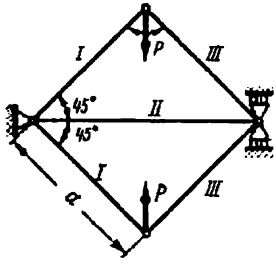
27



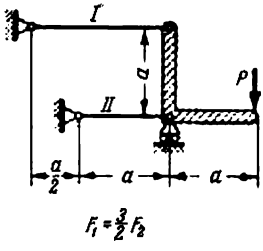
28



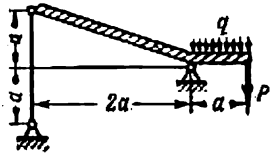
29



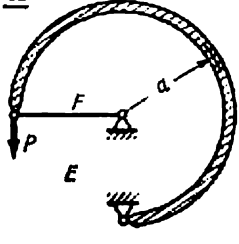
30



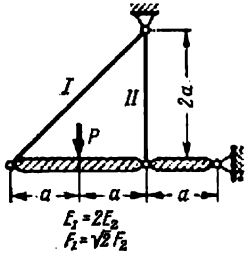
31



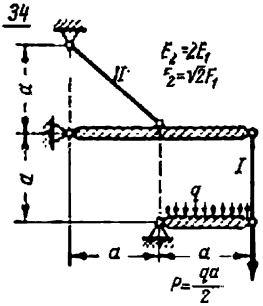
32



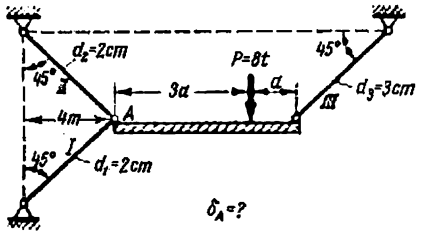
33



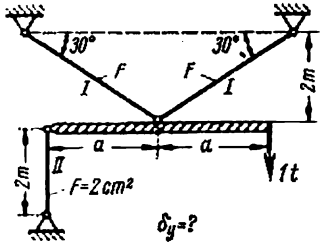
34



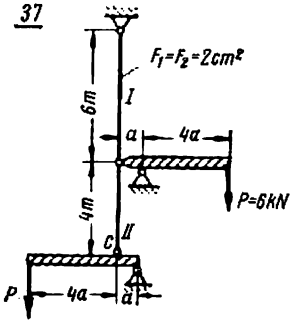
35



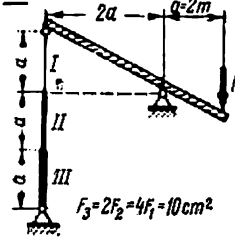
36



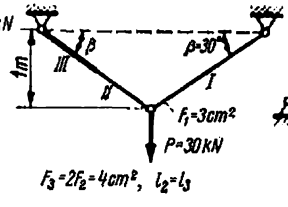
37



38

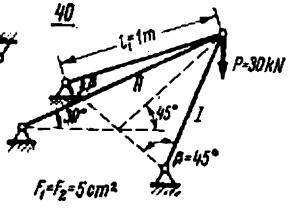


39



$F_3=2F_2=4cm^2,\ l_2=l_3$

40



$F_1=F_2=5cm^2$

§ 5. Résistance et rigidité

Les dimensions nécessaires de l'aire F de la section droite d'une barre en extension ou en compression sont choisies d'après la formule :

$$F = \frac{N_{max}}{[\sigma]}, \qquad (11)$$

où N_{max} est la valeur absolue maximale de l'effort longitudinal dans la barre à calculer ; $[\sigma]$, la contrainte admissible du matériau de la barre ou en traction $[\sigma_t]$, ou en compression $[\sigma_c]$.

Pour les matériaux ayant la même résistance en traction et en compression (matériaux plastiques) nous avons :

$$[\sigma_t] = [\sigma_c] = [\sigma] = \frac{\sigma_{éc}}{n_{éc}}, \qquad (12)$$

où $\sigma_{éc}$ est la limite d'écoulement du matériau en traction (compression),

$n_{éc}$, le coefficient de sécurité par rapport à la limite d'écoulement.

Si nous posons comme condition supplémentaire que le déplacement élastique δ d'un point quelconque du système ne doit pas dépasser une valeur admissible donnée $[\delta]$, la rigidité se vérifie d'après l'inégalité

$$\delta \leqslant [\delta]. \qquad (13)$$

Fig. 5

Exemple 5. Déterminer F_1 et F_2 (fig. 5). On prendra :

$$P = 1\text{t};\ a = 1\text{m};\ \alpha = 30°;\ [\sigma_t]_I = 1\,000\ \text{kgf/cm}^2;$$

$$E_1 = 2 \cdot 10^6\ \text{kgf/cm}^2;\ [\sigma_c]_{II} = 100\ \text{kgf/cm}^2;$$

$$E_2 = 0{,}1 \cdot 10^6\ \text{kgf/cm}^2;$$

les valeurs admissibles de la projection horizontale $[\delta_x]$ et de la projection verticale $[\delta_y]$ du déplacement du point d'application de la force P sont : $[\delta_x] = [\delta_y] = 1{,}3$ mm.

Solution. D'après les conditions de la statique (fig. 5, *a*) nous avons :

$$\sum X = 0 \ \textit{et}\ \sum Y = 0;$$

$$N_1 = N_2 = N;\ N = P = 1\text{t}.$$

La formule (11) nous donne:

$$F_1 = \frac{N}{[\sigma_t]_I} = \frac{10^3}{10^3} = 1\,\text{cm}^2;\ F_2 = \frac{N}{[\sigma_c]_{II}} = \frac{10^3}{10^2} = 10\,\text{cm}^2.$$

D'après la loi de Hooke on obtient:

$$\Delta l_1 = \frac{Na}{E_1 F_1} = \frac{10^3 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0{,}05\,\text{cm};$$

$$\Delta l_2 = \frac{Na}{E_2 F_2} = \frac{10^3 \cdot 10^2}{0{,}1 \cdot 10^6 \cdot 10} = 0{,}1\,\text{cm}.$$

La construction géométrique (fig. 5, *b*) obtenue par la méthode des sections montre que l'allongement Δl_1 est la somme des projections δ_x et δ_y sur la barre *I*, et l'allongement Δl_2 la somme des projections δ_x et δ_y sur la barre *II*, c'est-à-dire:

$$\Delta l_1 = \delta_y \sin\alpha - \delta_x \cos\alpha;\ \Delta l_2 = \delta_y \sin\alpha + \delta_x \cos\alpha.$$

Donc:

$$\delta_y = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2\sin\alpha} = 1{,}5\,\text{mm};\ \delta_x = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{2\cos\alpha} = 0{,}289\,\text{mm}.$$

Puisque $\delta_y > [\delta_y]$, il importe d'augmenter l'aire des sections droites des barres.

Ayant fixé l'aire de la section droite de la barre *I*, $F_1 = 1$ cm², on obtient l'aire nécessaire F_2 de la barre *II*.

D'après la condition de rigidité:

$$\delta_y = \frac{1}{2\sin 30^\circ}(\Delta l_1 + \Delta l_2) \leqslant [\delta_y]$$

ou:

$$0{,}05 + \Delta l_2 \leqslant 0{,}13\,\text{cm},$$

d'où:

$$\Delta l_2 = \frac{Na}{E_2 F_2} \leqslant 0{,}08\,\text{cm} \text{ et } F_2 = \frac{Na}{0{,}08 E_2} = 12{,}5\,\text{cm}^2.$$

Pour cette valeur de F_2 la contrainte dans la barre *II* sera:

$$\sigma_{II} = \frac{N}{F_2} = 80\,\text{kgf/cm}^2,$$

et pour le déplacement horizontal et le déplacement vertical du point d'application de la force *P* nous aurons:

$$\delta_y = 1{,}3\,\text{mm};\ \delta_x = \frac{0{,}08 - 0{,}05}{\sqrt{3}} \approx 0{,}0173\,\text{cm} = 0{,}173\,\text{mm}.$$

Exemple 6. Un anneau circulaire de rayon intérieur $r = 10$ cm et de rayon extérieur $R = 10{,}1$ cm, de longueur l est soumis à l'action d'une pression radiale intérieure constante $p = 20$ bars (fig. 6, *a*).

Déterminer l'accroissement du rayon de l'anneau Δr et le coefficient de sécurité $n_{éc}$ de l'anneau si pour le matériau de ses parois le module d'élasticité longitudinale $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m² et la limite d'écoulement $\sigma_{éc} = 300$ MN/m².

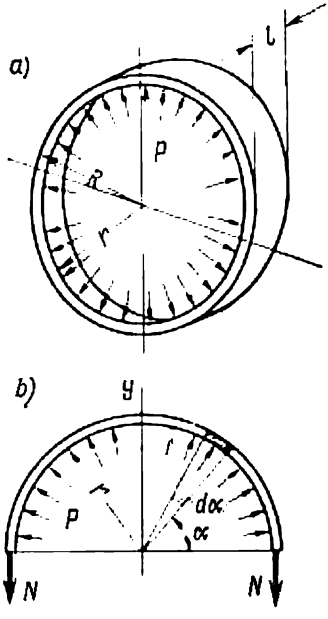


Fig. 6

Solution. Pour déterminer les efforts longitudinaux de traction qui apparaissent dans la paroi de l'anneau, effectuons une section suivant un plan diamétral (fig. 6, *b*). Ecrivons la condition d'équilibre pour un demi-anneau en projetant toutes les forces et les efforts sur l'axe des y; nous aurons:

$$N = \int_0^{\pi/2} prl \sin\alpha \, d\alpha = prl.$$

La contrainte normale dans la paroi de l'anneau sera:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{prl}{(R-r)\,l} =$$

$$= \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{0{,}1 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 200 \text{ MN/m}^2.$$

Le coefficient de sécurité $n_{éc}$ (par rapport à la limite d'écoulement du matériau $\sigma_{éc}$) sera:

$$n_{éc} = \frac{\sigma_{éc}}{\sigma} = \frac{300}{200} = 1{,}5.$$

D'après la loi de Hooke, on trouve l'accroissement absolu Δr du rayon intérieur de l'anneau. Puisque:

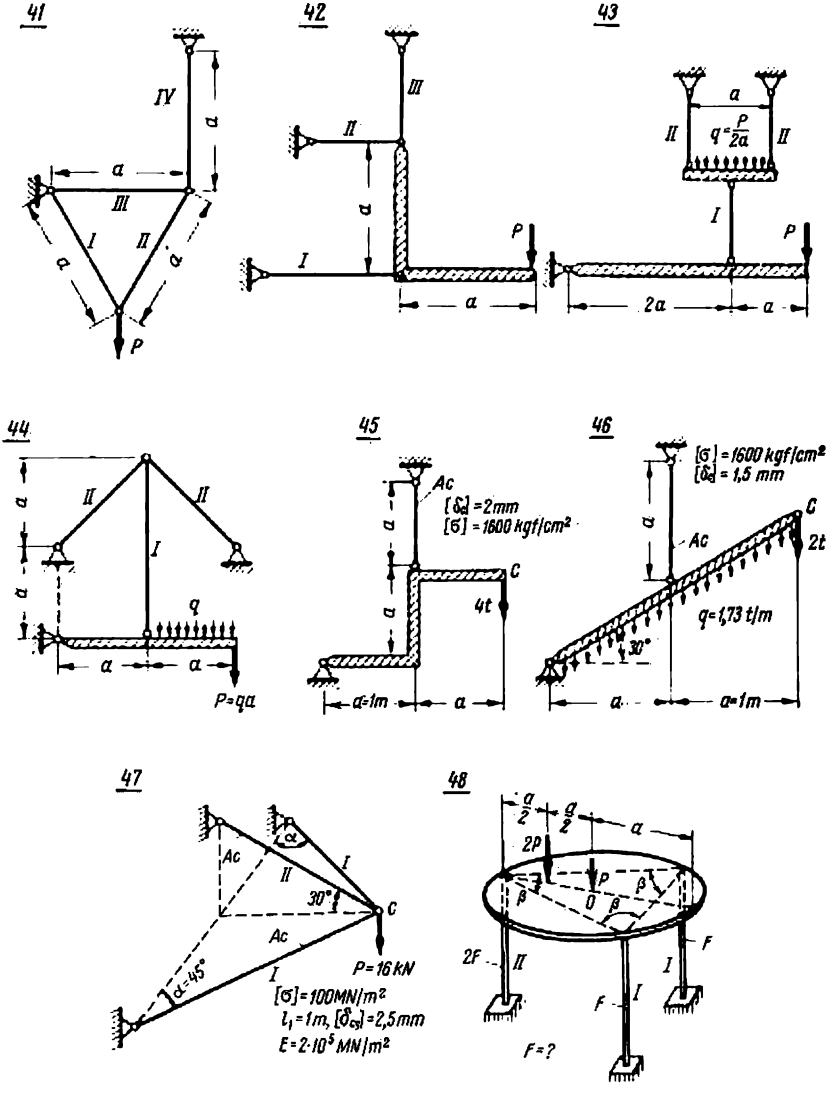
$$2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r = \frac{N \cdot 2\pi r}{E(R-r)\,l},$$

alors:

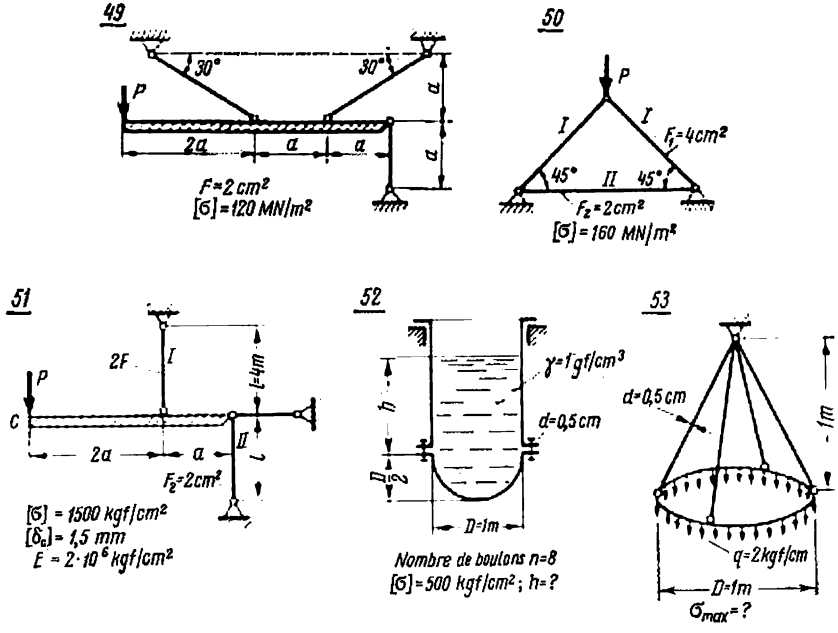
$$\Delta r = \frac{pr^2}{E(R-r)} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-2}} = 0{,}01 \cdot 10^{-2} \text{m} = 0{,}01 \text{ cm}.$$

Problèmes 41-48. Choisir les dimensions des aires F des sections droites des barres élastiques des systèmes.

Dans les problèmes avec des données littérales on supposera que la contrainte admissible $[\sigma]$ est la même en traction et en compression pour toutes les barres élastiques du système. Si le module d'élasticité n'est pas mentionné dans les données du problème, on admettra qu'il est connu et le même pour toutes les barres. Dans les problèmes 45-46 on prendra pour l'acier $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm².



Problèmes 49-53. Déterminer les forces admissibles P ou les quantités inconnues indiquées dans les conditions des problèmes.



§ 6. Considération du poids propre

Pour une barre prismatique sous l'action de son poids propre et d'une force concentrée P appliquée à son extrémité libre: l'effort longitudinal dans une section droite à une distance x de l'extrémité libre sera:

$$N_x = P + \gamma F x, \tag{14}$$

la contrainte normale dans cette section:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \gamma x, \tag{15}$$

l'on aura pour l'aire nécessaire de la section droite:

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}, \tag{16}$$

et l'allongement absolu sera:

$$\Delta l = \frac{l}{EF}\left(P + \frac{Q}{2}\right). \tag{17}$$

où γ est le poids de l'unité de volume du matériau de la barre, l sa longueur et $Q = \gamma F l$ son poids.

Pour une barre d'égale résistance, c'est-à-dire dans les sections droites de laquelle les contraintes normales ont une même valeur, égale à la contrainte admissible, la loi de variation de l'aire de la section droite est exprimée par la formule:

$$F_x = \frac{P}{[\sigma]} \cdot e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}, \tag{18}$$

où e est la base du logarithme népérien.

L'allongement absolu d'une barre d'égale résistance est:

$$\Delta l = \frac{[\sigma]\, l}{E}. \tag{19}$$

Pour une barre à gradins l'aire de la section droite d'un tronçon arbitraire i est égale à:

$$F_i = \frac{P\,[\sigma]^{i-1}}{([\sigma] - \gamma l_1)([\sigma] - \gamma l_2)([\sigma] - \gamma l_3) \ldots ([\sigma] - \gamma l_i)}, \tag{20}$$

et l'allongement absolu à:

$$\Delta l = \frac{[\sigma]}{E} \sum l_i \left(1 - \frac{\gamma l_i}{2[\sigma]}\right), \tag{21}$$

où l_1, l_2, l_3 désignent les longueurs correspondantes des tronçons de la barre.

Exemple 7. Déterminer l'aire F_p, le poids Q_p et l'allongement absolu Δl_p d'une barre prismatique; l'aire maximale F_g, le poids Q_g et l'allongement absolu Δl_g d'une barre à gradins de quatre tronçons de même longueur; l'aire maximale $F_é$, le poids $Q_é$ et l'allongement absolu $\Delta l_é$ d'une barre d'égale résistance. On prendra:

$P = 16$ t, $\gamma = 8$ gf/cm^3,
$[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2,
$E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2,
$l = 40$ m (fig. 7).

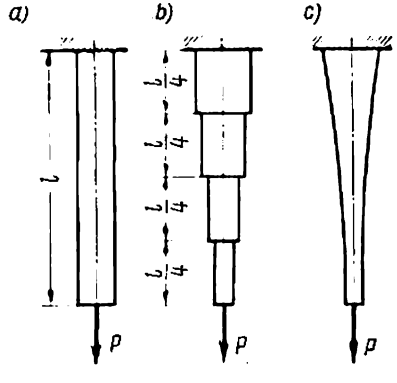


Fig. 7

Solution. Pour une barre prismatique (fig. 7, *a*) l'aire est donnée par la formule (16):

$$F_p = \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3} \approx 10{,}204\,\text{cm}^2,$$

le poids:

$$Q_p = \gamma F_p l = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10{,}204 \cdot 4 \cdot 10^3 \approx 326{,}53 \text{ kgf},$$

et l'allongement absolu par la formule (17):

$$\Delta l_p = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 10{,}204} \left(16 \cdot 10^3 + \frac{327}{2}\right) \approx 3{,}168 \text{ cm}.$$

Pour une barre à gradins (fig. 7, *b*):
l'aire maximale est donnée par la formule (20):

$$F_g = \frac{P[\sigma]^3}{\left([\sigma] - \frac{1}{4}\gamma l\right)^4} = \frac{P}{[\sigma]\left(1 - \frac{\gamma l}{4[\sigma]}\right)^4} =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2 \left(1 - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{4 \cdot 16 \cdot 10^2}\right)^4} \approx 10{,}203 \text{ cm}^2,$$

le poids:

$$Q_g = [\sigma] F_g - P = 16 \cdot 10^2 \cdot 10{,}203 - 16 \cdot 10^3 \approx 324{,}8 \text{ kgf},$$

et l'allongement absolu par la formule (21):

$$\Delta l_g = \frac{[\sigma] l}{E}\left(1 - \frac{\gamma l}{2 \cdot 4[\sigma]}\right) =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6}\left(1 - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 10^2}\right) \approx 3{,}192 \text{ cm}.$$

Pour une barre d'égale résistance (fig. 7, *c*): l'aire maximale est donnée par la formule (18):

$$F_é = \frac{P}{[\sigma]} \cdot e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} = \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2} \cdot e^{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2}} = 10 e^{0{,}02} \approx 10{,}202 \text{ cm}^2,$$

le poids:

$$Q_é = [\sigma] F_é - P = 16 \cdot 10^2 \cdot 10{,}202 - 16 \cdot 10^3 \approx 323{,}3 \text{ kgf},$$

et l'allongement absolu par la formule (19):

$$\Delta l_é = \frac{[\sigma] l}{E} = \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} = 3{,}2 \text{ cm}.$$

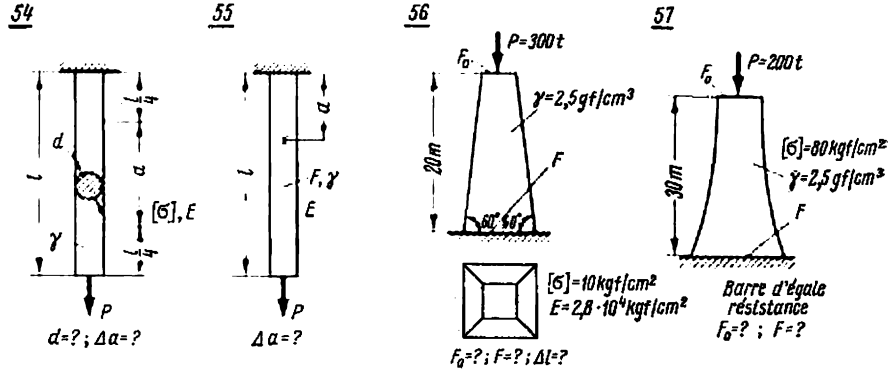
Les résultats obtenus montrent que pour une barre en acier de longueur 40 m la différence entre une barre prismatique, une barre à gradins et une barre d'égale résistance est insignifiante.

La formule (16) montre que dans une barre prismatique la contrainte due au poids propre est de 5% de [σ] pour une longueur

de la barre $l \geqslant \frac{0{,}05\,[\sigma]}{\gamma}$. Si la barre est en acier, en prenant $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2 et $\gamma = 8$ gf/cm^3, nous aurons:

$$l \geqslant \frac{0{,}05 \cdot 16 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^{-3}} = 10^4 \text{ cm} = 100 \text{ m}.$$

Problèmes 54-57. Déterminer les quantités inconnues indiquées dans les conditions des problèmes.



§ 7. Systèmes hyperstatiques

On appelle *systèmes hyperstatiques* les systèmes pour lesquels les efforts dans les barres ne peuvent être déterminés par les seules équations de la statique. Pour calculer les systèmes hyperstatiques, on utilise les équations de la statique et les conditions de compatibilité des déplacements. Le calcul d'un système articulé hyperstatique se fait dans l'ordre suivant. Pour un système donné, on écrit tout d'abord les équations de la statique et on établit le degré d'hyperstatisme du système; ensuite on établit les conditions de compatibilité des déplacements, c'est-à-dire les relations géométriques entre les allongements des différentes barres du système.

D'après la loi de Hooke, on explicite les allongements longitudinaux des barres du système en fonction des efforts et on les substitue dans les conditions de compatibilité des déplacements.

On résout le système d'équations de la statique et de compatibilité des déplacements obtenu, et on trouve les efforts longitudinaux dans toutes les barres du système.

Pour déterminer les contraintes dues à la température, on utilise le même procédé de calcul. Dans ce cas les équations de la statique sont établies seulement pour les efforts, les valeurs des variations des longueurs des barres chauffées ou refroidies étant égales aux sommes algébriques des variations provoquées par les efforts et des variations dues à la température.

L'allongement absolu dû à la variation de température est donné par la formule:

$$\Delta l = l\alpha\Delta t, \tag{22}$$

où l est la longueur de la barre, α la valeur moyenne du coefficient de dilatation linéique du matériau de la barre, Δt la variation de température.

Les contraintes dues aux défauts de montage sont de même déterminées à l'aide des équations de la statique et des conditions de compatibilité des déplacements. Dans ce cas on établit les conditions de compatibilité des déplacements en prenant en considération les imprécisions connues dans les longueurs des barres du système. Puisque les vraies longueurs des barres diffèrent très peu de celles de projet, pour déterminer d'après la loi de Hooke les allongements absolus des barres, on prend leurs longueurs de projet et non leurs vraies longueurs.

Le calcul de la force maximale de sécurité établi d'après la contrainte admissible se fait en égalant la valeur de la contrainte dans la section la plus chargée à la valeur admissible. A partir de l'effort ainsi obtenu on trouve la force maximale de sécurité.

Le calcul des systèmes hyperstatiques établi d'après la capacité portante se fait à l'aide des seules équations de la statique. On admet que dans ces équations les efforts longitudinaux sont égaux aux produits des contraintes admissibles et des aires des sections droites des barres où les contraintes atteignant la valeur de la limite d'écoulement du matériau rendent le système géométriquement déformable. Une telle méthode de calcul repose sur la substitution du diagramme réel de traction du matériau par le diagramme idéalisé de Prandtl, où l'on admet que le palier d'écoulement est infini.

Exemple 8. Etant données:

a) $E_1 = E_2 = E_3 = E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2; $[\sigma] =$

$= 1\,600$ kgf/cm^2; $a = 0{,}4$ m; $b = 1{,}2$ m; $c = 0{,}4$ m;

$\beta_1 = 45°$; $\beta_2 = 60°$; $\beta_3 = 30°$; $F_1 = 12$ cm^2;

$F_2 = 14$ cm^2; $F_3 = 16$ cm^2 (fig. 8);

b) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$;

c) les longueurs des barres *II* après fabrication sont plus courtes que leurs valeurs de projet de $\Delta_2 = 1{,}2$ mm;

déterminer: a) P; $P_{\max}$; b) $\sigma_{I,\,II,\,III}$; c) $\sigma_{I,\,II,\,III}$.

Solution. a) *Calcul d'après la contrainte admissible.* Des conditions de la statique, représentant la somme des projections sur l'axe vertical des forces et des efforts appliqués aux nœuds

relevés, on reçoit (fig. 8,*a*):

$$2N_1 \sin \beta_1 = 2N_2 \sin \beta_2;\ 2N_2 \sin \beta_2 + 2N_3 \sin \beta_3 = P.$$

La condition de compatibilité des déplacements exprimant l'égalité des déplacements du point d'application de la force P

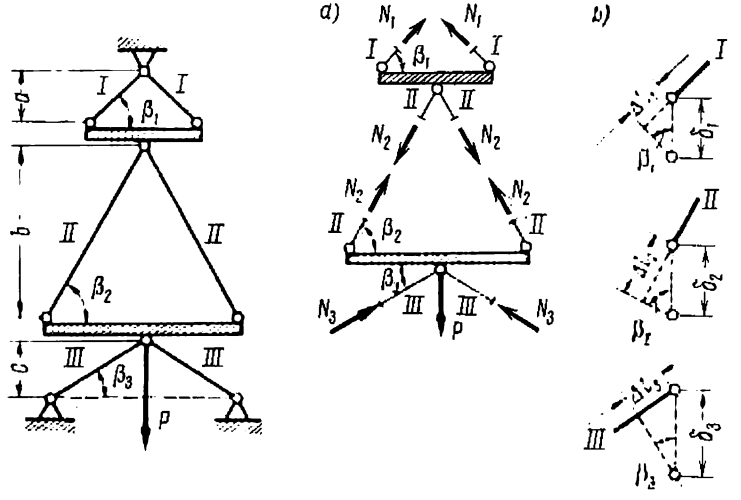


Fig. 8

provoqués par la traction des barres *I* et *II* et par la compression des barres *III* (fig. 8,*b*) nous donne:

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3.$$

D'après la loi de Hooke on a:

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \beta_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1 \sin \beta_1};\quad \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2 \sin \beta_2};$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin \beta_3} = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3 \sin \beta_3}.$$

La géométrie du système permet d'écrire:

$$l_1 = \frac{a}{\sin \beta_1};\quad l_2 = \frac{b}{\sin \beta_2};\quad l_3 = \frac{c}{\sin \beta_3}.$$

Après substitution des valeurs obtenues, la condition de compatibilité des déplacements sera:

$$\frac{N_1 a}{E_1 F_1 \sin^2 \beta_1} + \frac{N_2 b}{E_2 F_2 \sin^2 \beta_2} = \frac{N_3 c}{E_3 F_3 \sin^2 \beta_3}.$$

D'après les valeurs numériques données nous aurons:

$$\sin\beta_1=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin\beta_2=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin\beta_3=\frac{1}{2};$$

$$\frac{a}{F_1\sin^2\beta_1}=\frac{40\cdot4}{12\cdot2}=\frac{20}{3}\ 1/\text{cm};\qquad \frac{b}{F_2\sin^2\beta_2}=\frac{120\cdot4}{14\cdot3}=\frac{80}{7}\ 1/\text{cm};$$

$$\frac{c}{F_3\sin^2\beta_3}=\frac{40\cdot4}{16\cdot1}=10\ 1/\text{cm};$$

Substituant ces quantités dans les équations de la statique et l'équation de compatibilité des déplacements nous obtenons le système de trois équations suivant:

$$\sqrt{2}N_1=\sqrt{3}N_2,\quad \sqrt{3}N_2+N_3=P,\quad 14N_1+24N_2=21N_3.$$

La solution de ce système est:

$$N_1=\sigma_I F_1\approx 0{,}332P;\quad N_2=\sigma_{II}F_2\approx 0{,}27P;$$

$$N_3=\sigma_{III}F_3\approx 0{,}53P,$$

d'où

$$\sigma_I=\frac{0{,}332}{12}P\approx 0{,}0276P;\quad \sigma_{II}=\frac{0{,}27}{14}P\approx 0{,}0193P;$$

$$\sigma_{III}=\frac{0{,}53}{16}P\approx 0{,}0331P.$$

Puisque la valeur de la contrainte maximale σ_{III} ne doit pas dépasser la valeur admissible $[\sigma]$, la force admissible sera:

$$P\leqslant\frac{[\sigma]}{0{,}0331}=\frac{1\,600}{0{,}0331}\approx 48\,340\ \text{kgf}\approx 48{,}3\ \text{t}.$$

Avec cette valeur de la force P les valeurs des contraintes dans les barres du système seront:

$$\sigma_I=48{,}3\cdot27{,}6\approx 1\,334\ \text{kgf/cm}^2;\quad \sigma_{II}=48{,}3\cdot19{,}3\approx 932\ \text{kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{III}=1\,600\ \text{kgf/cm}^2.$$

b) *Calcul d'après la capacité portante.* Le système sera géométriquement déformable, lorsque l'état d'écoulement sera atteint dans la première et la troisième barre. L'équation de la statique, liant les efforts dans ces barres, est:

$$2N_1\sin\beta_1+2N_3\sin\beta_3=P.$$

En posant $N_1 = [\sigma]\, F_1$ et $N_3 = [\sigma]\, F_3$ et en les substituant dans les équations de la statique, nous obtiendrons la force maximale P_{max} :

$$P_{max} = 2[\sigma](F_1 \sin\beta_1 + F_3 \sin\beta_3) =$$

$$= 2 \cdot 1\,600\left(12\frac{\sqrt{2}}{2} + 16\frac{1}{2}\right) \approx 52\,750 \text{ kgf} = 52{,}75 \text{ t}.$$

Ainsi, la capacité de chargement du système par calcul d'après la capacité portante est plus grande que celle obtenue par calcul d'après la contrainte admissible (si l'on admet que les coefficients de sécurité sont les mêmes) :

$$\frac{P_{max} - P}{P} \cdot 100 =$$

$$= \frac{52{,}75 - 48{,}3}{48{,}3} \cdot 100 \approx 9{,}1\,\%.$$

c) *Détermination des contraintes dues à la température.* Les équations de la statique donnent (fig. 9,*a*) :

$$2N_1 \sin\beta_1 = 2N_2 \sin\beta_2;$$

$$2N_2 \sin\beta_2 = 2N_3 \sin\beta_3.$$

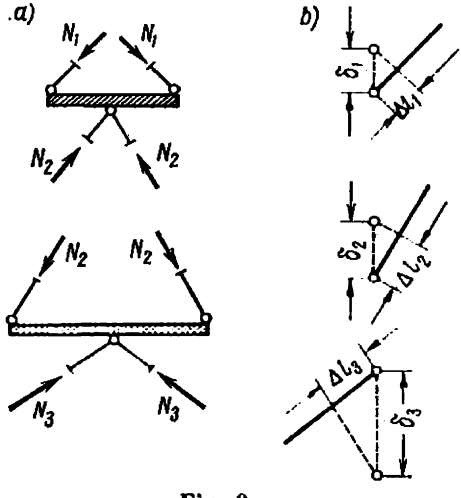


Fig. 9

La condition de compatibilité des déplacements (l'invariabilité de la hauteur du système) (fig. 9,*b*) est :

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.$$

Puisque: $\delta_1 = \dfrac{\Delta l_1}{\sin\beta_1}$, $\delta_2 = \dfrac{\Delta l_2}{\sin\beta_2}$, $\delta_3 = \dfrac{\Delta l_3}{\sin\beta_3}$,

$$\Delta l_1 = l_1\alpha_1\Delta t - \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad \Delta l_2 = l_2\alpha_2\Delta t - \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2},$$

$$\Delta l_3 = l_3\alpha_3\Delta t - \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3},$$

la condition de compatibilité des déplacements aura la forme :

$$\frac{a}{\sin^2\beta_1}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_1}{EF_1}\right) + \frac{b}{\sin^2\beta_2}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_2}{EF_2}\right) +$$

$$+ \frac{c}{\sin^2\beta_3}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_3}{EF_3}\right) = 0$$

En tenant compte de $N_1 = \sigma_I F_1$, $N_2 = \sigma_{II} F_2$, $N_3 = \sigma_{III} F_3$ et des valeurs numériques données, on réduit les équations de la statique et la condition de compatibilité des déplacements au système d'équations suivant :

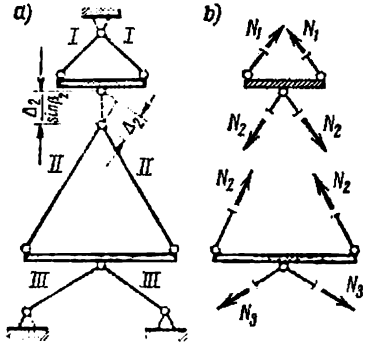


Fig. 10

$$6\sqrt{2}\sigma_I = 7\sqrt{3}\sigma_{II}$$

$$7\sqrt{3}\sigma_{II} = 8\sigma_{III}$$

$$\sigma_I + 2\sigma_{II} + 2\sigma_{III} = 5\,000.$$

Résolvant ce système, on obtient :

$$\sigma_I \approx 1\,105 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_{II} \approx 774 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{III} = 1\,172 \text{ kgf/cm}^2.$$

d) *Détermination des contraintes de montage* (fig. 10,*a*). Les équations de la statique donnent (fig. 10,*b*) :

$$2N_1 \sin\beta_1 = 2N_2 \sin\beta_2; \quad 2N_2 \sin\beta_2 = 2N_3 \sin\beta_3.$$

La condition de compatibilité est :

$$\frac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} + \frac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} + \frac{\Delta l_3}{\sin\beta_3} = \frac{\Delta_2}{\sin\beta_2}$$

ou

$$\frac{\sigma_I a}{\sin^2\beta_1} + \frac{\sigma_{II} b}{\sin^2\beta_2} + \frac{\sigma_{III} c}{\sin^2\beta_3} = E\frac{\Delta_2}{\sin^2\beta_2}.$$

Pour les valeurs numériques données les équations de la statique et la condition de compatibilité des déplacements se réduisent au système d'équations suivant :

$$6\sqrt{2}\sigma_I = 7\sqrt{3}\sigma_{II}; \quad 7\sqrt{3}\sigma_{II} = 8\sigma_{III}; \quad \sigma_I + 2\sigma_{II} + 2\sigma_{III} = 4\,000.$$

Résolvant ce système on obtient :

$$\sigma_I \approx 886 \text{ kgf/cm}^2; \quad \sigma_{II} \approx 620 \text{ kgf/cm}^2; \quad \sigma_{III} \approx 939 \text{ kgf/cm}^2.$$

Exemple 9. Un tube cylindrique en acier *I* de rayon intérieur $r_1 = 40$ mm et de rayon extérieur $R_1 = 42$ mm est revêtu d'un tube cylindrique en acier *II* chauffé de rayon intérieur $r_2 = 41{,}96$ mm et de rayon extérieur $R_2 = 43$ mm (fig. 11).

Déterminer la contrainte σ_I dans la paroi du tube *I* et la contrainte σ_{II} dans la paroi du tube *II*, provoquées par le refroidissement du tube extérieur.

Le module d'élasticité longitudinale du matériau des tubes est égal à $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2.

S o l u t i o n. Au lieu de tubes nous considérerons des anneaux de longueurs unitaires (cf. exemple 6). L'anneau *II* en se refroidissant exercera une pression extérieure uniforme radiale p sur l'anneau *I*, celui-ci, résistant à la déformation, exercera à son tour la même pression sur l'anneau *II*, mais de l'intérieur. La valeur de la pression p est déterminée par la condition suivant laquelle la somme des

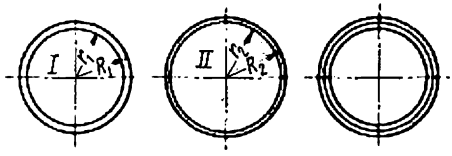


Fig. 11

variations du rayon extérieur ΔR_1 de l'anneau *I* et du rayon intérieur Δr_2 de l'anneau *II* doit être égale à la différence des valeurs initiales de ces rayons $R_1 - r_2$.

Puisque (cf. exemple 6):

$$\Delta R_1 = \frac{p}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} \text{ et } \Delta r_2 = \frac{p}{E} \cdot \frac{r_2^2}{R_2 - r_2},$$

la condition de compatibilité des déplacements sera:

$$\frac{p}{E}\left(\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2}\right) = R_1 - r_2,$$

d'où:

$$p = \frac{E(R_1 - r_2)}{\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2}} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}004}{\frac{4{,}2^2}{0{,}2} + \frac{4{,}196^2}{0{,}104}} \approx 31 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes normales σ_I et σ_{II} sont déterminées par les formules:

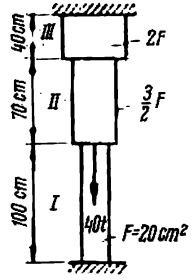
$$\sigma_I = \frac{pr_1}{R_1 - r_1} = \frac{31 \cdot 4{,}2}{0{,}2} = 651 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{II} = \frac{pr_2}{R_2 - r_2} = \frac{31 \cdot 4{,}196}{0{,}104} \approx 1\,250 \text{ kgf/cm}^2.$$

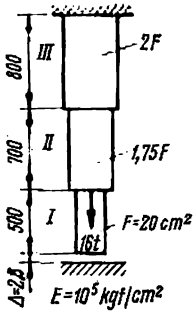
Problèmes 58-70. Déterminer les contraintes normales provoquées dans les barres élastiques du système par l'action des forces.

Si le module d'élasticité E n'est pas donné dans les conditions du problème, le considérer le même pour toutes les barres élastiques du système. Dans le problème 67 $F_2 = 2F_1$.

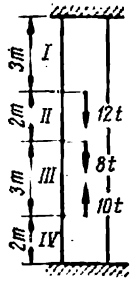
58



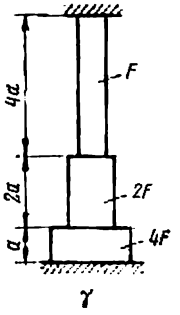
59



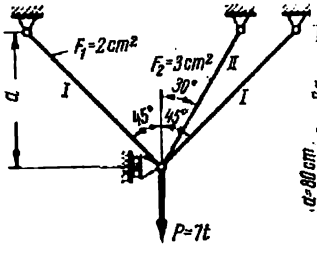
60



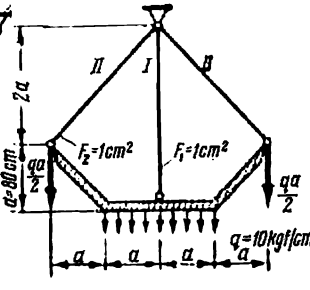
61



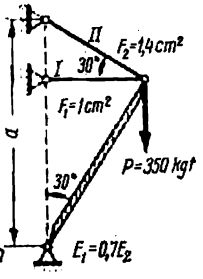
62



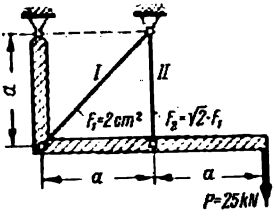
63



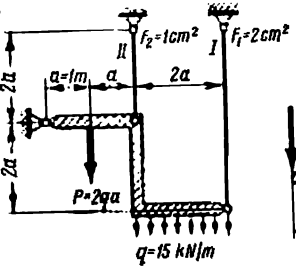
64



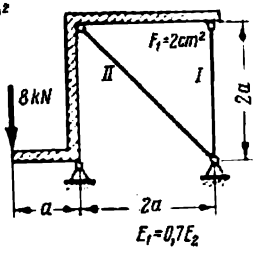
65



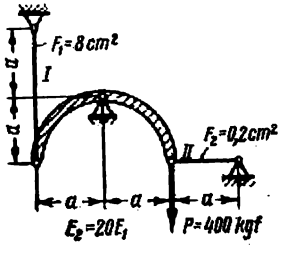
66



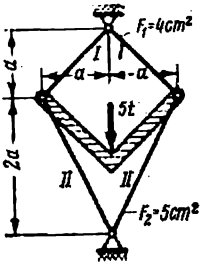
67



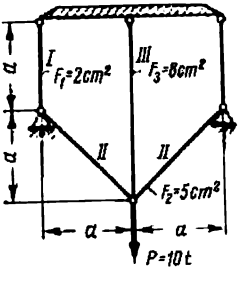
68



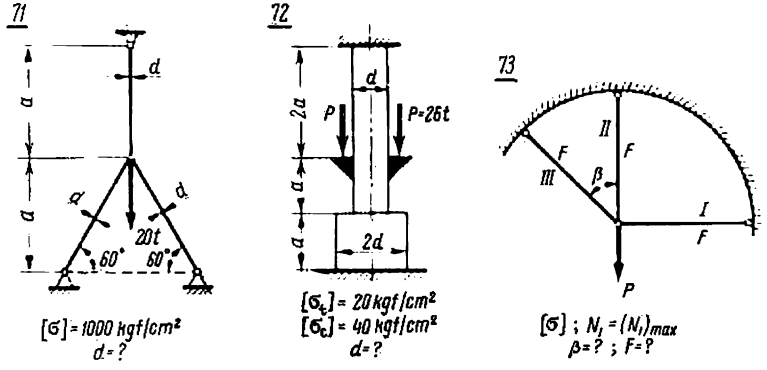
69



70

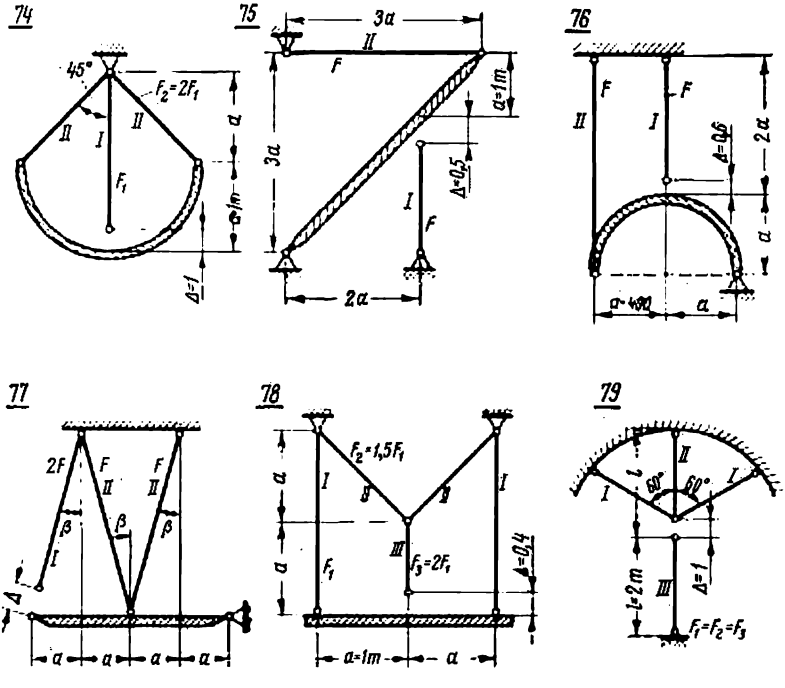


Problèmes 71-73. Calculer les dimensions des sections droites des barres du système assurant leurs résistances.



Problèmes 74-79. Déterminer les contraintes dues aux défauts de montage.

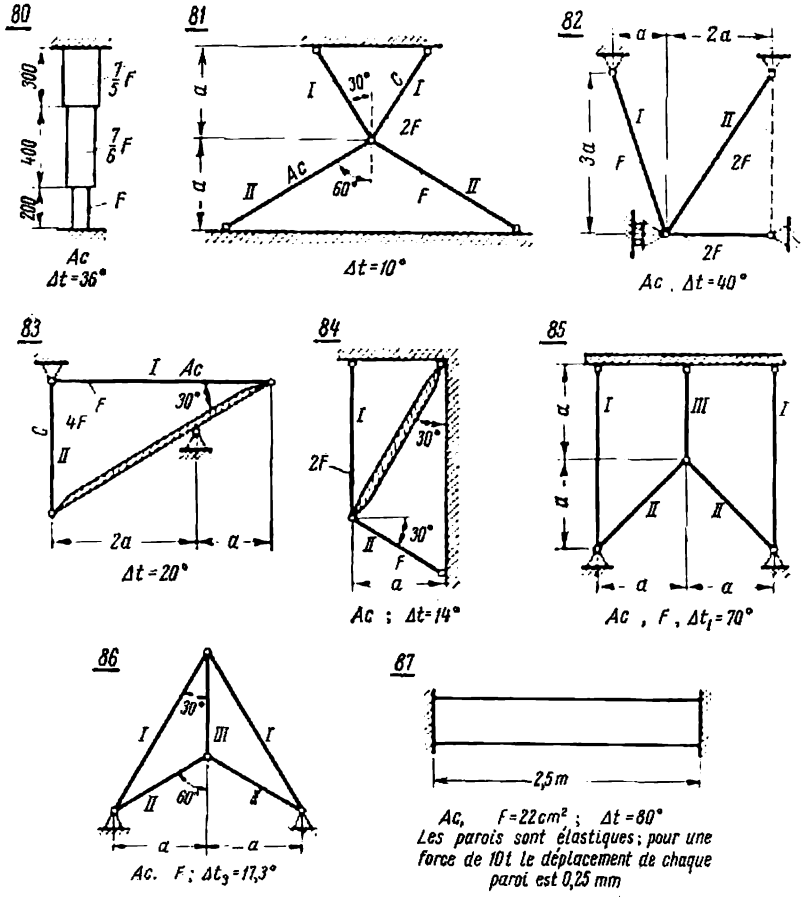
Δ est la grandeur linéique du défaut de fabrication de la barre élastique du système. Pour les barres on prendra : $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm² et dans les problèmes 78, 79 : $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m².



Problèmes 80-87. Déterminer les contraintes thermiques.

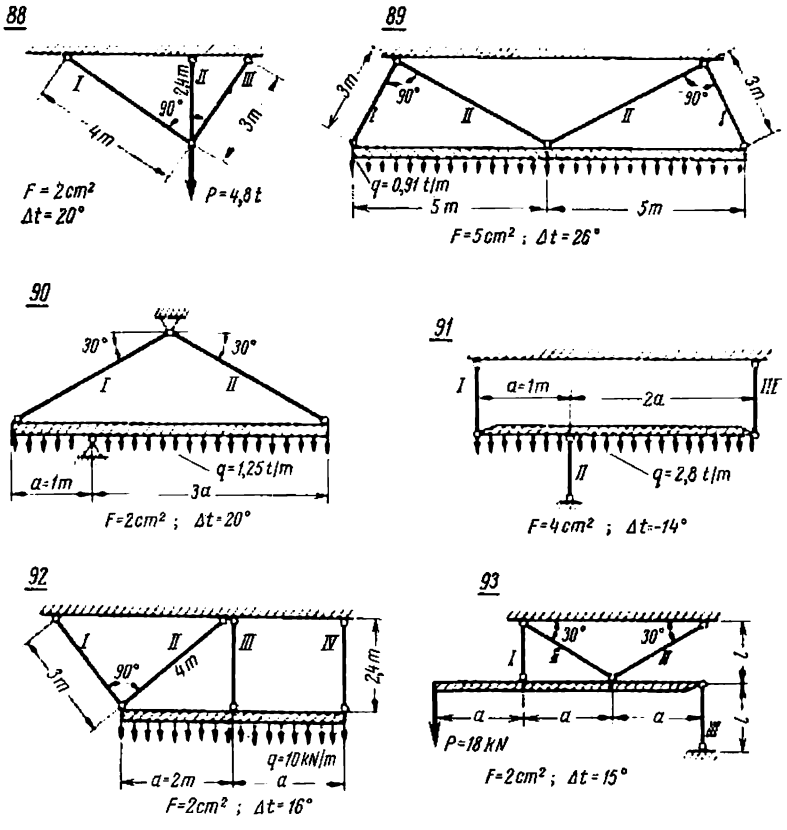
Notations: Δt est la variation de température de l'ensemble du système en degrés Celsius; Δt_i la variation de température de la i-ième barre du système; Ac acier, C cuivre.

Pour l'acier on prendra $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$; pour le cuivre $E = 1 \cdot 10^6$ kgf/cm^2; $\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$. Dans les problèmes 84, 86, 87 $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m^2 pour l'acier.



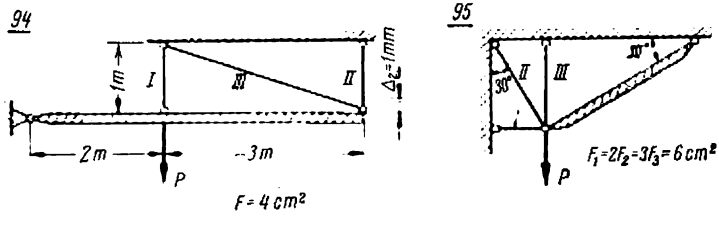
Problèmes 88-93. Calculer les contraintes provoquées par les forces appliquées et les contraintes dues aux variations de température.

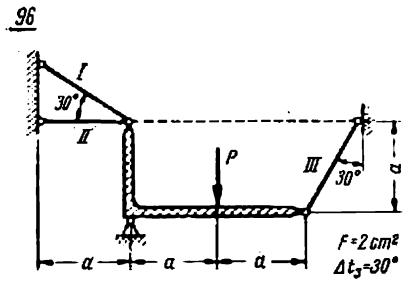
Notations: σ_{i_p} et σ_{i_t} sont respectivement les contraintes dans la i-ième barre dues aux forces appliquées et aux variations de température. Pour les barres on prendra: $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$; dans les problèmes 92, 93 $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m^2.

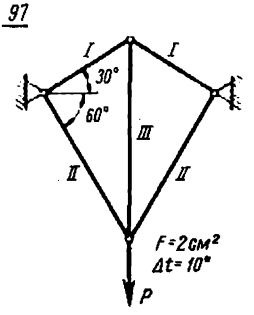


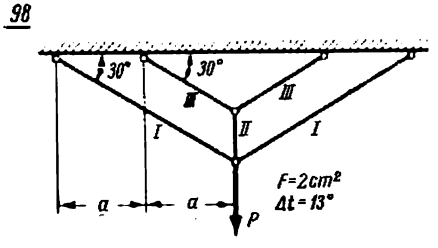
Problèmes 94-101. Déterminer les forces admissibles par le calcul d'après les contraintes admissibles $[P]$ et par le calcul d'après la capacité portante $[P']$; déterminer aussi les contraintes σ_{i_m} dues aux défauts de montage et les contraintes σ_{i_t} dues aux variations de température d'après les conditions indiquées sur les dessins.

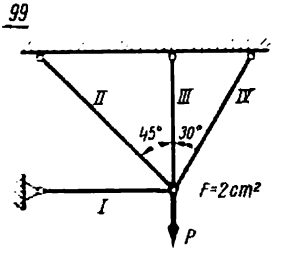
Pour le matériau des barres on prendra $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm², $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$. Dans les problèmes 99, 101 $[\sigma] = 160$ MN/m², $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m², $95\,\Delta t_1 = 10^6$.

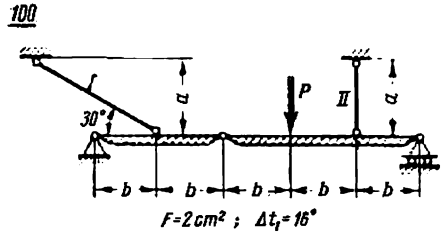


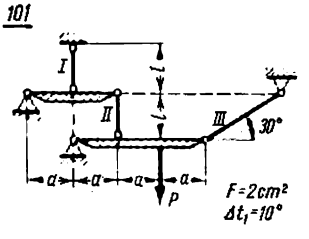












Problèmes 102-107. Déterminer les grandeurs inconnues des anneaux et des tubes à parois minces.

Notations: p est la pression sur l'aire, q l'intensité de la charge répartie entre la monture et l'anneau ou entre les anneaux.

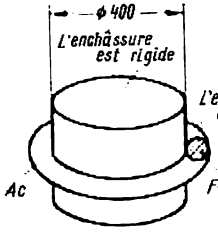
On prendra pour l'acier (Ac) $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2,

$\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$; pour le cuivre (C) $E = 1 \cdot 10^6$ kgf/cm^2,

$\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$; pour l'aluminium (Al) $E = 0{,}7 \cdot 10^6$ kgf/cm^2.

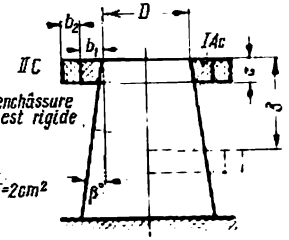
Dans les problèmes 106 et 107 déterminer σ sous condition qu'après abaissement de la température le jeu Δ disparaît.

102



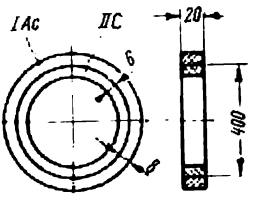
E; α; $\Delta t = -40°C$
$\sigma = ?$; $q = ?$

103



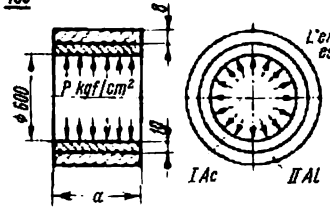
D; E_1; b_1; E_2; b_2; α;
$\sigma_I = ?$; $\sigma_{II} = ?$; $q = ?$

104



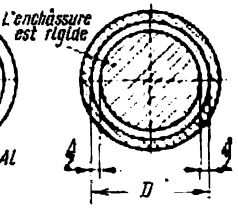
E_1 ; E_2 ; α_1 ; α_2
a) $\Delta t = 100°C$; $\sigma_I = ?$; $\sigma_{II} = ?$; $q = ?$
b) $[\sigma_I] = 1200$ kgf/cm²; $[\sigma_{II}] = 800$ kgf/cm²
$[\Delta t°] = ?$

105



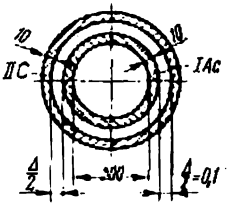
E_1; E_2; $[\sigma_I] = 1400$ kgf/cm²;
$[\sigma_{II}] = 1000$ kgf/cm²
$P = ?$

106



D; E ; α ; Δ ; Δt
$\sigma = ?$

107



E_1; E_2 ; α_1 ; α_2 ; Δt - 150°C
$\sigma_I = ?$; $\sigma_{II} = ?$

II. ÉTATS DE CONTRAINTE ET HYPOTHÈSES DE RÉSISTANCE

§ 1. Etats de contrainte linéique, plan et volumique

Dans l'état de contrainte tridimensionnel, il existe trois contraintes principales non nulles $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, agissant sur les faces de l'élément de volume, isolé autour du point considéré (fig. 12,*a*). Les aires sur lesquelles agissent les contraintes σ_1, σ_2 et σ_3 (et où

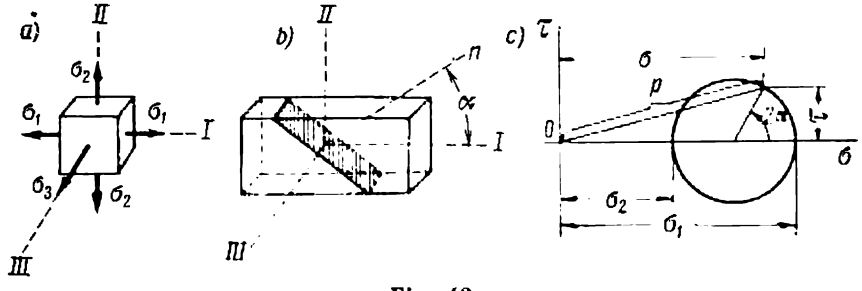


Fig. 12

les contraintes tangentielles sont nulles) s'appellent *aires principales de contrainte*. Les axes (*I*, *II*, *III*) perpendiculaires à ces aires s'appellent *axes principaux de contrainte*.

Les contraintes normales σ, tangentielles τ et les résultantes p des contraintes dans les plans inclinés des sections sont déterminées par les formules: dans les plans parallèles à l'axe *III* (fig. 12,*c*):

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \\ p &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha}, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

dans les plans parallèles à l'axe *II* (fig. 13,*a*):

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha, \\ p &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha}, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

dans les plans parallèles à l'axe I (fig. 14,*a*) :

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \sin^2\beta, \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta, \\ p &= \sqrt{\sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \sin^2\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Graphiquement, ces contraintes se déterminent à l'aide du cercle de Mohr, conformément aux constructions géométriques indiquées fig. 12,*c*, 13,*b*, 14,*b*. La forme générale du diagramme de Mohr s'obtient par superposition des trois diagrammes dessinés fig. 14,*c*.

Les valeurs extrémales des contraintes tangentielles sont :

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_2 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

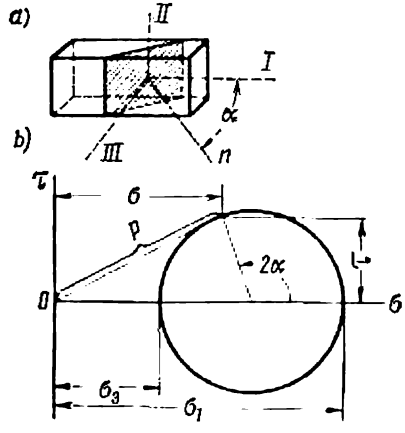


Fig. 13

Parmi ces contraintes, τ_2 est en valeur absolue maximale. Ces contraintes apparaissent dans les plans faisant un angle de 45° avec les directions des contraintes principales ; la contrainte τ_1

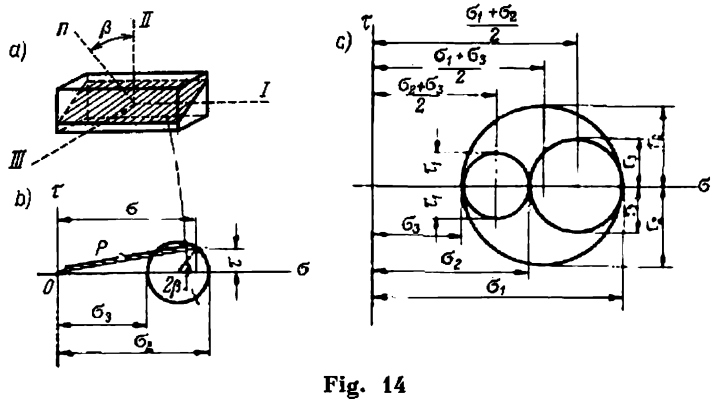


Fig. 14

agit dans deux plans rectangulaires parallèles à l'axe I (fig. 15,*a*) ; la contrainte τ_2 agit dans deux plans rectangulaires parallèles

à l'axe *II* (fig. 15,*b*) ; la contrainte τ_3 agit dans deux plans rectangulaires parallèles à l'axe *III* (fig. 15,*c*).

Les contraintes octaédriques normales σ_o, tangentielles τ_o et les résultantes p_o des contraintes dans une aire également inclinée

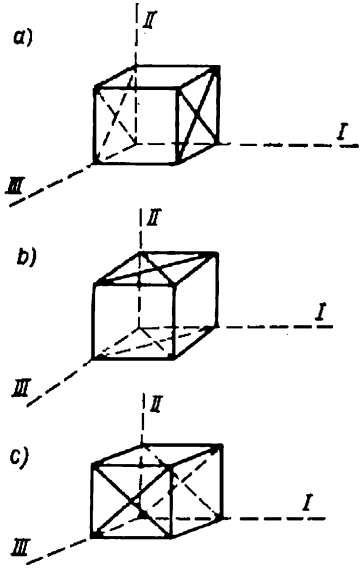


Fig. 15

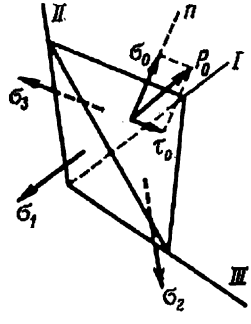


Fig. 16

aux trois axes principaux de l'état de contrainte (fig. 16) sont déterminées par les formules :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \tau_o &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \\ p_o &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Les valeurs des dilatations linéiques principales ε_1, ε_2, ε_3 (allongements relatifs dans les directions des contraintes principales) sont :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

La variation relative du volume sera:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \qquad (30)$$

La quantité $3\frac{1-2\mu}{E} = \varkappa$ est appelée *coefficient de compressibilité du matériau*, et la quantité inverse $\frac{E}{3(1-2\mu)} = K$ *module d'élasticité volumique du matériau.*

L'énergie potentielle spécifique de déformation élastique sera:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) =$$

$$= \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \qquad (31)$$

L'énergie potentielle spécifique de changement de forme:

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \qquad (32)$$

L'énergie potentielle spécifique de changement de volume:

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \qquad (33)$$

Toutes les formules relatives à l'état volumique de contrainte peuvent être appliquées à l'état de contrainte plan, si l'on prend l'une des contraintes principales normales égale à zéro, et à l'état de contrainte linéique, si l'on prend deux des contraintes principales normales égales à zéro.

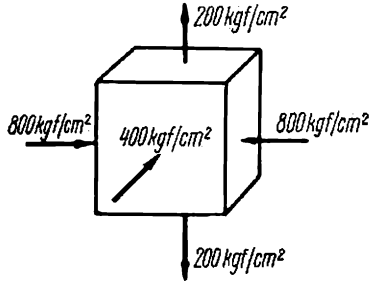


Fig. 17

Exemple 10. Etant donné l'état de contrainte indiqué fig. 17, déterminer analytiquement et graphiquement $\tau_{1,2,3}$, σ' et τ' dans le plan parallèle à l'axe *I* pour $\beta = 30°$; σ'' et τ'' dans le plan parallèle à l'axe *II* pour $\alpha = 60°$; σ''' et τ''' dans le plan parallèle à l'axe *III* pour $\alpha = 30°$; ainsi que

$$p_0,\ \sigma_0,\ \tau_0;\ \varepsilon_{1,2,3};\ \frac{\Delta V}{V};\ u,\ u_f,\ u_v.$$

On prendra $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\mu = 0{,}3$.

Solution. Les contraintes principales sont $\sigma_1 = 200$ kgf/cm², $\sigma_2 = -400$ kgf/cm² et $\sigma_3 = -800$ kgf/cm², donc, d'après les formu-

les (27) les contraintes extrémales tangentielles seront :

$$\tau_1 = \pm \frac{-400 + 800}{2} = \pm 200 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau_2 = \pm \frac{200 + 800}{2} = \pm 500 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau_3 = \pm \frac{200 + 400}{2} = \pm 300 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes σ' et τ' dans un plan parallèle à l'axe I pour $\beta = 30°$ sont calculées par les formules (26) :

$$\sigma' = -400 \cos^2 30° - 800 \sin^2 30° = -500 \text{ kgf/cm}^2.$$

$$\tau' = \frac{-400 + 800}{2} \sin 60° \approx 173 \text{ kgf/cm}^2.$$

A l'aide des formules (25), on détermine les valeurs des contraintes σ'' et τ'' dans un plan parallèle à l'axe II pour $\alpha = 60°$:

$$\sigma'' = 200 \cos^2 60° - 800 \sin^2 60° = -550 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau'' = \frac{200 + 800}{2} \sin 120° \approx 433 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes σ''' et τ''' dans un plan parallèle à l'axe III pour $\alpha = 30°$ sont déterminées d'après les formules (24) :

$$\sigma''' = 200 \cos^2 30° - 400 \sin^2 30° = 50 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau''' = \frac{200 + 400}{2} \sin 60° = 260 \text{ kgf/cm}^2.$$

La détermination graphique de toutes les contraintes est indiquée sur le diagramme de Mohr (fig. 18).

Les contraintes octaédriques sont déterminées par les formules (28) :

$$p_0 = 100 \sqrt{\frac{1}{3}(4 + 16 + 64)} \approx 529 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(200 - 400 - 800) \approx -333 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau_0 = \frac{100}{3} \sqrt{9 + 4 + 100} \approx 354 \text{ kgf/cm}^2.$$

On trouve les valeurs des dilatations linéiques principales d'après les formules (29):

$$\varepsilon_1 = \frac{100}{2 \cdot 10^6}(2 + 0{,}3 \cdot 1{,}2) = 2{,}8 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{100}{2 \cdot 10^6}(-4 + 0{,}3 \cdot 6) = -1{,}1 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{100}{2 \cdot 10^6}(-8 + 0{,}3 \cdot 2) = -3{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

La variation de volume sera d'après la formule (30):

$$\frac{\Delta V}{V} = 10^{-4}(2{,}8 - 1{,}1 - 3{,}7) = -2 \cdot 10^{-4}.$$

L'énergie potentielle spécifique de déformation élastique et l'énergie de changement de volume sont déterminées d'après les

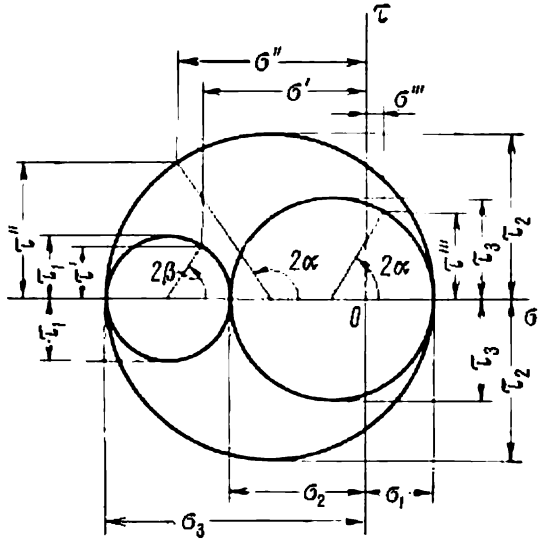


Fig. 18

formules (31) et (33):

$$u = 100 \cdot 10^{-4}\left(\frac{2 \cdot 2{,}8}{2} + \frac{4 \cdot 1{,}1}{2} + \frac{8 \cdot 3{,}7}{2}\right) = 19{,}8 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^3},$$

$$u_v = \frac{1 - 0{,}6}{6 \cdot 2 \cdot 10^6} \cdot 10^4 (2 - 4 - 8)^2 \approx 3{,}3 \cdot 10^{-2}\,\text{kgf} \cdot \text{cm/cm}^3.$$

L'énergie potentielle spécifique de changement de forme sera :

$$u_f = u - u_v = (19{,}8 - 3{,}3) \cdot 10^{-2} = 16{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ kgf} \cdot \text{cm/cm}^3.$$

Problèmes 108-122. Déterminer analytiquement et à l'aide du diagramme de Mohr :

1. Les contraintes extrémales tangentielles τ_1, τ_2, τ_3.
2. Les contraintes normales σ_α et tangentielles τ_α :

a) dans un plan parallèle à l'axe *I*, sa normale (au plan) faisant un angle $\beta = 30°$ avec l'axe *II* ;

b) dans un plan parallèle à l'axe *II*, sa normale faisant un angle $\alpha = 60°$ avec l'axe *I* ;

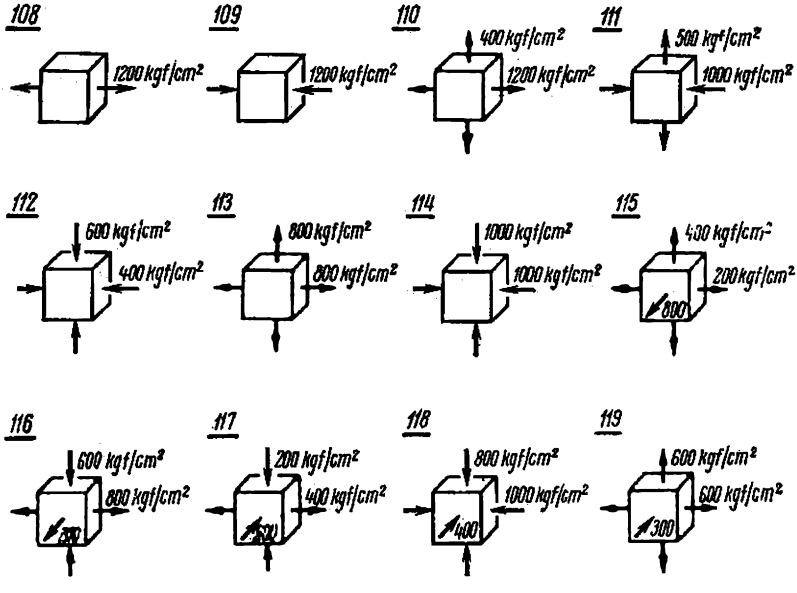
c) dans un plan parallèle à l'axe *III*, sa normale faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe *I*.

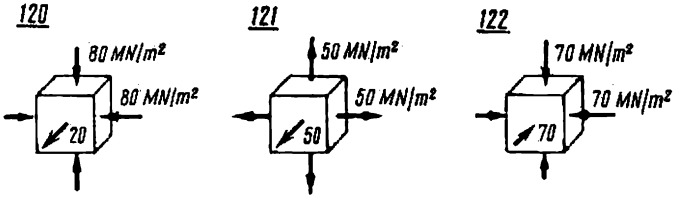
3. Les résultantes octaédriques p_0, les contraintes normales σ_0 et tangentielles τ_0.

Problèmes 108'-122'. Déterminer les dilatations linéiques principales ε_1, ε_2, ε_3 ; la variation relative de volume $\frac{\Delta V}{V}$; l'énergie potentielle spécifique de déformation élastique u et ses composantes relatives au changement de forme u_f et au changement de volume u_v.

Les états de contrainte sont ceux indiqués dans les problèmes 108-122.

On prendra : $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\mu = 0{,}3$; dans les problèmes 120, 121, 122 : $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m².





§ 2. Hypothèses de résistance et contraintes équivalentes

Dans les hypothèses de résistance, on suggère des critères qui déterminent la résistance de l'élément de matériau à l'état de contrainte composé. Conformément à ces critères, on établit des contraintes équivalentes ($\sigma_{éq}$), c'est-à-dire des contraintes de traction uniaxiale de l'élément de matériau de résistance égale à celle de l'élément qui se trouve à l'état de contrainte composé.

Indépendamment de l'hypothèse adoptée, la condition de résistance technique de l'élément du matériau, pour un état de contrainte arbitraire, est:

$$\sigma_{éq} \leqslant [\sigma_t]. \tag{34}$$

Pour un état de contrainte tridimensionnel de l'élément les contraintes équivalentes ont les valeurs suivantes: selon l'hypothèse des contraintes normales maximales:

$$\sigma_{éq_I} = \sigma_1 \text{ pour } \sigma_1 > 0^*, \tag{35}$$

selon l'hypothèse des dilatations linéiques maximales:

$$\sigma_{éq_{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3), \tag{36}$$

selon l'hypothèse des contraintes de cisaillement maximales:

$$\sigma_{éq_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3, \tag{37}$$

selon l'hypothèse de l'énergie potentielle spécifique de changement de forme:

$$\sigma_{éq_{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \tag{38}$$

selon l'hypothèse des états de contrainte limites:

$$\sigma_{éq_V} = \sigma_1 - \nu\sigma_3, \tag{39}$$

où:

$$\nu = [\sigma_t] / [\sigma_c]. \tag{40}$$

Exemple 11. Pour l'état de contrainte tridimensionnel (fig. 19) $\sigma_1 = 200$ kgf/cm², $\sigma_2 = -400$ kgf/cm², $\sigma_3 = -800$ kgf/cm² et $\mu = 0{,}3$.

* Parfois, dans la pratique, quand $|\sigma_3| > \sigma_1$, le calcul de résistance selon la 1re théorie s'effectue à l'aide des formules:

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma_t];\ |\sigma_3| \leqslant [\sigma_c].$$

Déterminer les contraintes équivalentes d'après toutes les hypothèses de résistance.

Pour la détermination de la contrainte équivalente d'après l'hypothèse de l'état de contrainte limite on prendra $\nu = 0{,}25$.

Solution.

$\sigma_{éq_I} = 200$ kgf/cm^2, $\sigma_{éq_{II}} = 200 + 0{,}3\,(400 + 800) = 560$ kgf/cm^2,

$\sigma_{éq_{III}} = 200 + 800 = 1\,000$ kgf/cm^2,

$$\sigma_{éq_{IV}} = 100\sqrt{\frac{1}{2}[(2+4)^2 + (-4+8)^2 + (-8-2)^2]} \approx$$

$$\approx 872 \text{ kgf/cm}^2,$$

$\sigma_{éq_V} = 200 + 0{,}25 \cdot 800 = 400$ kgf/cm^2.

Problèmes 108″-122″. Déterminer les valeurs des contraintes équivalentes d'après les hypothèses de résistance.

Considérer les états de contrainte indiqués dans les problèmes 108-122. On prendra $\mu = 0{,}3$. Pour la cinquième hypothèse, c'est-à-dire celle des états de contrainte limites, supposer $\nu = 0{,}5$.

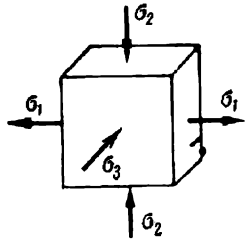


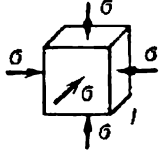
Fig. 19

Problèmes 123-127. Déterminer les quantités inconnues.

Notations: $\varkappa$ est le coefficient de compressibilité du matériau, K son module d'élasticité volumique, p l'intensité de la charge répartie sur l'aire. Dans tous les cas négliger le frottement.

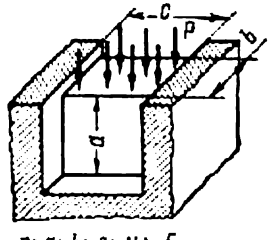
Dans le problème 123 on prendra pour l'acier: $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $\mu = 0{,}28$; pour le cuivre $E = 1 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $\mu = 0{,}34$; pour l'aluminium $E = 0{,}7 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $\mu = 0{,}33$.

123



a) Acier
b) Cuivre
c) Aluminium
$\varkappa = ?$; $K = ?$

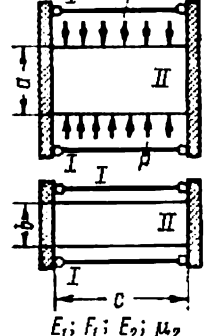
124



p; a; b; c; μ; E

$\sigma_{1,2,3} = ?$; $\Delta a = ?$; $\Delta b = ?$

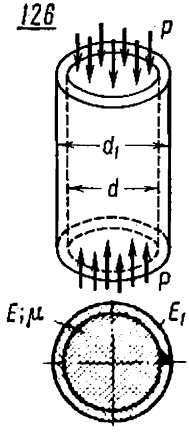
125



E_1; F_1; E_2; μ_2

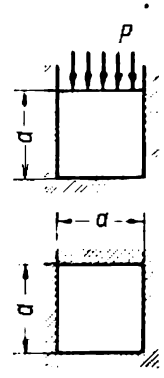
$\sigma_I = ?$; $(\sigma_{1,2,3})_{II} = ?$ $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{II} = ?$

126



Dans la barre :
$\sigma_1 = ?$; $\sigma_2 = ?$; $\sigma_3 = ?$

127



p; a; E; μ
$\sigma_{1,2,3} = ?$ $\Delta a = ?$
$U = ?$

III. RÉSERVOIRS À PAROIS MINCES

Pour calculer les réservoirs de révolution, soumis à une pression intérieure symétrique par rapport à un axe et dont les parois minces n'ont pas de changements brusques d'inclinaison ou de formes angulaires, on peut utiliser la théorie de membrane.

Selon cette théorie la condition d'équilibre d'un élément de paroi en un point considéré dégagé par des sections méridiennes

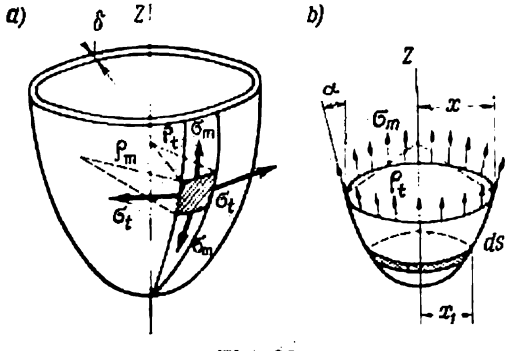


Fig. 20

et des sections perpendiculaires à celles-ci infiniment voisines (fig. 20,*a*) donne une équation (équation de Laplace) qui permet de déterminer les contraintes normales circonférentielle σ_t et méridienne σ_m :

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}, \tag{41}$$

où ρ_t et ρ_m sont les rayons de courbure des sections circonférentielle (annulaire) et méridienne de la paroi du réservoir au point considéré ;

p l'intensité de la pression intérieure qui est fonction seulement de z ;

δ l'épaisseur de la paroi du réservoir.

De la condition d'équilibre de la partie du réservoir dégagée par des sections perpendiculaires aux méridiens au niveau du point considéré (fig. 20,*b*), on obtient la seconde équation :

$$\sigma_m \delta x \cos\alpha = Z, \tag{42}$$

où x est le rayon de la circonférence de la section au niveau considéré,

α l'angle formé par l'axe des z et la tangente au méridien au même niveau, et

Z la somme des projections sur l'axe des z des forces agissant sur la partie tranchée du réservoir (Z est rapporté à l'arc de longueur égale au rayon):

$$Z = \int_0^x p x_1 \, dx_1. \tag{43}$$

L'abscisse x_1 est le rayon courant de la circonférence de la section droite du réservoir.

La résolution des équations (41) et (42) donne les valeurs suivantes pour les contraintes σ_t et σ_m:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho_t}{\delta} - \frac{Z}{\delta\rho_m \cos^2\alpha}, \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta\rho_t \cos^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Cas particuliers:

1. $\rho_m = \infty$, $\rho_t = \rho$ (réservoir à génératrice rectiligne)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho}{\delta}, \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta\rho\cos^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

2. $\rho_t = \rho_m = \rho$ (réservoir sphérique)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho}{\delta} - \frac{Z}{\delta\rho\cos^2\alpha}, \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta\rho\cos^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

a) $p = \text{const}$ (pression du gaz ou de la vapeur)

$$Z = \frac{px^2}{2} = \frac{1}{2} p\rho^2 \cos^2\alpha, \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho_t}{2\delta}\left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m}\right), \\ \sigma_m &= \frac{p\rho_t}{2\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Pour $\rho_m = \infty$ et $\rho_t = \rho$ $\quad \sigma_t = 2\sigma_m = \frac{p\rho}{\delta}$. (49)

Pour $\rho_t = \rho_m = \rho$ $\quad \sigma_t = \sigma_m = \frac{p\rho}{2\delta}$. (50)

b) $p = \gamma (h - z)$ (pression du fluide, fig. 21),

où γ est le poids spécifique du fluide, h la hauteur du fluide dans le réservoir, z l'ordonnée courante:

$$Z = \gamma \left(\frac{h\rho_t^2 \cos^2 \alpha}{2} - Z_1 \right). \tag{51}$$

La quantité

$$Z_1 = \int^x z x \, dx \tag{52}$$

est facile à calculer quand l'équation de la génératrice du réservoir $z = z(x)$ est connue.

Sur la surface intérieure de la paroi du réservoir la troisième contrainte normale principale $\sigma_r = -p$. Dans la majorité des cas elle est très petite par rapport aux contraintes σ_t et σ_m et peut être négligée dans le calcul de résistance.

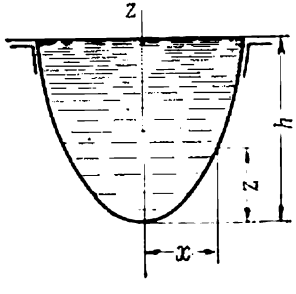
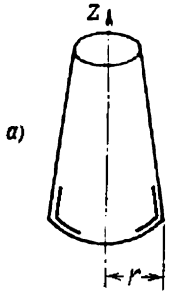


Fig. 21



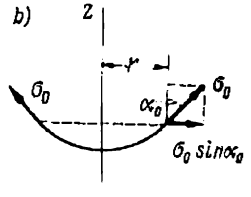


Fig. 22

Si la paroi du réservoir a un changement brusque d'inclinaison (fig. 22, *a*), des efforts locaux apparaissent dans la section de transition et provoquent une importante surtension; la théorie de membrane ne tient pas compte de ces surtensions. Pour diminuer l'influence de ces efforts, on fortifie souvent la section de jonction par un anneau d'épar.

Si la contrainte normale méridienne dans la section de jonction $\sigma_m = \sigma_0$ (fig. 22, *b*), l'effort courant dans l'épar sera:

$$q_0 = \sigma_0 \delta \sin \alpha_0. \tag{53}$$

L'aire nécessaire F de l'anneau d'épar de rayon r peut être calculée par la formule:

$$F = \frac{q_0 r}{[\sigma]} = \frac{\sigma_0 \delta r \sin \alpha_0}{[\sigma]}. \tag{54}$$

Exemple 12. Déterminer δ et F. On prendra: $\gamma = 1{,}2$ gf/cm^3; $h_1 = 4$ m; $r = 1$ m; $\alpha = 60°$, $[\sigma] = 1\,000$ kgf/cm^2 (fig. 23).

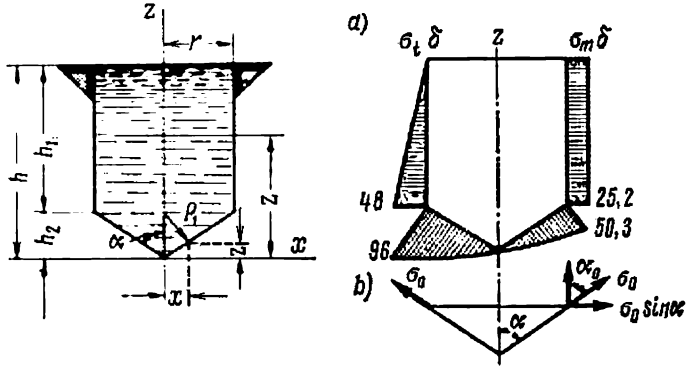


Fig. 23

S o l u t i o n. Pour la partie conique du réservoir ($0 \leqslant z \leqslant h_2$) nous avons $\rho_m = \infty$:

$$\rho_t = \rho = \frac{x}{\cos \alpha}, \quad z = x \operatorname{cotg} \alpha, \quad p = \gamma (h - z) = \gamma (h - x \operatorname{cotg} \alpha).$$

D'après la formule (52):

$$Z_1 = \operatorname{cotg} \alpha \int_0^x x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{cotg} \alpha.$$

La formule (51) donne le poids du liquide contenu dans le volume de la partie tranchée du réservoir:

$$Z = \gamma \left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \operatorname{cotg} \alpha \right) = \gamma x^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \operatorname{cotg} \alpha \right).$$

Les valeurs des contraintes normales circonférentielle σ_t et méridienne σ_m aux points de la paroi de la partie conique du réservoir à un niveau arbitraire défini par la coordonnée x, sont données par

les formules (45):

$$\sigma_t = \frac{\gamma (h - x \operatorname{cotg} \alpha) x}{\delta \cos \alpha} = \frac{\gamma x}{\delta} \left(\frac{h}{\cos \alpha} - \frac{x}{\sin \alpha} \right),$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma x^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \operatorname{cotg} \alpha \right)}{\delta x \cos \alpha} = \frac{\gamma x}{\delta} \left(\frac{h}{2 \cos \alpha} - \frac{x}{3 \sin \alpha} \right).$$

Comme

$$h = h_1 + r \operatorname{cotg} \alpha \text{ et } \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{h_1}{\cos \alpha} + \frac{r}{\sin \alpha},$$

nous avons:

$$\sigma_{t_{x=0}} = 0, \quad \sigma_{m_{x=0}} = 0, \quad \sigma_{t_{x=r}} = \frac{\gamma r}{\delta} \left(\frac{h}{\cos \alpha} - \frac{r}{\sin \alpha} \right) =$$

$$= \frac{\gamma r h_1}{\delta \cos \alpha}, \quad \sigma_{m_{x=r}} = \frac{\gamma r}{2\delta} \left(\frac{h}{\cos \alpha} + \frac{r}{3 \sin \alpha} \right).$$

Pour les valeurs numériques données nous aurons:

$$\sigma_{t_{x=r}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2}{\delta} = \frac{96}{\delta} \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_{m_{x=r}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2\delta} \left(\frac{4 \cdot 10^2 \cdot 2}{1} + \frac{10^2 \cdot 2}{3\sqrt{3}} \right) \approx \frac{50{,}3}{\delta} \text{ kgf/cm}^2.$$

Pour la partie cylindrique du réservoir ($h_2 \leqslant z \leqslant h$),

$$\rho_m = \infty, \quad \rho_t = \rho = r, \quad p = \gamma (h - z), \quad \alpha = 0$$

et Z est égale à Z de la partie conique pour $x = r$, c'est-à-dire:

$$Z = Z_{x=r} = \gamma r^2 \left(\frac{n}{2} - \frac{r}{3} \operatorname{cotg} \alpha \right).$$

Les valeurs des contraintes normales circonférentielle σ_t et méridienne σ_m aux points de la paroi de la partie cylindrique du réservoir sont données par les formules (43):

$$\sigma_t = \frac{\gamma r}{\delta} (h - z),$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma r}{2\delta} \left(h - \frac{2}{3} r \operatorname{cotg} \alpha \right) = \frac{\gamma r}{2\delta} \left(h_1 + \frac{h_2}{3} \right) =$$

$$= \frac{\gamma r}{2\delta}\left(h_1 + \frac{r}{3}\operatorname{cotg}\alpha\right),$$

$$\sigma_{t_{z=h_2}} = \frac{\gamma r}{\delta} h_1, \quad \sigma_{t_{z=h}} = 0, \quad \sigma_m = \text{const}.$$

Pour les valeurs numériques données nous aurons:

$$\sigma_{t_{z=h_2}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2}{\delta} = \frac{48}{\delta} \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_m = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2\delta}\left(4 \cdot 10^2 + \frac{10^2}{3} \cdot 0{,}577\right) \approx \frac{25{,}2}{\delta} \text{ kgf/cm}^2.$$

Les diagrammes des contraintes σ_t et σ_m sont donnés sur la fig. 23, *a*.

La section dangereuse est la section supérieure de la partie conique du réservoir où $\sigma_t = \frac{96}{\delta}$ et $\sigma_m = \frac{50{,}3}{\delta}$.

A l'aide de la troisième hypothèse de résistance on détermine l'épaisseur δ de la paroi du réservoir. En supposant $\sigma_r = 0$, nous aurons la formule de calcul:

$$\sigma_t = \frac{96}{\delta} = [\sigma]$$

D'où $\delta = \frac{96}{[\sigma]} = \frac{96}{1\,000} = 0{,}096 \text{ cm} = 0{,}96 \text{ mm}.$

Nous prendrons $\delta = 1$ mm.

Dans la section de jonction des parties conique et cylindrique (fig. 23, *b*)

$$\sigma_0 = \sigma_m = 503 \text{ kgf/cm}^2.$$

Comme $\alpha_0 = \alpha = 60°$, l'aire F de l'anneau d'épar sera, d'après la formule (52):

$$F = \frac{503 \cdot 0{,}1 \cdot 10^2 \cdot 0{,}87}{10^3} \approx 4{,}4 \text{ cm}^2.$$

Les valeurs trouvées pour δ et F doivent être vérifiées en pratique d'après les considérations constructives et la condition de déversement de l'anneau d'épar.

Problèmes 128-133. Déterminer les quantités inconnues.

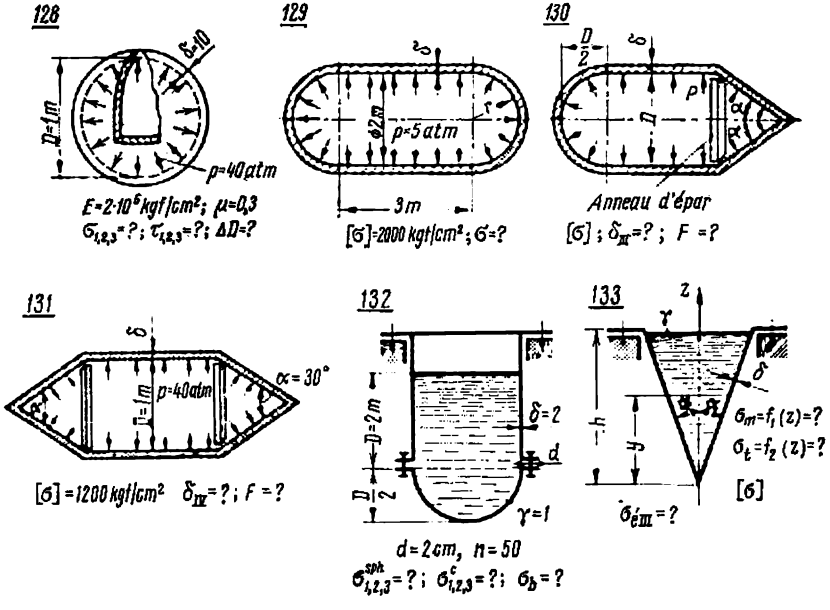
Notations: p est la pression intérieure du gaz, γ le poids spécifique du fluide, δ l'épaisseur de la paroi (δ_{III} selon la troisième hypothèse de résistance, δ_{IV} d'après la quatrième hypothèse),

F_a l'aire de la section droite de l'anneau d'épar, d le diamètre d'un boulon, n le nombre de boulons, $\sigma^s_{1,2,3}$ les contraintes principales au point le plus dangereux de la partie sphérique du réservoir, $\sigma^c_{1,2,3}$ les mêmes contraintes dans la partie cylindrique.

Calculer par la théorie de membrane.

Dans le problème 133 étudier et construire les diagrammes de la contrainte méridienne σ_m et de la contrainte σ_t perpendiculaire à celle-ci, ainsi que de la contrainte équivalente selon la troisième hypothèse de résistance $\sigma_{éqIII}$ en fonction de la coordonnée z.

Ecrire les conditions de résistance.



IV. CISAILLEMENT PUR

L'état de contrainte dans lequel sur les faces de l'élément dégagé agissent seulement des contraintes tangentielles s'appelle *cisaillement pur*. Dans un cisaillement pur il se produit un déplacement linéique de deux faces parallèles d'un élément d'un corps l'une par rapport à l'autre. La valeur du déplacement linéique (fig. 24) s'appelle *glissement absolu*.

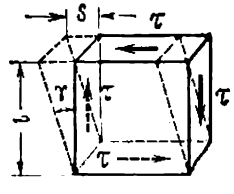


Fig. 24

Le rapport du glissement absolu s à la distance l entre les faces glissantes :

$$\frac{s}{l} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \qquad (55)$$

s'appelle *glissement relatif* ou *déformation angulaire*.

Les déformations angulaires γ_1, γ_2, γ_3 (les angles par lesquels varient les angles droits entre deux plans d'action des contraintes extrémales de cisaillement de mêmes grandeurs mais de signes contraires) sont déterminées d'après la loi de Hooke. Elles sont égales respectivement à :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \frac{\tau_1}{G}, \\ \gamma_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{\tau_2}{G}, \\ \gamma_3 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\tau_3}{G}, \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

où :

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (57)$$

est le module de cisaillement ou le module d'élasticité transversale du matériau.

Le glissement relatif γ_0 dû à la contrainte octaédrique tangentielle τ_0 s'appelle *glissement relatif octaédrique*. Il est

égal à:

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G} = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}. \tag{58}$$

Dans l'état de contrainte de cisaillement pur (fig. 25) les contraintes principales dans les plans inclinés à 45° sont:

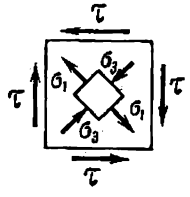


Fig. 25

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \tag{59}$$

les dilatations linéiques principales sont:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \varepsilon = \frac{1+\mu}{E}\tau, \\ \varepsilon_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

et la déformation angulaire principale:

$$\gamma = 2\varepsilon. \tag{61}$$

Le centre du cercle de Mohr est à l'origine des coordonnées (fig. 26).

Si les contraintes tangentielles sont réparties uniformément sur l'aire F (fig. 27), l'effort tangentiel sera:

$$Q = \tau F. \tag{62}$$

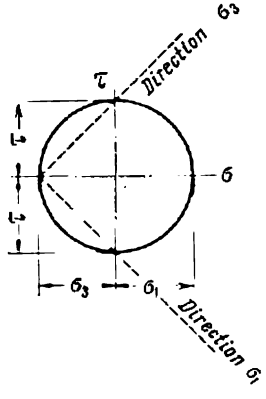


Fig. 26

Les formules (55) et (56) permettent d'écrire la loi de Hooke

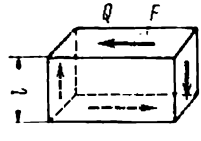


Fig. 27

pour le cisaillement sous la forme suivante:

$$\Delta s = \frac{Ql}{GF}. \tag{63}$$

L'énergie potentielle de déformation élastique de cisaillement sera:

$$U = \frac{Q^2 l}{2GF} = \frac{\Delta s^2 GF}{2l} = \frac{Q\Delta s}{2}. \tag{64}$$

Pour l'énergie potentielle spécifique de cisaillement on aura:

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{65}$$

Exemple 13. Pour l'état de contrainte donné (fig. 28) déterminer $\gamma_{1,2,3}$ et γ_0 en supposant $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m^2 et $\mu = 0{,}25$.

Solution. Pour l'état de contrainte tridimensionnel donné les contraintes principales sont: $\sigma_1 = 100$ MN/m^2, $\sigma_2 = -20$ MN/m^2, $\sigma_3 = -40$ MN/m^2.

Les contraintes extrémales tangentielles, selon les formules (27), sont égales à:

$$\tau_1 = \frac{-20+40}{2} = 10 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{100+40}{2} = 70 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_3 = \frac{100+20}{2} = 60 \text{ MN/m}^2.$$

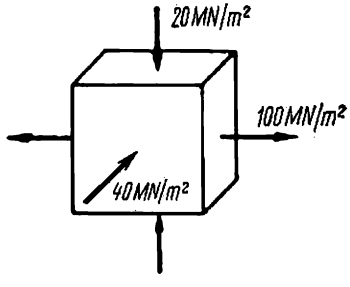


Fig. 28

La valeur du module d'élasticité transversale du matériau, d'après la formule (57), est:

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0{,}25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2.$$

Les expressions (56) donnent les valeurs des déformations angulaires principales:

$$\gamma_1 = \frac{10}{8 \cdot 10^4} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_2 = \frac{70}{8 \cdot 10^4} = 8{,}75 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_3 = \frac{60}{8 \cdot 10^4} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$$

La déformation angulaire octaédrique est donnée par la formule (58):

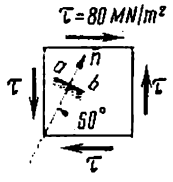
$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \sqrt{1{,}25^2 + 8{,}75^2 + 7{,}5^2} \approx 7{,}72 \cdot 10^{-4}.$$

Problèmes 134-140. Déterminer les quantités inconnues indiquées dans les conditions.

Notations: $\sigma_{éc}$ est la limite d'écoulement, $n_{éc}$ le coefficient de sécurité, $(M_t)_{éc}$ la valeur du moment correspondant à l'état d'écoulement du matériau.

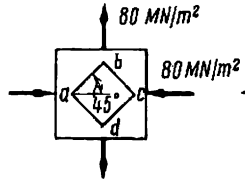
On négligera la flexion et on supposera que les contraintes tangentielles sont uniformément réparties suivant l'épaisseur des tubes.

134



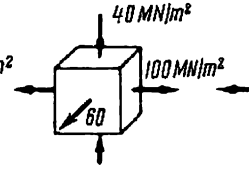
$\sigma_{ab}=?;\ \tau_{ab}=?$

135



$\sigma=?;\ \tau=?$ sur ab et bc

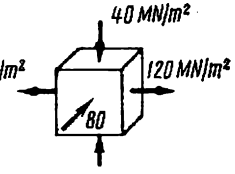
136



$E=2{,}08\cdot10^5\ MN/m^2,\ \mu=0{,}3$

$\tau_{1,2,3}=?;\ \gamma_{1,2,3}=?$

137

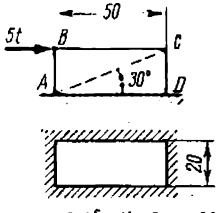


$G=8\cdot10^4\ MN/m^2$

$\tau_{1,2,3}=?;\ \tau_0=?$

$\gamma_{1,2,3}=?;\ \gamma_0=?$

138

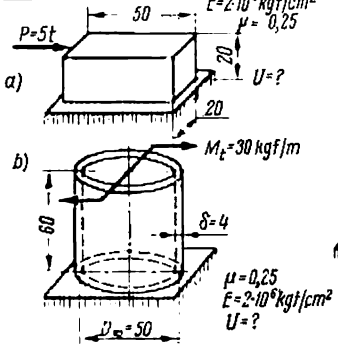


$E=2\cdot10^6\ kgf/cm^2;\ \mu=0{,}3$

$\sigma_1=?;\ \sigma_2=?;\ \sigma_3=?$

$\gamma=?;\ \varepsilon_{AC}=?$

139

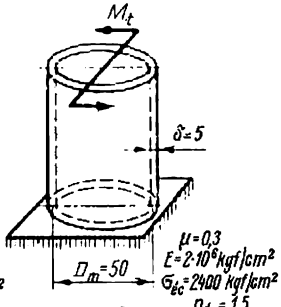


$\mu=0{,}25$

$E=2\cdot10^6\ kgf/cm^2$

$U=?$

140



$\mu=0{,}3$

$E=2\cdot10^6\ kgf/cm^2$

$\sigma_{éc}=2400\ kgf/cm^2$

$n_{éc}=1{,}5$

$\sigma_{1,2,3}=?$

$[M_t]=?;\ [M_t]_{éc}=?$

V. CALCUL D'ASSEMBLAGES SIMPLES D'ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTIONS

Dans différents assemblages de constructions (assemblages boulonnés, clavetés, rivetés, soudés, dans les entailles à bois, etc.) les éléments d'assemblage sont soumis dans différents plans à la traction, ou à la compression, au cisaillement ou au matage. Pratiquement le cisaillement pur n'a jamais lieu, s'il y a traction ou compression pure. Le cisaillement pur est toujours accompagné soit d'une flexion, soit d'une traction ou d'une compression; c'est pourquoi dans les plans de cisaillement, hormis les contraintes tangentielles, nous trouvons encore des contraintes normales. Mais comme les valeurs de ces contraintes normales sont petites devant les contraintes tangentielles, pratiquement on effectue un calcul de cisaillement. En général, on suppose que les contraintes tangentielles sont réparties uniformément dans l'aire de la section de cisaillement. Les erreurs commises sont compensées par la valeur de la contrainte tangentielle admissible $[\tau]$.

Le matage est une compression locale (superficielle) entre deux éléments pressés l'un contre l'autre. La loi exacte de répartition des pressions sur la surface écrasée n'étant pas connue, pour simplifier les calculs techniques on suppose par convention que la pression est uniformément répartie non sur la surface écrasée, mais sur l'aire (F_{mat}), qui est la projection de la surface écrasée sur un plan perpendiculaire à la direction de la force de pression (P_{mat}). Cette erreur est prise en considération dans la valeur de la contrainte de matage admissible $[\sigma_{mat}]$.

Pour une utilisation rationnelle du matériau, le calcul d'un joint doit être effectué d'après la condition d'égale résistance des éléments du joint. Pour cela on utilise les formules suivantes:

1) pour la traction ou compression:

$$F \geqslant \frac{N}{[\sigma]}; \tag{66}$$

2) pour le cisaillement:

$$F_{cis} \geqslant \frac{Q}{[\tau]}; \tag{67}$$

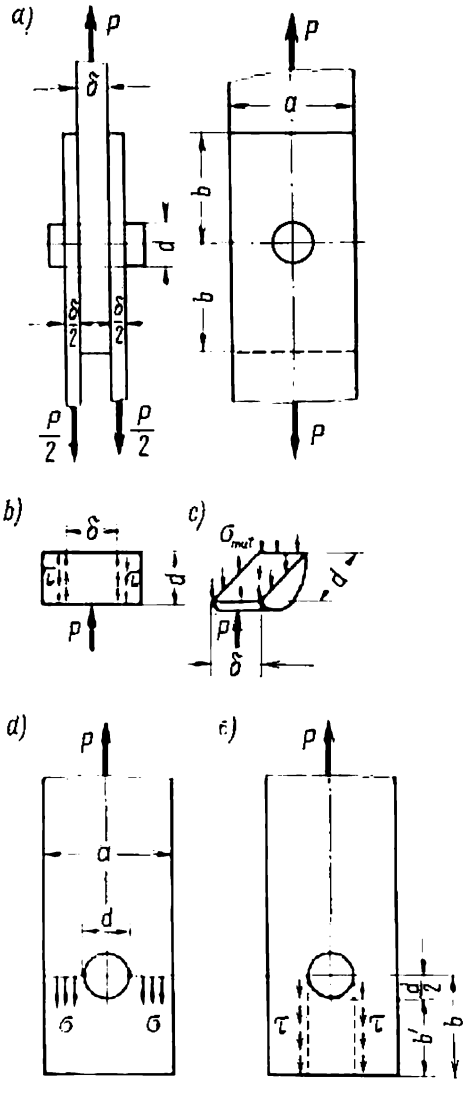


Fig. 29

3) pour le matage:

$$F_{mat} \geqslant \frac{P_{mat}}{[\sigma_{mat}]}. \qquad (68)$$

Les aires figurant dans ces formules sont des aires netto, c'est-à-dire les aires des sections considérées, diminuées des sections des différents trous, rainures, gorges, etc.

Si l'aire d'une même section a été calculée et pour le cisaillement et par la condition de non-matage, on prend la valeur maximale obtenue pour cette aire.

Pratiquement il n'est pas toujours possible de vérifier la condition d'égale résistance des éléments d'un joint, car il faut aussi tenir compte de considérations supplémentaires d'ordre constructif. Elles sont exposées dans les manuels d'éléments de machines, de constructions métalliques et en bois.

Exemple 14. Déterminer d, δ, a et b (fig. 29, *a*). On prendra: $P = 4$ t; $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2, $[\tau] = 1\,200$ kgf/cm^2, $[\sigma_{mat}] = 3\,200$ kgf/cm^2.

Solution. 1. On détermine le diamètre de l'axe d d'après la condition de résistance au cisaillement (fig. 29,*b*):

$$2\frac{\pi d^2}{4} \geqslant \frac{P}{[\tau]}; \quad d \geqslant \sqrt{\frac{2P}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12 \cdot 10^2}} \approx 1{,}46 \text{ cm}.$$

2. La détermination de l'épaisseur de la tôle δ se fait d'après

la condition de non-matage (fig. 29,*c*) :

$$\delta d \geqslant \frac{P}{[\sigma_{mat}]}; \quad \delta \geqslant \frac{P}{d[\sigma_{mat}]} = \frac{4 \cdot 10^3}{1{,}46 \cdot 32 \cdot 10^2} \approx 0{,}86 \text{ cm}.$$

3. La largeur de la plaque a est calculée d'après la condition de rupture (fig. 29,*d*) :

$$(a - d)\delta \geqslant \frac{P}{[\sigma]}; \quad a = \frac{P}{\delta[\sigma]} + d = \frac{4 \cdot 10^3}{0{,}86 \cdot 16 \cdot 10^2} + 1{,}46 \approx 2{,}92 \text{ cm}.$$

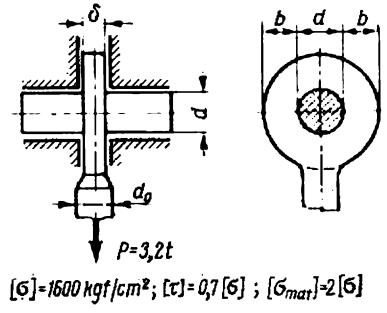
4. La détermination de la longueur b de l'extrémité de la plaque se fait d'après la condition de cisaillement (fig. 29,*e*):

$$2b'\delta \geqslant \frac{P}{[\tau]}; \quad b' = \frac{P}{2\delta[\tau]} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}86 \cdot 12 \cdot 10^2} \approx 1{,}94 \text{ cm}.$$

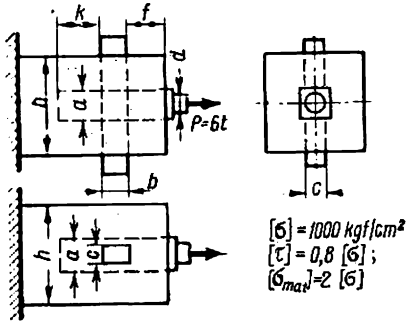
$$\text{D'où } b = b + \frac{d}{2} = 1{,}94 + 0{,}73 = 2{,}67 \text{ cm}.$$

Problèmes 141-149. Calculer toutes les dimensions inconnues des éléments des joints.

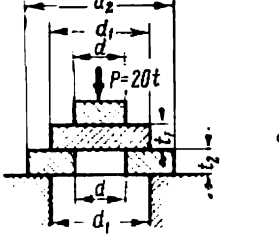
141



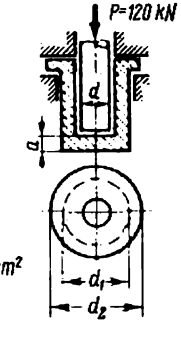
142



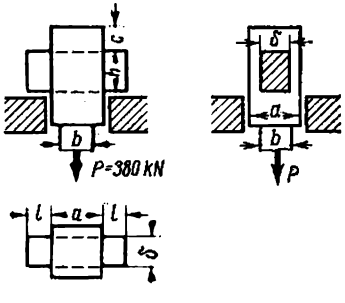
143

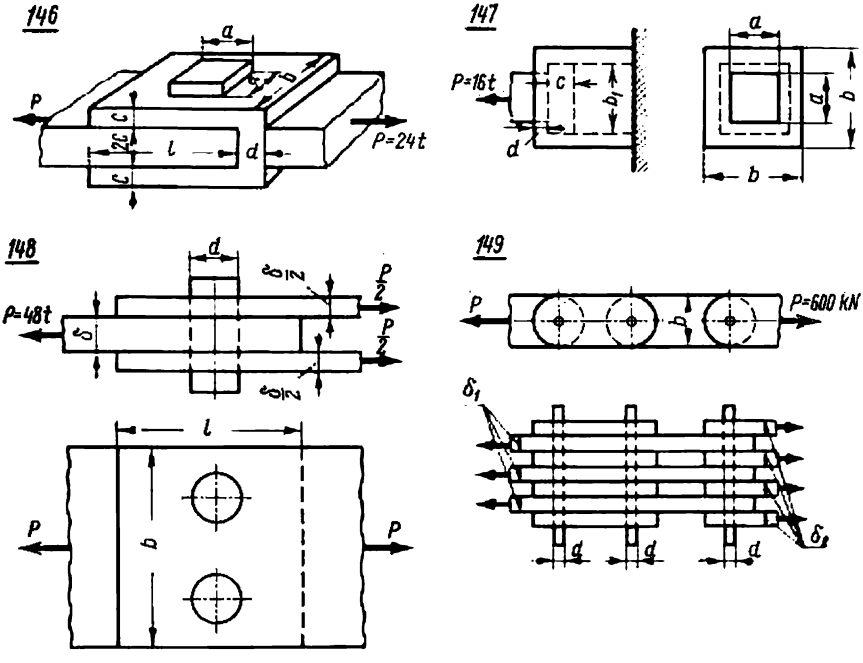


144



145





Effectuer le calcul d'après la condition d'égale résistance. Dans les problèmes 146-148, on prendra : $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2 ; $[\tau] = 1\,200$ kgf/cm^2 ; $[\sigma_{mat}] = 3\,200$ kgf/cm^2 ; dans les problèmes 144, 145, 149 : $[\sigma] = 160$ MN/m^2, $[\tau] = 120$ MN/m^2 ; $[\sigma_{mat}] = 320$ MN/m^2.

VI. LES CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES FIGURES PLANES

§ 1. Les aires et leurs moments statiques

On appelle moments statiques de l'aire d'une figure par rapport aux axes z et y (fig. 30) les intégrales définies:

$$\left.\begin{aligned} S_z &= \int_F y\,dF, \\ S_y &= \int_F z\,dF, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

où F est l'aire de la figure, dF l'élément de cette figure, z et y les coordonnées de cet élément.

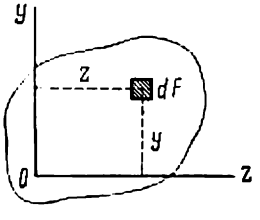


Fig. 30

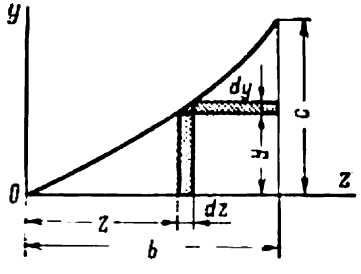


Fig. 31

Les coordonnées du centre de gravité de la figure z_c et y_c se déterminent par les formules:

$$\left.\begin{aligned} z_c &= \frac{S_y}{F}, \\ y_c &= \frac{S_z}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Les moments statiques de l'aire d'une figure par rapport aux axes centraux sont nuls.

Exemple 15. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire de la figure limitée par des segments de droites b, c et par la parabole $y = az^n$ (fig. 31).

Solution. L'élément d'aire de la figure $dF = y\,dz = az^n dz$; l'aire de la figure sera donc:

$$F = \int_F dF = a\int_0^b z^n\,dz = \frac{ab^{n+1}}{n+1} = \frac{bc}{n+1}.$$

D'après la formule (69) le moment statique de l'aire F par rapport à l'axe y sera:

$$S = \int_F z\,dF = a\int_0^b z^{n+1}\,dz = \frac{ab^{n+2}}{n+2} = \frac{b^2c}{n+2}.$$

Pour déterminer le moment statique de l'aire de la figure par rapport à l'axe z considérons l'élément d'aire:

$$dF = (b-z)\,dy = an\,(b-z)\,z^{n-1}\,dz.$$

D'après la formule (69) on a alors:

$$S_z = \int_F y\,dF = a^2n\int_0^b z^{2n-1}(b-z)\,dz = a^2nb^{2n+1}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

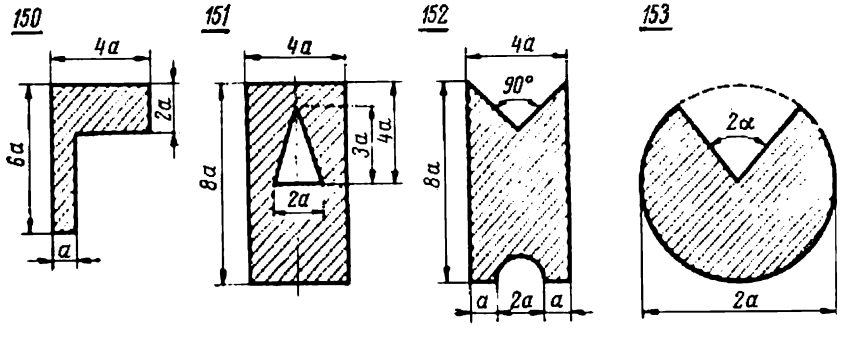
$$= \frac{a^2b^{2n+1}}{2(2n+1)} = \frac{bc^2}{2(2n+1)}$$

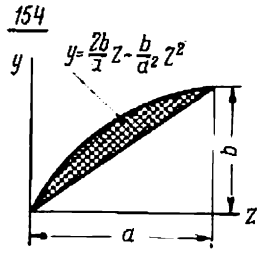
Les expressions (70) donnent les valeurs des coordonnées du centre de gravité de la figure:

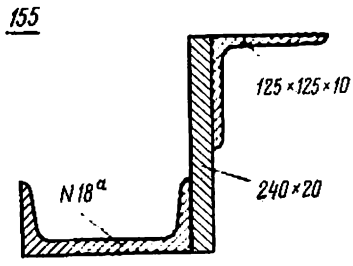
$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{b^2c\,(n+1)}{(n+2)\,bc} = \frac{n+1}{n+2}\,b,$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{bc^2}{2(2n+1)} \cdot \frac{n+1}{bc} = \frac{n+1}{2(2n+1)}\,c.$$

Problèmes 150-155. Déterminer la position du centre de gravité des figures.







§ 2. Moments d'inertie de l'aire d'une figure

On appelle moments d'inertie de l'aire d'une figure (fig. 32) les intégrales définies:

$$\left.\begin{aligned} I_z &= \int_F y^2\,dF, \\ I_y &= \int_F z^2\,dF, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

où I_z et I_y sont les moments d'inertie *axiaux de l'aire de la figure par rapport à l'axe z et à l'axe y*; l'intégrale définie

$$I_{yz} = \int_F yz\,dF \tag{72}$$

est appelée produit d'inertie de l'aire de la figure par rapport aux deux axes rectangulaires z et y; et l'intégrale définie

$$I_p = \int_F \rho^2\,dF = I_y + I_z \tag{73}$$

le moment d'inertie polaire de l'aire de la figure par rapport à l'origine des coordonnées O.

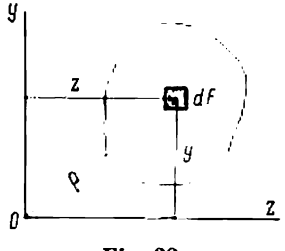


Fig. 32

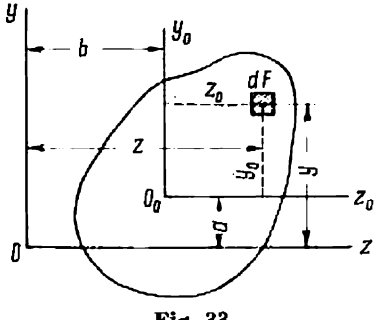


Fig. 33

Les relations entre les moments d'inertie par rapport à deux systèmes d'axes parallèles, dont l'un ($z_0O_0y_0$) est un système d'axes

centraux (fig. 33), sont :

$$\left.\begin{aligned} I_z &= I_{z_0} + a^2F, \\ I_y &= I_{y_0} + b^2F, \\ I_{yz} &= I_{y_0z_0} + abF, \\ I_p &= I_{p_0} + (a^2 + b^2)\,F. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Les moments d'inertie par rapport à deux systèmes d'axes dont l'un se déduit de l'autre par une rotation sont liés par les relations (fig. 34) :

$$\left.\begin{aligned} I_u &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha, \\ I_v &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha, \\ I_{uv} &= \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha, \\ I_{pu} &= I_{pyz}. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

La position des axes principaux d'inertie d'une figure plane, c'est-à-dire de deux axes rectangulaires par rapport auxquels le produit d'inertie de l'aire de la figure est nul, est donnée par l'équation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \tag{76}$$

Les moments d'inertie principaux de l'aire d'une figure, c'est-à-dire les moments d'inertie axiaux, calculés par rapport aux axes principaux d'inertie, prennent les valeurs extrémales suivantes :

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}. \tag{77}$$

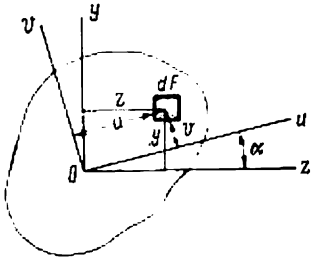


Fig. 34

Si $I_{yz} < 0$, l'axe principal par rapport auquel le moment d'inertie est maximal passe par les quadrants *I* et *III*.

Si $I_{yz} > 0$, l'axe principal par rapport auquel le moment d'inertie est maximal passe par les quadrants *II* et *IV*.

Les axes principaux, passant par le centre de gravité de l'aire de la figure, s'appellent *axes principaux centraux*, et les moments d'inertie par rapport à ces axes, *moments principaux centraux d'inertie*.

Les quantités positives:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}; \quad i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}}; \quad \text{etc.}, \qquad (78)$$

sont les *rayons de giration d'une figure plane par rapport à l'axe correspondant.*

L'ellipse définie par l'équation:

$$\frac{z^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_z^2} = 1 \qquad (79)$$

s'appelle *ellipse d'inertie de la figure.* Les axes y et z sont les axes principaux d'inertie de la figure. En général, l'ellipse d'inertie est construite par rapport aux axes principaux centraux de la figure plane.

L'axe de symétrie d'une figure plane est l'axe principal d'inertie de cette figure. Tout axe perpendiculaire à l'axe de symétrie est le second axe principal d'inertie de la figure pour le point d'intersection de ces axes.

Si la figure plane a au moins deux axes de symétrie non rectangulaires, tous les axes passant par le centre de gravité de la figure sont les axes principaux d'inertie de cette figure. Les moments d'inertie axiaux de l'aire de cette figure calculés par rapport à ces axes sont égaux.

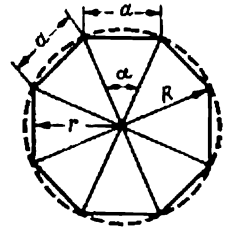


Fig. 35

Exemple 16. Pour le polygone régulier de n côtés de longueur a (fig. 35) déterminer les moments d'inertie principaux centraux, le moment d'inertie polaire et construire l'ellipse d'inertie.

Solution. L'angle au centre correspondant au côté a est:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

Le rayon de la circonférence circonscrite:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Le rayon de la circonférence inscrite:

$$r = R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Considérons le triangle ayant pour angle au sommet α (fig. 36,*a*); et trouvons pour ce triangle les moments d'inertie axiaux I'_u, I'_v et le moment d'inertie polaire I'_p.

L'aire d'une bande élémentaire de hauteur dv est :

$$dF = a_1\, dv = \frac{a}{r}\, v\, dv.$$

Le moment d'inertie axial de l'aire du triangle par rapport à l'axe u sera :

$$I'_u = \int_F v^2\, dF = \frac{a}{r} \int_0^r v^3\, dv = \frac{ar^3}{4}.$$

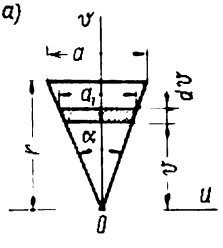
L'aire d'une bande élémentaire de hauteur du est (fig. 36,b) :

$$dF = r_1\, du = \frac{r}{a}\,(a - 2u)\, du.$$

Le moment d'inertie axial de l'aire du triangle par rapport à l'axe v sera :

$$I'_v = 2 \int_{F/2} u^2\, dF = 2\,\frac{r}{a} \int_0^{a/2} u^2\,(a - 2u)\, du = \frac{a^3 r}{48}$$

Le moment d'inertie polaire de l'aire du triangle par rapport au point O est :



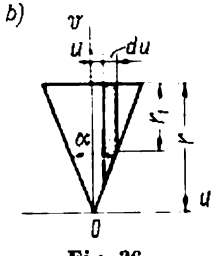


Fig. 36

$$I'_p = I'_u + I'_v = \frac{ar^3}{4} + \frac{a^3 r}{48} =$$

$$= \frac{2R \sin\frac{\alpha}{2}\, R^3 \cos^3\frac{\alpha}{2}}{4} +$$

$$+ \frac{8R^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}\, R\cos\frac{\alpha}{2}}{48} =$$

$$= \frac{R^4}{6} \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \left(3\cos^2\frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R^4}{12} \sin\alpha\,(2 + \cos\alpha).$$

Puisque tous les triangles dont se compose le polygone de n côtés sont égaux et ont un sommet commun O, le moment d'inertie polaire de l'aire de tout le polygone de n côtés par rapport au point O sera :

$$I_p = nI'_p = \frac{nR^4}{12} \sin\alpha\,(\cos\alpha + 2) = \frac{\pi R^4}{6\alpha} \sin\alpha\,(\cos\alpha + 2).$$

Un polygone régulier de n côtés a au moins deux axes de symétrie non rectangulaires; c'est pourquoi tous les axes centraux sont des axes principaux d'inertie, et les moments d'inertie de l'aire du polygone par rapport à ces axes sont égaux entre eux et égaux à I, d'où:

$$I = \frac{1}{2} I_p = \frac{nR^4}{24} \sin\alpha (\cos\alpha + 2) = \frac{\pi R^4}{12\alpha} \sin\alpha (\cos\alpha + 2).$$

Comme l'aire du polygone de n côtés est:

$$F = \frac{nar}{2} = \frac{n}{2} 2R^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{n}{2} R^2 \sin\alpha,$$

les rayons principaux de giration du polygone seront:

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \frac{R}{2\sqrt{3}} \sqrt{2 + \cos\alpha}.$$

L'ellipse d'inertie est la circonférence décrite par ce rayon.

Exemple 17. Construire l'ellipse centrale d'inertie de la figure composée, fig. 37.

Solution. Rapportons la figure, dessinée à l'échelle (fig. 38) au système d'axes zy parallèles aux côtés du contour de la figure.

Rapportons chaque partie de la figure (la cornière *1*, la partie en U *2*, le rectangle *3*) aux axes centraux $z_i y_i$ parallèles aux axes zy. Nous déterminons le centre de gravité du rectangle et nous prenons les coordonnées des centres de gravité de la cornière $z_0 = 2{,}02$ cm et de la section en U $z_0 = 2{,}46$ cm, du catalogue de l'assortiment pour l'acier laminé.

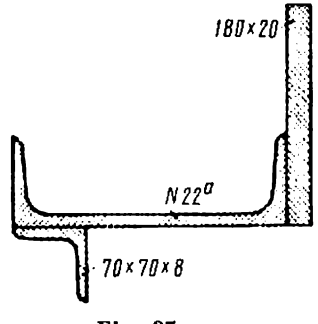


Fig. 37

Il est plus commode de présenter la suite des calculs sous forme de table. On détermine aisément toutes les quantités se rapportant au rectangle; les quantités nécessaires pour la cornière et la section en U, on les prend du catalogue de l'assortiment. Par exemple, pour une cornière équilatérale de dimensions $70 \times 70 \times 8$ mm, d'après le catalogue de l'assortiment, on aura $F_1 = 10{,}7$ cm^2, pour la section en U N° 22, $F_2 = 28{,}8$ cm^2, et pour le rectangle $F_3 = 18 \times 2 = 36$ cm^2. Les coordonnées des centres de gravité de chaque partie dans le système d'axes yz sont:

pour la cornière $z_1 = y_1 = 7 - 2{,}02 = 4{,}98$ cm;

pour la section en U $z_2 = 11$ cm, $y_2 = 7 + 2{,}46 = 9{,}46$ cm;

pour le rectangle $z_3 = 22 + 1 = 23$ cm, $y_3 = 7 + 9 = 16$ cm.

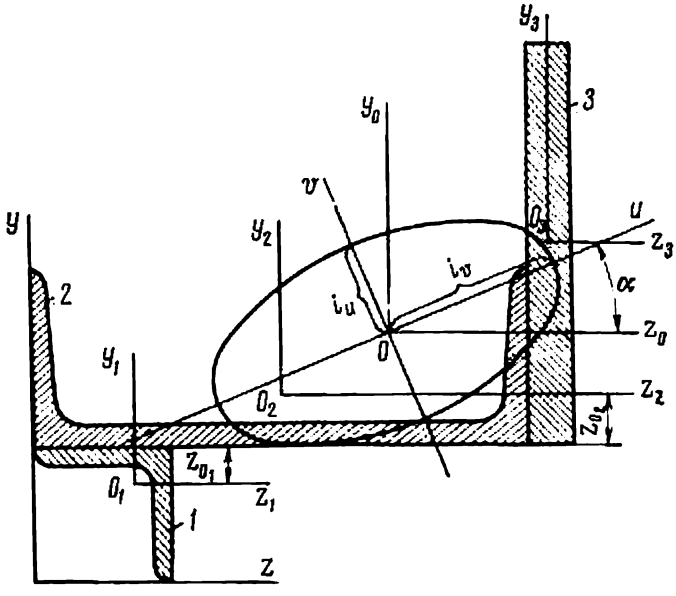


Fig. 38

1. La détermination des coordonnées du centre de gravité de la figure dans le système d'axes zy.

Numéros des parties	Aires des parties F_i, cm²	Coordonnées du centre de gravité des parties dans le système d'axes zy, cm		Moments statiques des parties par rapport aux axes z, y, cm³	
		z_i	y_i	$S_{zi} = F_i y_i$	$S_{yi} = F_i z_i$
1	10,7	4,98	4,98	53,4	53,4
2	28,8	11	9,46	272,4	316,8
3	36	23	16	576	828
	75,5			901,8	1198,2
	aire de toute la figure			Pour l'aire de toute la figure	

Les coordonnées du centre de gravité de la figure sont:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{1198{,}2}{75{,}5} \approx 15{,}87\text{ cm}; \quad y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{901{,}8}{75{,}5} \approx 11{,}94\text{ cm}.$$

Rapportons la figure aux axes centraux z_0y_0 parallèles aux axes zy.

Déterminons les coordonnées des centres de gravité des parties de la figure z_{0_i} et y_{0_i} dans le système d'axes z_0y_0:

pour la cornière nous aurons:

$z_{01} = 4{,}98 - 15{,}87 = -10{,}89$ cm,

$y_{01} = 4{,}98 - 11{,}94 = -6{,}96$ cm;

pour la section en U:

$z_{02} = 11 - 15{,}87 = -4{,}87$ cm,

$y_{02} = 9{,}46 - 11{,}94 = -2{,}48$ cm;

pour le rectangle:

$z_{03} = 23 - 15{,}87 = 7{,}13$ cm,

$y_{03} = 16 - 11{,}94 = 4{,}06$ cm.

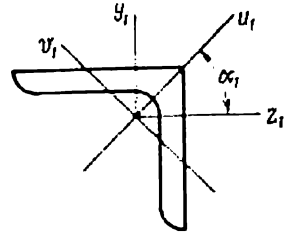


Fig. 39

Trouvons les moments d'inertie des parties de la figure par rapport à leurs axes centraux z_iy_i.

Pour la cornière (fig. 39), conformément au catalogue de l'assortiment, nous aurons:

$$I_{z_1} = I_{y_1} = 48{,}2\text{ cm}^4.$$

D'après les formules de changement d'axes par rotation nous déterminons:

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_{u_1} - I_{v_1}}{2} \sin 2(-45°) = \frac{76{,}4 - 20}{2}(-1) = -28{,}2\text{ cm}^4.$$

Comme u_1 est l'axe de symétrie de la cornière, les axes u_1v_1 sont ses axes principaux d'inertie, et, par conséquent, $I_{u_1v_1} = 0$. Les valeurs $I_{u_1} = 76{,}4$ cm^4 et $I_{v_1} = 20$ cm^4 sont données dans le catalogue de l'assortiment.

Pour la section en U nous avons du catalogue de l'assortiment:

$$I_{z_2} = 187\text{ cm}^4; \quad I_{y_2} = 2\,330\text{ cm}^4, \quad I_{z_2y_2} = 0,$$

puisque z_2, y_2 sont les axes principaux d'inertie.

Pour le rectangle, nous avons:

$$I_{z_3} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972\text{ cm}^4; \quad I_{y_3} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} = 12\text{ cm}^4; \quad I_{z_3y_3} = 0.$$

2. Détermination des moments d'inertie de la figure par rapport aux axes z_0y_0.

Numéros des parties	F_i	z_{0i}	y_{0i}	I_{z_i}	I_{y_i}	$I_{z_i y_i}$	$F_i z_{0i}^2$	$F_i y_{0i}^2$	$F_i z_{0i} y_{0i}$	$I_{z_0} = I_{z_i} + F_i y_{0i}^2$	$I_{y_0i} = I_{y_i} + F_i z_{0i}^2$	$I_{z_0 y_0} = I_{z_i y_i} + F_i z_{0i} y_{0i}$
	cm²	cm		cm⁴								
1	10,7	−10,89	−6,96	48,2	48,2	−28,2	1269	518,3	811	566,4	1317,2	782,8
2	28,8	−4,87	−2,48	187	2330	0	683	177,1	347,8	364,1	3013	347,8
3	36	7,13	4,06	972	12	0	1830	593,3	1042	1565,3	1842	1042
										2496	6172	2173
										pour l'aire de toute la figure		

3. Détermination de la position des axes principaux centraux d'inertie uv de la figure.

D'après la formule (76):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{z_0 y_0}}{I_{y_0} - I_{z_0}} = \frac{2 \cdot 2\,173}{6\,172 - 2\,496} = 1{,}182.$$

A l'aide de la table trigonométrique nous trouvons $2\alpha = 49°61'$ et, par conséquent, $\alpha = 24°53'$.

Comme $\alpha > 0$, nous le rapportons à partir de l'axe z dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Nous menons les axes principaux centraux d'inertie u et v de la figure.

Puisque $I_{z_0 y_0} > 0$, l'axe par rapport auquel le moment d'inertie est maximal, c'est-à-dire l'axe v, passe par les quadrants *II* et *IV*.

4. Détermination des valeurs des moments d'inertie principaux centraux de la figure.

Suivant la formule (77) nous avons:

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = I_{\substack{v \\ u}} = \frac{I_{z_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{z_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{z_0 y_0}^2} =$$

$$= \frac{2\,496 + 6\,172}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2\,496 - 6\,172)^2 + 4 \cdot 2\,173^2} =$$

$$= 4\,334 \pm 2\,848 \text{ cm}^4.$$

Par conséquent:

$$I_{\max} = I_v = 7\,180 \text{ cm}^4; \quad I_{\min} = I_u = 1\,488 \text{ cm}^4.$$

5. *Détermination des rayons de giration principaux de la figure et construction de l'ellipse centrale d'inertie.*

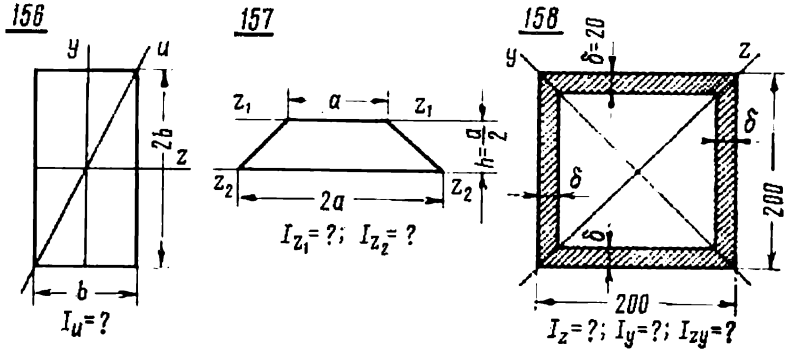
D'après les formules (78) les valeurs des rayons de giration seront :

$$i_{\max} = i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}} = \sqrt{\frac{7\,180}{75{,}5}} \approx 9{,}75 \text{ cm},$$

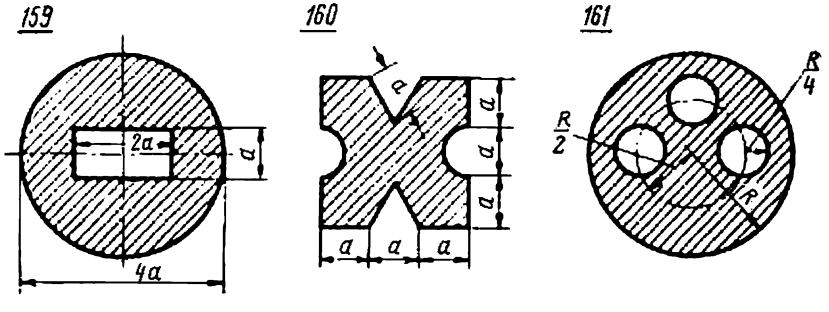
$$i_{\min} = i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} = \sqrt{\frac{1\,488}{75{,}5}} \approx 4{,}44 \text{ cm}.$$

Comme l'équation de l'ellipse d'inertie est : $\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1$, les demi-axes de l'ellipse d'inertie sont les rayons de giration i_u pour l'axe v et i_v pour l'axe u. En rapportant les valeurs i_u et i_v ainsi trouvées sur le dessin nous construisons l'ellipse d'inertie (fig. 38).

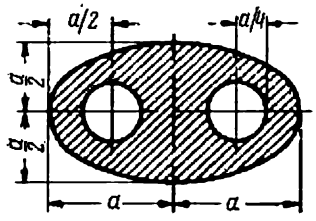
Problèmes 156-158. Déterminer les moments d'inertie des figures par rapport aux axes indiqués dans les conditions données.



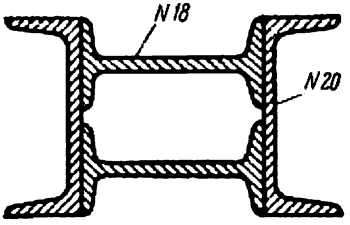
Problèmes 159-163. Déterminer les moments principaux centraux d'inertie.



162



163



VII. LA TORSION

§ 1. Moment de torsion

Le moment de torsion se détermine par la méthode des sections. La valeur du moment de torsion M_t dans une section droite arbitraire de la barre est égale à la somme algébrique des moments de tous les couples extérieurs (concentrés M et distribués suivant la longueur d'intensité m), agissant autour de l'axe géométrique de la barre et appliqués à l'une des parties isolées par cette section. La formule générale donnant la valeur du moment de torsion dans une section arbitraire de la barre est de la forme:

$$M_t = \sum M + \sum \int m dx. \tag{80}$$

L'intégrale s'étend à la longueur de chaque partie de la barre, soumise à des couples répartis, la sommation à toutes les parties se trouvant d'un côté de la section considérée.

Par convention, nous admettrons que le moment de torsion considéré du côté de la normale extérieure à la section est positif, s'il est dirigé dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Le moment M d'un couple mesuré en kgf·cm, le nombre de tours par minute n et la puissance N sont liés par les relations suivantes:

$$M = 71\,620 \frac{N}{n}, \tag{81, a}$$

$$M = 97\,360 \frac{N}{n}. \tag{81, b}$$

Dans la formule (81,a) la puissance est exprimée en chevaux-vapeurs, dans la formule (81,b), en kilowatts.

Dans le SI la relation entre le moment M en newtons-mètres (N·m), la vitesse angulaire ω (1/s) et la puissance N en watts est exprimée par la formule:

$$M = \frac{N}{\omega}. \tag{81, c}$$

Puisque le moment de rotation est proportionnel à la puissance, pour les arbres tournant à une vitesse uniforme et transmettant la puissance aux organes récepteurs, au lieu du diagramme des

moments de torsion, on peut construire le diagramme de la répartition de la puissance suivant la longueur de l'arbre.

Exemple 18. Etant donné M (fig. 40); construire le diagramme de M_t.

Solution. En effectuant une section dans chaque partie de la barre et en prenant en considération la convention des signes,

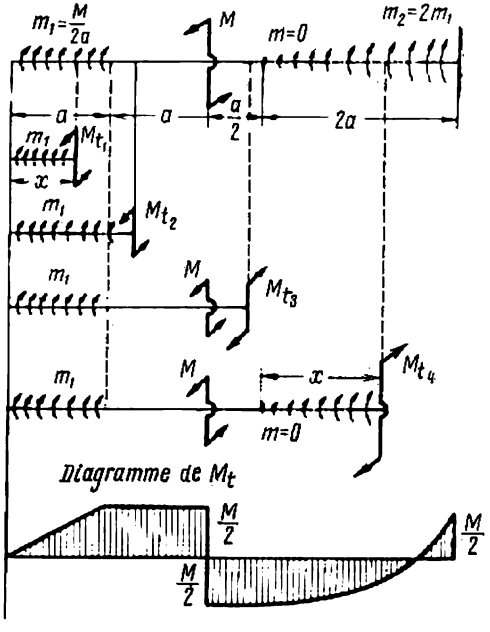


Fig. 40

d'après la formule (80) nous trouvons:

$$M_{t_1} = m_1 x = \frac{M}{2a} x, \quad M_{t_1}\Big|_{x=0} = 0, \quad M_{t_1}\Big|_{x=a} = \frac{M}{2};$$

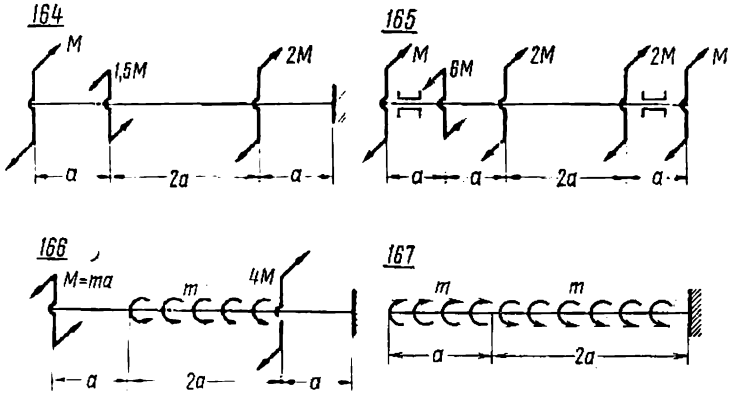
$$M_{t_2} = m_1 a = \frac{M}{2}, \quad M_{t_3} = m_1 a - M = \frac{M}{2} - M = -\frac{M}{2};$$

$$M_{t_4} = m_1 a - M + \int_0^x \frac{2m_1}{2a} x\,dx = \frac{M}{2} - M + \frac{M}{2a^2} \int_0^x x\,dx =$$

$$= -\frac{M}{2} + \frac{Mx^2}{4a^2}, \quad M_{t_4}\Big|_{x=0} = -\frac{M}{2}, \quad M_{t_4}\Big|_{x=2a} = \frac{M}{2}.$$

Le diagramme de M_t est dessiné fig. 40.

Problèmes 164-167. Construire les diagrammes du moment de torsion.



§ 2. Contraintes tangentielles, angle de torsion et énergie potentielle de déformation élastique

Pour une barre cylindrique de section circulaire de diamètre $d = 2r$ la contrainte tangentielle τ en un point arbitraire de la section droite à une distance ρ du centre est déterminée par la formule :

$$\tau = \frac{M_t \rho}{I_p} \tag{82}$$

où $I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1d^4$ est le moment d'inertie polaire de la section circulaire.

Les valeurs des contraintes tangentielles maximales aux points les plus éloignés du centre sont :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}, \tag{83}$$

où $W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3$ est le module de résistance polaire de la section circulaire en torsion.

Pour les barres de section non circulaire la contrainte tangentielle maximale peut être déterminée par la formule :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}, \tag{84}$$

où W_t est le module de résistance de la section en torsion ; les valeurs de ce module pour différentes formes de section sont données dans les manuels de résistance des matériaux.

L'angle de torsion φ dans une partie de longueur l, où le moment de torsion M_t est constant, est déterminée d'après la loi de Hooke :

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_t}, \tag{85}$$

où I_t est le moment d'inertie de la section droite de la barre en torsion égal pour une section circulaire à I_p ; pour les autres formes de section les valeurs de I_t sont données dans les manuels de résistance des matériaux.

Si la barre est constituée de plusieurs tronçons dans chacun desquels le moment de torsion M_t varie selon une loi donnée, l'angle de torsion total (le glissement relatif de deux sections extrêmes de la barre) est déterminée par la formule :

$$\varphi = \sum \int \frac{M_t\, dx}{GI_t}. \tag{86}$$

L'intégrale s'étend à la longueur de chaque partie de la barre, la sommation à toutes les parties de la barre.

Pour les arbres de transmission les angles de torsion sont calculés des deux côtés de la section, où se trouve la poulie motrice.

La formule générale donnant la valeur de l'énergie potentielle de déformation élastique, accumulée dans la barre pendant la torsion, est :

$$U = \sum \int \frac{M_t^2\, dx}{2GI_t}. \tag{87}$$

L'intégration et la sommation s'effectuent de la même manière que pour déterminer l'angle de torsion.

Exemple 19. Etant données M, a, d, G (fig. 41) ; construire les diagrammes de M_t et φ ; déterminer $\tau_{\max I,\, II}$ et U.

Solution. Le moment de torsion dans le tronçon I est $M_{t_I} = -M$. Le moment de torsion, dans une section arbitraire du troncon II, est :

$$M_{t_{II}} = -M + 2M - m(2a - x_2) =$$

$$= M - \frac{2M}{a}(2a - x_2) = M\left(\frac{2x_2}{a} - 3\right);$$

$$M_{t_{II_{x_2=0}}} = -3M;\ M_{t_{II_{x_2=2a}}} = M;\ \tau_{\max I} = \frac{M}{W_t}.$$

Pour une section carrée de côté c: $W_t \approx 0{,}208\, c^3$. Pour $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$ on a $W_t \approx 0{,}208 \frac{d^3}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}0736 d^3$.

D'où:

$$\tau_{\max_I} = \frac{M}{0{,}0736 d^3} \approx 13{,}6 \frac{M}{d^3}; \quad \tau_{\max_{II}} = \frac{3M}{W_p} = \frac{3M}{\pi d^3} 16 \approx 15{,}3 \frac{M}{d^3}.$$

La section encastrée gauche ne tourne pas, donc il est rationnel de calculer l'angle de torsion de l'extrémité gauche de la barre.

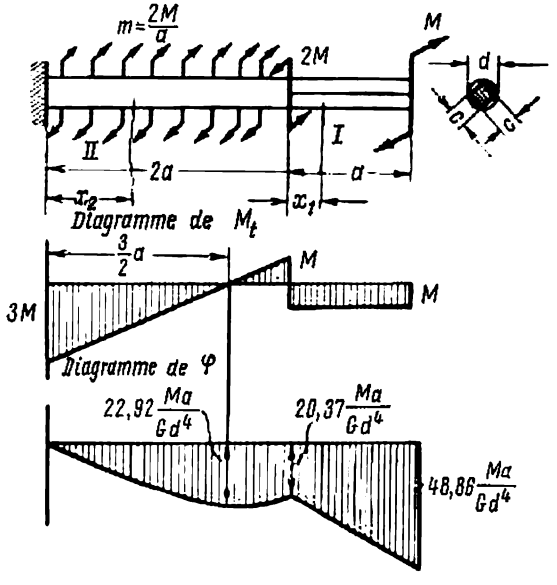


Fig. 41

Pour une section arbitraire dans le tronçon II nous avons:

$$\varphi_{II_{x_2}} = \frac{M}{GI_p} \int_0^{x_2} \left(\frac{2x_2}{a} - 3 \right) dx_2 = \frac{M}{GI_p} \left(\frac{x_2^2}{a} - 3x_2 \right);$$

$$\varphi_{II_{x_2=0}} = 0; \quad \varphi_{II_{x_2=2a}} = \frac{M}{GI_p} (4a - 6a) = -\frac{2Ma}{GI_p} =$$

$$= -\frac{2Ma}{G\pi d^4} \cdot 32 \approx -20{,}37 \frac{Ma}{Gd^4}.$$

La valeur maximale de φ_{II} sera:

$$\frac{d\varphi_{II_{x_2}}}{dx_2} = \frac{M}{GI_p}\left(2\frac{x_2}{a} - 3\right) = 0;\ x_2 = \frac{3}{2}a;$$

$$\varphi_{II_{x_2=\frac{3}{2}a}} = \frac{M}{GI_p}\left(\frac{9a}{4} - \frac{9a}{2}\right) = -\frac{9}{4}\frac{Ma}{GI_p} =$$

$$= -\frac{9}{4}\frac{Ma}{G\pi d^4}\cdot 32 \approx -22{,}92\frac{Ma}{Gd^4}.$$

Pour une section arbitraire dans le tronçon I:

$$\varphi_{I_{x_1}} = \varphi_{II_{x_2=2a}} - \frac{Mx_1}{GI_t};\ \varphi_{I_{x_1=a}} = \varphi_{II_{x_2=2a}};$$

$$\varphi_{I_{x_1=a}} = -\frac{2Ma}{GI_p} - \frac{Ma}{GI_t}.$$

Mais:

$$I_t \approx 0{,}1404c^4 = 0{,}1404\frac{d^4}{4} \approx 0{,}0351d^4$$

et

$$\frac{1}{I_t} \approx \frac{1}{0{,}0351d^4} \approx \frac{28{,}49}{d^4},$$

donc:

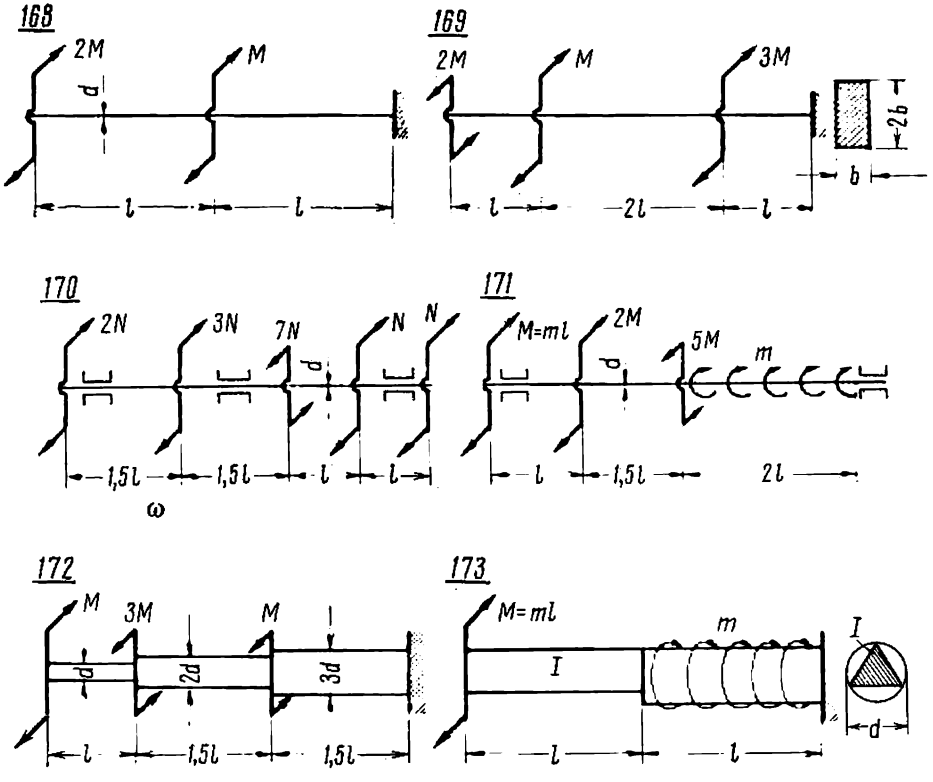
$$\varphi_{I_{x_1=a}} = -(20{,}37 + 23{,}49)\frac{Ma}{Gd^4} = -48{,}86\frac{Ma}{Gd^4}$$

D'après la formule (87), on trouve la valeur de l'énergie potentielle de déformation élastique dans la barre tordue:

$$U = U_I + U_{II} = \frac{M^2a}{2GI_t} + \frac{M^2}{2GI_{t_0}}\int_0^{2a}\left(\frac{2x_2}{a} - 3\right)dx =$$

$$= \frac{M^2a}{Gd^4}\left[14{,}25 + 5{,}1\left(\frac{32}{3} - 24 + 18\right)\right] \approx 38\frac{M^2a}{Gd^4}.$$

Problèmes 168-173. Construire les diagrammes du moment de torsion M_t, de l'angle de torsion φ et déterminer la contrainte tangentielle maximale τ_{max} et l'énergie potentielle de déformation U, accumulée dans le volume de la barre. Résoudre le problème 170 dans le système SI.



§ 3. Résistance et rigidité

Pour une barre de section droite constante en torsion les dimensions de la section sont déterminées par la formule

$$W_t \geqslant \frac{\max M_t}{[\tau]}, \tag{88}$$

où $\max M_t$ est le moment de torsion maximal en valeur absolue.

Si on se fixe la condition supplémentaire selon laquelle l'angle de torsion maximal φ_{max} ne doit pas dépasser une valeur admissible $[\varphi]$, la section choisie se vérifie pour la rigidité d'après l'expression :

$$I_t \geqslant \frac{\max M_t l}{G[\varphi]}, \tag{89}$$

où l est la longueur pour la valeur admissible de l'angle de torsion.

Dans le cas où la valeur admissible de l'angle de torsion est évaluée en degrés par mètre $[\varphi^\circ]$, il est nécessaire de substituer sa valeur dans la formule (89) en radians $\left([\varphi] = [\varphi^\circ]\frac{\pi}{180}\right)$ et de prendre $l = 100$ cm.

Pour calculer un arbre de transmission de section constante, il faut remplacer dans les formules (88) et (89) max M_t par l'une des expressions (81) et prendre pour puissance N sa valeur maximale du diagramme des puissances.

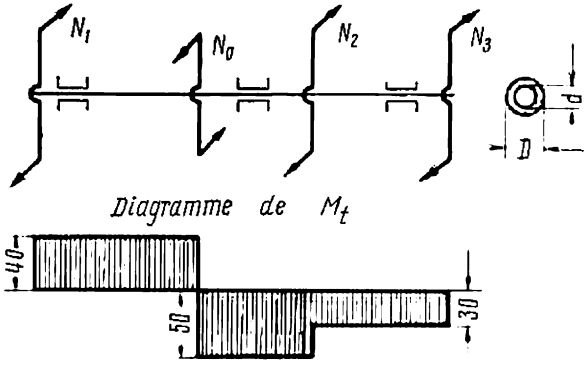


Fig. 42

Pour les barres de section circulaire pleine et annulaire $W_t = W_p$ et $I_t = I_p$.

Exemple 20. Calculer D et d (fig. 42). On prendra : $N_1 = 40$ CV, $N_2 = 20$ CV, $N_3 = 30$ CV, $n = 1\,000$ tr/mn, $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}6$, $[\tau] = 450$ kgf/cm², $[\varphi^\circ] = 2$ degrés/m, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm².

Solution. D'après le diagramme des puissances (fig. 42) la puissance $N = 50$ CV.

Puisque le module de résistance polaire d'une section annulaire est :

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4), \text{ où } \alpha = \frac{d}{D},$$

d'après la formule (88) et en prenant en considération la relation (81,*a*), nous aurons :

$$\frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \geqslant \frac{71\,620}{n[\tau]}N.$$

d'où

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{71\,620N}{n[\tau](1-\alpha^4)}} \approx 71{,}4\sqrt[3]{\frac{50}{10^3 \cdot 450 \cdot 0{,}87}} \approx 3{,}64\,\text{cm}.$$

La valeur admissible de l'angle de torsion est donnée en degrés/m, nous écrirons donc la formule (89) sous la forme :

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \geqslant \frac{71\,620N \cdot 100 \cdot 180}{nG[\varphi^\circ]\pi},$$

d'où

$$D = \sqrt[4]{\frac{71\,620 \cdot 100 \cdot 180 \cdot 32N}{\pi^2 nG[\varphi^\circ](1-\alpha^4)}} \approx 253{,}4\sqrt[4]{\frac{N}{nG[\varphi^\circ](1-\alpha^4)}} =$$

$$= 253{,}4\sqrt[4]{\frac{50}{10^3 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0{,}87}} \approx 3{,}49\ \text{cm}.$$

On prendra : $D = 3{,}64$ cm, $d = 0{,}6 \cdot 3{,}64 \approx 2{,}18$ cm.

Exemple 21. Calculer N_0 (kW). On prendra : $d = 4$ cm, $\omega = 80$ rad/s, $G = 8 \cdot 10^4$ MN/m², $[\tau] = 60$ MN/m², $[\varphi] = 2 \cdot 10^{-2}$ rad/m (fig. 43).

Solution. D'après la condition de résistance (88) et la relation (81,*c*) la puissance sera :

$$N \leqslant W_p[\tau]\omega = \frac{\pi d^3[\tau]\omega}{16} =$$

$$= \frac{\pi(4 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 60 \cdot 10^6 \cdot 80}{16} \approx$$

$$\approx 60\,300\ \text{W} = 60{,}3\ \text{kW}.$$

D'après la condition de rigidité (89) et la relation (81,*c*) on a :

$$N \leqslant \frac{G[\varphi]I_p\omega}{l} = \frac{G[\varphi]\pi d^4\omega}{32l} =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\pi(4 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 80}{32} \approx$$

$$\approx 32\,200\ \text{W} = 32{,}2\ \text{kW}.$$

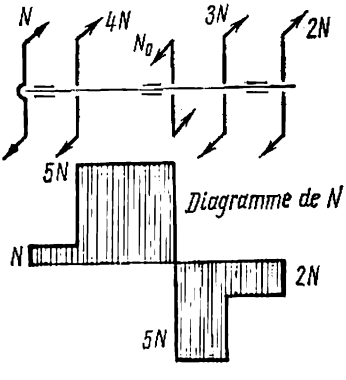


Fig. 43

Du diagramme des puissances (fig. 43) on tire $N = 5N = \frac{1}{2}N_0$, d'où :

$$N_0 \leqslant 2N = 2 \cdot 32{,}2 = 64{,}4\ \text{kW}.$$

Exemple 22. Calculer τ_{max}, φ°_{A-C}. On prendra: $d = 4$ cm. $a = 40$ cm, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, $\varphi^{\circ}_{B-C} = 1^{\circ}$ (fig. 44).

Solution. On construit le diagramme du moment de torsion. On détermine la rotation de la section B par rapport à la section C par la formule:

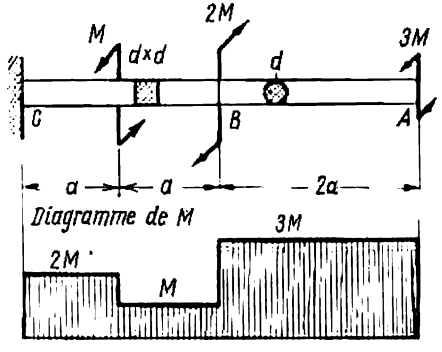


Fig. 44

$$\varphi_{B-C} = 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{Ma}{GI_t} + \frac{2Ma}{GI_t} = \frac{3Ma}{GI_t}.$$

d'où:

$$M = \frac{\pi G I_t}{3 \cdot 180 \cdot a}.$$

Puisque $I_t \approx 0{,}1404\ d^4$, $W_t \approx 0{,}208\ d^3$, $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ et $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2\ d^3$, c'est-à-dire $W_t \approx W_p$, la partie dangereuse sera celle où $M_t = 3M$. C'est pourquoi:

$$\tau_{max} = \frac{3M}{W_p} = \frac{3\pi G \cdot 0{,}1404 d^4 \cdot 16}{3 \cdot 180 \cdot a \pi d^3} = \frac{G \cdot 0{,}1404 \cdot d \cdot 16}{180a} =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1404 \cdot 4 \cdot 16}{180 \cdot 40} \approx 1\,000 \text{ kgf/cm}^2.$$

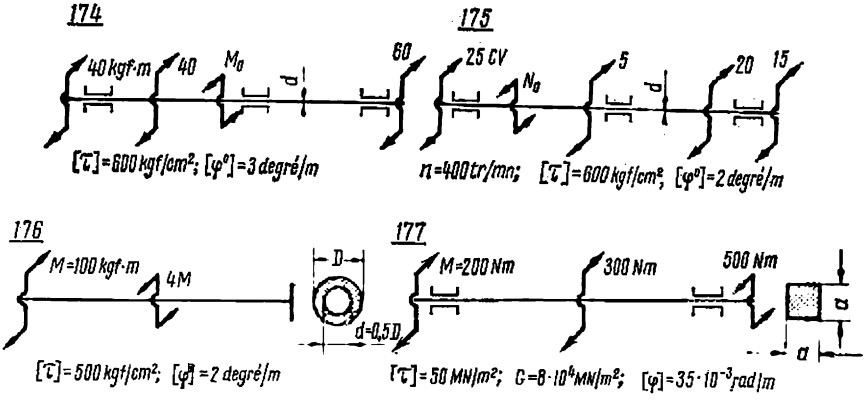
On détermine la rotation de la section A par rapport à la section C par la formule:

$$\varphi^{\circ}_{A-C} = \varphi^{\circ}_{B-C} + \varphi^{\circ}_{A-B} = 1^{\circ} + \frac{3M \cdot 2a \cdot 180}{GI_p \pi} =$$

$$= 1^{\circ} + \frac{2I_t}{I_p} \approx 1^{\circ} + 2{,}86^{\circ} = 3{,}86^{\circ}.$$

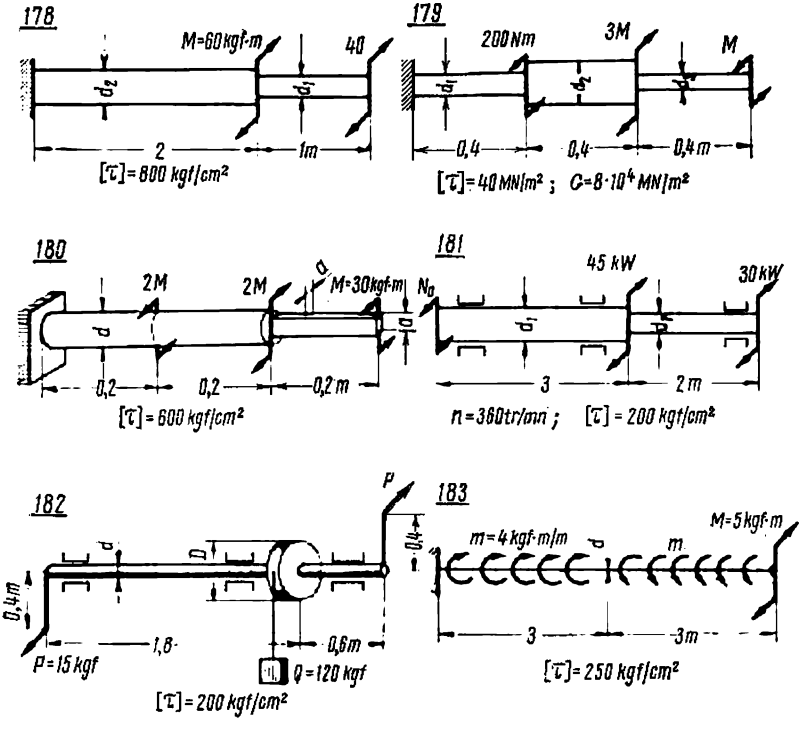
Problèmes 174-177. Calculer d'après les conditions de résistance et de rigidité les dimensions des sections droites des barres.

Prendre $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2 dans tous les problèmes de ce paragraphe et des paragraphes suivants, sauf ceux à résoudre dans le SI, pour lesquels la valeur de G est indiquée sur le dessin.



Problèmes 178-183. Déterminer les dimensions des sections droites des barres assurant leurs résistances et calculer leurs angles de torsion totaux.

Dans tous les problèmes de ce paragraphe et des paragraphes suivants les valeurs numériques des longueurs des parties des barres sont données en mètres.



Problèmes 184-201. Déterminer les quantités inconnues.

Dans le problème 193 la barre AB tourne à une vitesse constante dans un milieu résistant qui développe un moment réactif uniformément réparti suivant la longueur de la barre.

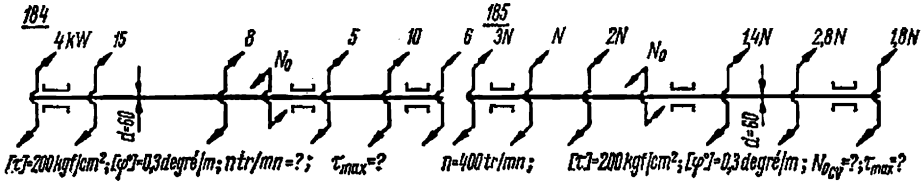
Dans le problème 194 le point C sur la surface s'est déplacé de 0,5 mm.

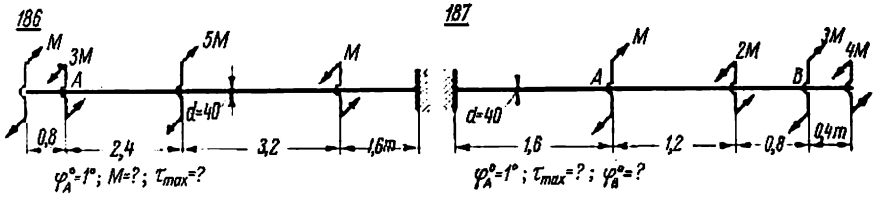
Dans le problème 197 la charge Q s'est déplacée de 2 cm.

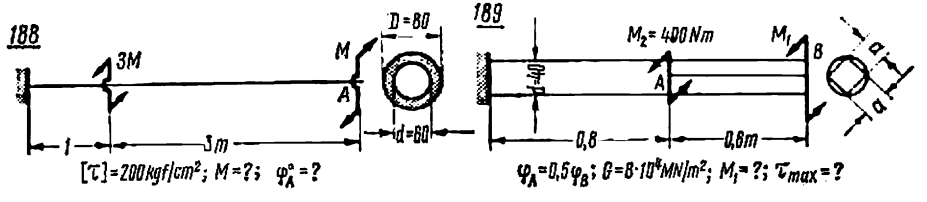
Dans le problème 198 les barres AB et CD sont parfaitement rigides.

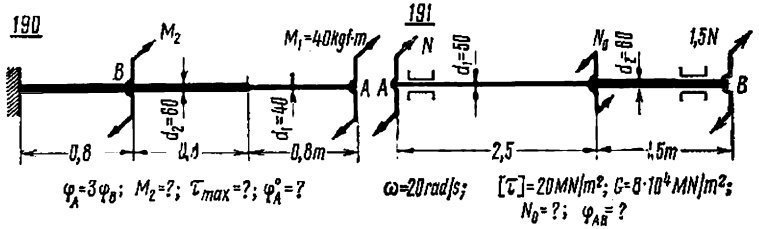
Dans le problème 200 la résistance pratique des barres est la même.

Dans le problème 201 le point A se trouve dans une section oblique.

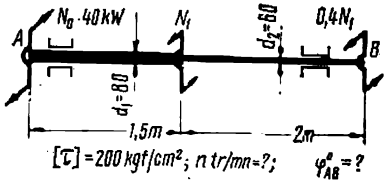






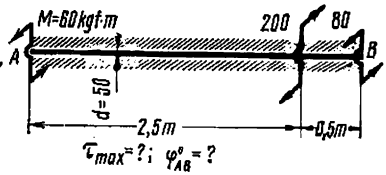


192



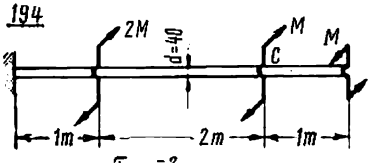
$[\tau]=200\,kgf/cm^2$; n tr/mn=?; $\varphi^0_{AB}=?$

193



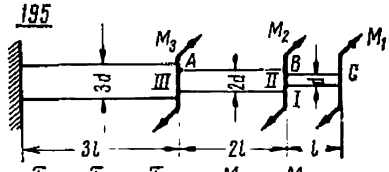
$\tau_{max}=?$; $\varphi^0_{AB}=?$

194



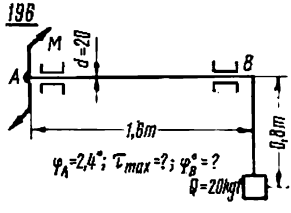
$\tau_{max}=?$

195



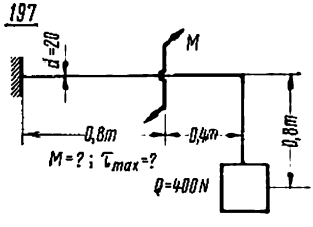
$\tau_{max_I}=\tau_{max_{II}}=\tau_{max_{III}}$; $\frac{M_2}{M_1}=?$; $\frac{M_3}{M_1}=?$; $\frac{\varphi_A}{\varphi_C}=?$; $\frac{\varphi_B}{\varphi_C}=?$

196



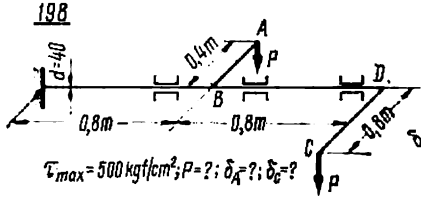
$\varphi_A=2,4°$; $\tau_{max}=?$; $\varphi^0_B=?$

197



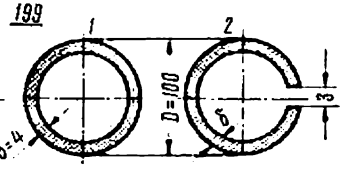
M=?; $\tau_{max}=?$

198



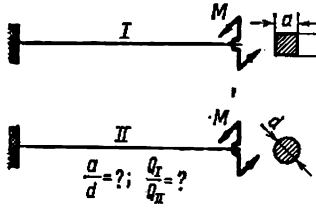
$\tau_{max}=500\,kgf/cm^2$; $P=?$; $\delta_A=?$; $\delta_C=?$

199



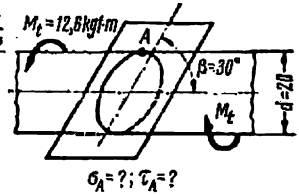
$G_1=G_2$; $\frac{GI_p}{EI_K}=?$; $\frac{\tau_{max_2}}{\tau_{max_1}}=?$

200



$\frac{a}{d}=?$; $\frac{Q_I}{Q_{II}}=?$

201



$\sigma_A=?$; $\tau_A=?$

§ 4. Problèmes hyperstatiques

Dans les problèmes hyperstatiques de torsion aussi bien que de traction et de compression, on considère des systèmes dans lesquels les réactions des liaisons et les efforts intérieurs ne peuvent être déterminés des conditions de la statique.

De tels systèmes sont calculés à l'aide des conditions de la statique et des conditions de compatibilité des déplacements. Ces dernières conditions sont basées sur l'inséparabilité des barres du système et représentent des relations géométriques entre les déplacements des barres du système.

Si les liaisons supplémentaires sont parfaitement rigides, leurs déformations sont nulles; mais si les

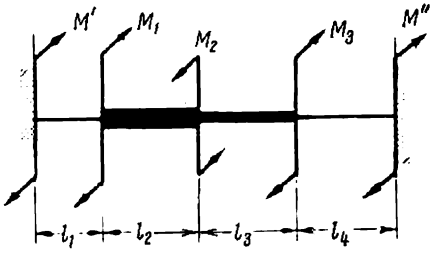


Fig. 45

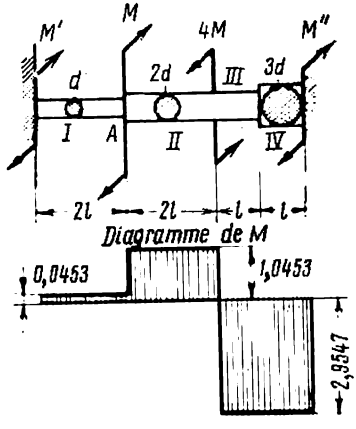


Fig. 46

liaisons supplémentaires sont élastiques, leurs déplacements sont calculés à partir des déformations déterminées par la loi de Hooke.

Si toutes les barres du système hyperstatique sont soumises à la seule torsion, les déplacements élastiques sont déterminés à partir des angles de torsion. Si dans le système une partie des barres sont soumises à la torsion et l'autre à la traction ou à la compression, pour le premier groupe des barres les déplacements sont déterminés à partir des angles de torsion, et pour le deuxième groupe, à partir des déformations linéiques longitudinales.

Pour chaque type de système hyperstatique les conditions de la statique et les conditions de compatibilité des déplacements sont différentes. Mais pour certains systèmes ces conditions sont les mêmes et peuvent être traduites en principe par les mêmes équations.

Par exemple, pour des systèmes constitués de plusieurs barres droites de différentes rigidités montées coaxialement, encastrées aux extrémités et chargées seulement de couples extérieurs provoquant une torsion (fig. 45), la condition de la statique se traduit par la somme algébrique des moments de tous les couples donnés

et réactifs par rapport à l'axe géométrique des barres. Cette somme doit être égale à zéro.

La condition de compatibilité des déplacements se traduit par la somme algébrique des angles de torsion de toutes les parties; puisque les sections extrêmes ne tournent pas, cette somme doit aussi être égale à zéro.

Si un des encastrements de la barre n'est pas rigide, mais élastique, l'angle de rotation de la section encastrée élastiquement n'est pas nul, mais proportionnel à la valeur du moment réactif. Si les deux encastrements ne sont pas rigides, mais élastiques, l'angle de torsion total doit être égal à la différence des angles de rotation des sections encastrées.

Exemple 23. Etant données M, d, l, G;
calculer τ_{max} et φ_A° (fig. 46).

Solution. Les moments d'inertie polaires des sections circulaires des tronçons *I*, *II*, *III* et *IV* sont:

$$I_{p_I} = I_p = \frac{\pi d^4}{32};\ I_{p_{II}} = I_{p_{III}} = 16I_p;\ I_{p_{IV}} = 81I_p.$$

Les angles de torsion sont:

$$\varphi_I = \frac{M' 2l}{GI_p};\ \varphi_{II} = \frac{(M' + M)\, 2l}{16GI_p};$$

$$\varphi_{III} = \frac{(M' + M - 4M)\, l}{16GI_p}$$

$$\text{et}\quad \varphi_{IV} = \frac{(M' + M - 4M)\, l}{81GI_p}.$$

Comme l'angle de rotation relative des sections extrêmes est nul, on a:

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = \frac{l}{GI_p}\left[2M' + 2(M' + M)\frac{1}{16} + \right.$$

$$\left. + (M' - 3M)\frac{1}{16} + (M' - 3M)\frac{1}{81}\right] = 0,$$

d'où

$$M' = \frac{129}{2\,851} M \approx 0{,}0453M.$$

De la condition de la statique nous avons: $M'' = 3M - M' = 2{,}9547\ M$.

Le diagramme du moment de torsion construit selon ces valeurs est représenté fig. 46.

Comme:

$$\frac{M_{t_{III}}}{M_{t_I}} = \frac{2{,}9547}{0{,}0453} \approx 6{,}5 \text{ et } \frac{W_{p_{III}}}{W_{p_I}} = \frac{\pi (2d)^3}{\pi d^3} = 8,$$

donc, la contrainte de cisaillement maximal est développée dans la section de diamètre $2d$ dans la partie *III*.

La valeur de cette contrainte de cisaillement est donnée par la formule:

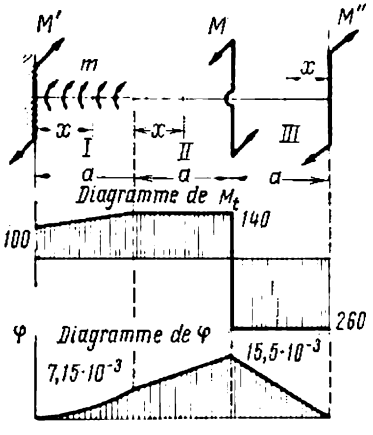


Fig. 47

$$\tau_{max} = \frac{M_{t_{III}}}{W_{p_{III}}} =$$

$$= \frac{2{,}9547M}{\pi d^3} \cdot 2 \approx 5{,}909 \frac{M}{\pi d^3} \approx 1{,}88 \frac{M}{d^3}.$$

L'angle de rotation en degrés pour la section A est:

$$\varphi^\circ_A = \frac{M_{t_I} \cdot 2l}{GI_p} \cdot \frac{180}{\pi} =$$

$$= \frac{0{,}0453M \cdot 2l \cdot 180 \cdot 32}{G\pi d^4 \pi} \approx 52{,}2 \frac{M}{Gd^4}.$$

Exemple 24. Calculer d et construire le diagramme de φ. On prendra: $m = 80$ N·m/m, $M = 400$ N·m, $a = 0{,}5$ m, $[\tau] = 40$ MN/m², $G = 8 \cdot 10^4$ MN/m² (fig. 47).

Solution. La condition de la statique donne:

$$M' + ma - M + M'' = 0.$$

La condition de compatibilité des déplacements est:

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 0.$$

Comme la rigidité de la section de la barre est constante, la dernière équation prendra la forme:

$$M'a + m \int_0^a x\,dx + (M' + ma)\,a + (M' + ma - M)\,a = 0,$$

d'où:

$$3M'a = Ma - 2ma^2 - m\frac{a^2}{2}$$

et

$$M' = \frac{1}{3}(M - 2{,}5ma) = \frac{1}{3}(400 - 2{,}5 \cdot 80 \cdot 0{,}5) \approx 100 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Portant M' dans l'équation de la statique, on trouve:

$$M'' = \frac{1}{3}(2M - 0{,}5ma) = \frac{1}{3}(800 - 0{,}5 \cdot 80 \cdot 0{,}5) \approx 260 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

On construit le diagramme du moment de torsion (fig. 47), on trouve $\max M_t = 260$ N·m.

D'après la formule

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \geqslant \frac{\max M_t}{[\tau]}.$$

D'où:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{\max M_t}{[\tau]}} \approx 1{,}72 \sqrt[3]{\frac{\max M_t}{[\tau]}} =$$

$$= 1{,}72 \sqrt[3]{\frac{260}{400 \cdot 10^6}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3{,}2 \text{ cm}.$$

On calcule les angles de torsion:

$$\varphi_{I_x} = \frac{1}{GI_p} \int_0^x (M' + mx)\, dx = \frac{M'x + \frac{mx^2}{2}}{GI_p};$$

$$\varphi_{I_{x=0}} = 0; \quad \varphi_{I_{x=a}} = \frac{M'a + \frac{ma^2}{2}}{GI_p} =$$

$$= \frac{100 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 0{,}25}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}2^4 \cdot 10^{-8}} \approx 0{,}00715;$$

$$\varphi_{II_{x=a}} = \varphi_{I_{x=a}} + \frac{(M' + ma)}{GI_p} x; \quad \varphi_{II_{x=0}} = \varphi_{I_{x=a}};$$

$$\varphi_{II_{x=a}} = \varphi_{I_{x=a}} + \frac{M'a + ma^2}{GI_p} = 0{,}00715 +$$

$$+ \frac{100 \cdot 0{,}5 + 80 \cdot 0{,}25}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}2^4 \cdot 10^{-8}} = 0{,}00715 + 0{,}00835 = 0{,}0155;$$

$$\varphi_{III_x} = \frac{M''x}{GI_p};\ \varphi_{III_{x=0}} = 0;$$

$$\varphi_{III_{x=a}} = \frac{M''a}{GI_p} = \frac{26 \cdot 10^2 \cdot 50}{8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}2^4} \approx 0{,}0155.$$

A partir de ces valeurs on construit le diagramme des angles de torsion (fig. 47).

Exemple 25. Un tube de longueur $4a$ et de diamètres D et d est encastré à son extrémité inférieure C (fig. 48). On introduit dans ce tube par en haut, jusqu'à une profondeur de $2a$, une barre de section circulaire de diamètre $d_0 = \frac{D}{2} = \frac{d}{1{,}6}$. L'extrémité inférieure B de cette barre est rigidement liée avec le tube et l'extrémité supérieure E du tube est rigidement liée avec la barre. Un couple de torsion M dont l'axe coïncide avec l'axe géométrique du système est appliqué dans la section extrême A de la partie débordante de la barre, et un couple de torsion $2M$ de même axe est appliqué dans la section supérieure E du tube.

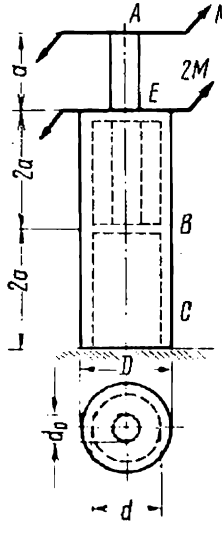


Fig. 48

Calculer $\tau_{\max_I}$ dans la barre et $\tau_{\max_{II}}$ dans le tube, ainsi que φ_{A-C}, si la valeur de G pour le matériau de la barre et du tube est supposée connue.

Solution. Dans la partie $A - E$ de la barre le moment de torsion est :

$$M_{t_{AE}} = M.$$

Dans l'encastrement C le moment réactif $M_C = 3M$, le moment de torsion dans la partie $B - C$ du tube sera : $M_{t_{BC}} = 3M$.

Le système hyperstatique, constitué par la barre et le tube, est soumis dans sa partie $B - E$ à un couple $3M$ appliqué à ses extrémités. D'après la condition de la statique nous avons : $M_I + M_{II} = 3M$, où M_I est le moment transmis par la barre, M_{II} le moment transmis par le tube.

D'après la condition de compatibilité des déplacements les angles de torsion de la barre φ_I et du tube φ_{II} dans la partie $B - E$ sont égales, c'est-à-dire

$$\frac{M_I 2a}{GI_{p_I}} = \frac{M_{II} 2a}{GI_{p_{II}}}.$$

d'où :

$$M_{II} = M_I \frac{I_{p_{II}}}{I_{p_I}}.$$

Portant cette valeur dans la condition de la statique nous trouvons :

$$M_I\left(1 + \frac{I_{p_{II}}}{I_{p_I}}\right) = 3M \text{ ou } M_I = \frac{3M}{1 + \dfrac{I_{p_{II}}}{I_{p_I}}};\ M_{II} = \frac{3M}{1 + \dfrac{I_{p_I}}{I_{p_{II}}}}.$$

Comme :

$$I_{p_I} = \frac{\pi d_0^4}{32} \text{ et } I_{p_{II}} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) = \frac{16\pi d_0^4}{32}(1 - 0{,}8^4) \approx 9{,}45 I_{p_I},$$

nous avons :

$$M_I = \frac{3M}{1 + 9{,}45} \approx 0{,}287M \text{ et } M_{II} \approx 2{,}713M.$$

Les valeurs maximales de la contrainte tangentielle sont : pour la barre dans la partie $A - E$:

$$\tau_{\max_I} = \frac{M}{W_{p_I}} = \frac{16M}{\pi d_0^3} \approx 5{,}09 \frac{M}{d_0^3},$$

pour le tube dans la partie $B - C$:

$$\tau_{\max_{II}} = \frac{3M}{\dfrac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)} = \frac{3M}{\dfrac{8\pi d_0^3}{16} \cdot 0{,}58} \approx 0{,}636 \tau_{\max_I} = 3{,}24 \frac{M}{d_0^3}.$$

L'angle de rotation de la section A par rapport à la section C se détermine de la façon suivante :

$$\varphi_{A-C} = \varphi_{A-E} + \varphi_{E-B} + \varphi_{B-C} = \frac{Ma}{GI_{p_I}} + 0{,}287 \frac{M2a}{GI_{p_I}} +$$

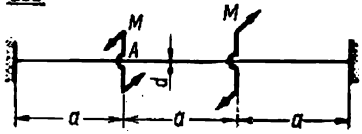
$$+ \frac{3M2a}{G \cdot 9{,}45 \cdot I_{p_I}} = 2{,}21 \frac{Ma}{GI_{p_I}} \approx 22{,}5 \frac{Ma}{Gd_0^4}.$$

Problèmes 202-221. Calculer les quantités inconnues.

Dans les problèmes 216-221 on prendra : $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm².

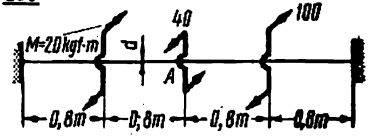
Dans le problème 215 les tubes cylindriques sont disposés concentriquement avec jeux et liés de façon rigide seulement en leurs extrémités.

202



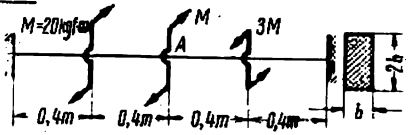
$[\tau]$; $d=?$; $\varphi_A^0=?$

203



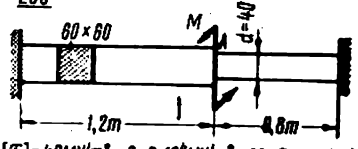
$[\tau]=500\,kgf/cm^2$; $d=?$; $\varphi_A^0=?$

204



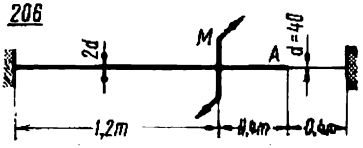
$[\tau]=800\,kgf/cm^2$; $b=?$; $\varphi_A^0=?$

205



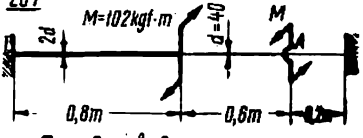
$[\tau]=40\,MN/m^2$; $G=8\cdot10^4\,MN/m^2$; $M=?$; $\varphi_A=?$; $U=?$

206



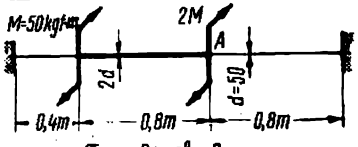
$[\tau]=150\,kgf/cm^2$; $M=?$; $\varphi_A^0=?$; $U=?$

207



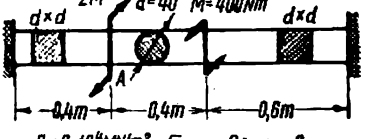
$\tau_{max}=?$; $\varphi_A^0=?$

208



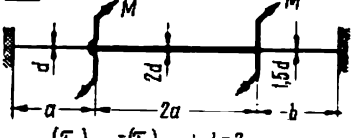
$\tau_{max}=?$; $\varphi_A^0=?$

209



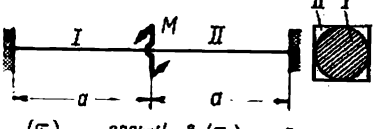
$G=8\cdot10^4\,MN/m^2$; $\tau_{max}=?$; $\varphi_A=?$

210



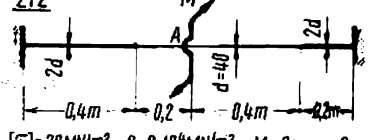
$(\tau_a)_{max}=(\tau_b)_{max}$; $b=?$

211



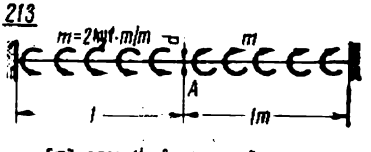
$(\tau_I)_{max}=200\,kgf/cm^2$; $(\tau_{II})_{max}=?$

212



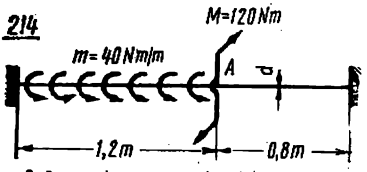
$[\tau]=20\,MN/m^2$; $G=8\cdot10^4\,MN/m^2$; $M=?$; $\varphi_A=?$

213



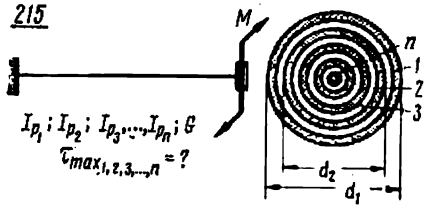
$[\tau]=250\,kgf/cm^2$; $d=?$; $\varphi_A^0=?$

214



$[\tau]=10\,MN/m^2$; $G=8\cdot10^4\,MN/m^2$; $d=?$; $\varphi_A=?$

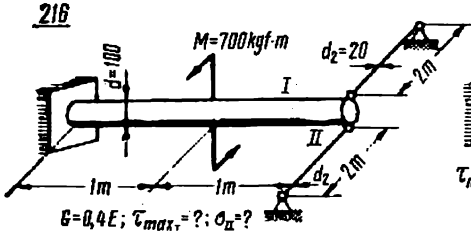
215



$I_{p_1}; I_{p_2}; I_{p_3},\ldots,I_{p_n}; G$

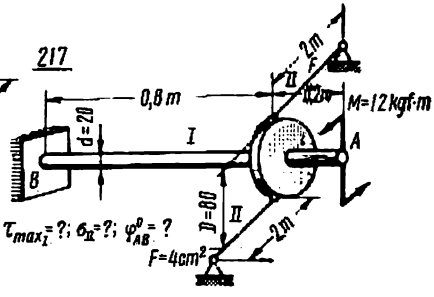
$\tau_{max_{1,2,3,\ldots,n}}=?$

216



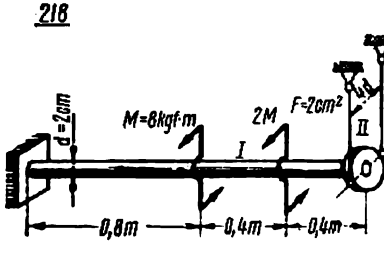
$G=0,4E$; $\tau_{max_I}=?$; $\sigma_{II}=?$

217



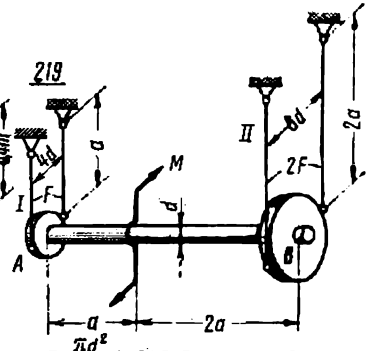
$\tau_{max_I}=?$; $\sigma_{II}=?$; $\varphi^0_{AB}=?$

218



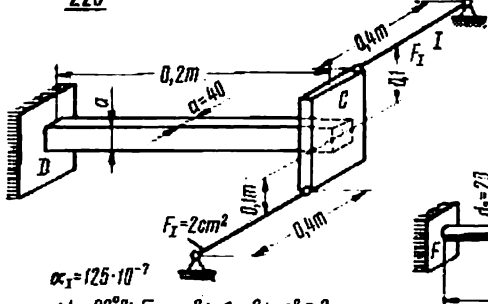
$\tau_{max_I}=?$; $\sigma_{II}=?$

219



$F=\frac{\pi d^2}{64}$; $G=0,4E$; $\tau_{max}=?$; $\sigma_{I,II}=?$; $\varphi^0_{AB}=?$

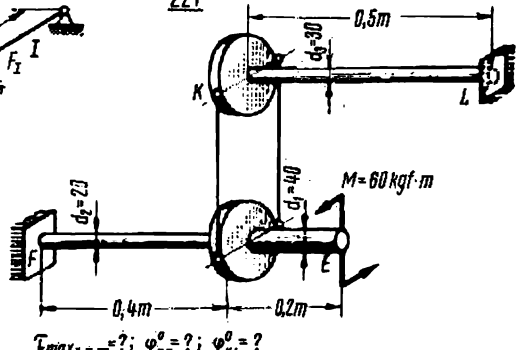
220



$\alpha_I=12,5\cdot10^{-7}$

$\Delta t_I=80^\circ C$; $\tau_{max}=?$; $\sigma_I=?$; $\varphi^0_{CD}=?$

221



$\tau_{max_{I,II,III}}=?$; $\varphi^0_{EF}=?$; $\varphi^0_{KL}=?$

VIII. FLEXION PLANE

§ 1. Effort tranchant et moment fléchissant

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont déterminés par la méthode des sections.

La valeur de l'effort tranchant Q_x dans une section droite quelconque de la poutre est égale à la somme algébrique des projections de toutes les forces extérieures (concentrées ou réparties) agissant sur la poutre d'un côté de la section considérée, sur l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section.

La valeur du moment fléchissant M_x dans une section droite quelconque de la poutre est égale à la somme algébrique des moments

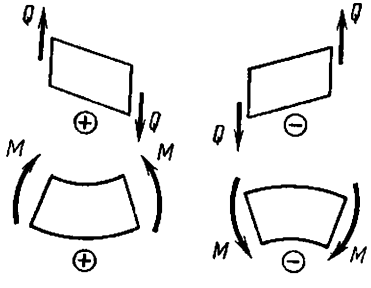


Fig. 49

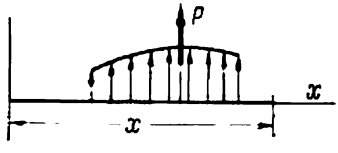


Fig. 50

de toutes les charges extérieures, agissant d'un côté de la section considérée, par rapport à l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section.

On admet que les valeurs positives et négatives de Q et M correspondent aux directions indiquées fig. 49.

Si la répartition de la charge se termine avant la section considérée (fig. 50), cette charge répartie peut être considérée comme une charge concentrée, appliquée dans la section passant par le centre de gravité de l'aire du diagramme de la charge répartie.

Pour les charges variant linéairement, les aires et les positions des centres de gravité des parties tranchées se déterminent aisément d'après les formules de la géométrie. Si les charges varient suivant une parabole de deuxième degré ABC (fig. 51), il est utile d'avoir en vue les formules suivantes de la géométrie analytique: l'aire

de la parabole $ABC = \frac{2}{3} lh$; le centre de gravité O de cette aire est sur la verticale BD; l'aire du segment parabolique $FBE = \frac{2}{3} l_1 h_1$, le centre de gravité O_1 de cette aire est situé à une distance $\frac{1}{2} l_1$ de la verticale FH; l'aire de chaque demi-parabole (ABD et DBC) est $\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} h = \frac{1}{3} lh$; le centre de gravité O_2 de cette aire est situé à une distance $\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{16} l$ de la ligne BD; l'aire du triangle rectangle CBG avec une hypoténuse parabolique BC: $\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} h = \frac{1}{6} l \cdot h$, le centre de gravité O_3 de cette aire est à une distance $\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{8} l$ de la verticale CG.

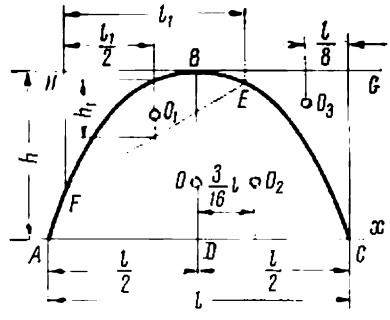


Fig. 51

Il est recommandé de s'approcher de la section du côté de la poutre le moins chargé et de construire d'abord le diagramme de Q et puis celui de M.

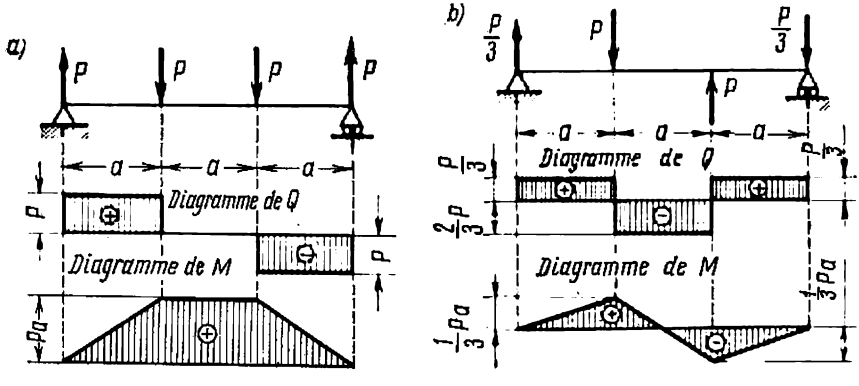


Fig. 52

Des définitions des quantités Q et M, conformément à la convention de signes, il découle que pour des poutres symétriques par rapport aux charges et aux types de liaisons, le diagramme de l'effort tranchant doit être antisymétrique et le diagramme du moment fléchissant symétrique (fig. 52,*a*).

Pour des poutres antisymétriques, vice-versa, le diagramme de l'effort tranchant doit être symétrique et le diagramme du moment fléchissant antisymétrique (fig. 52,*b*).

De la définition de Q il découle que dans une section, où est appliquée une force concentrée, le diagramme de l'effort tranchant doit avoir un saut de discontinuité de même grandeur que cette force extérieure (fig. 52,*a* et fig. 52,*b*).

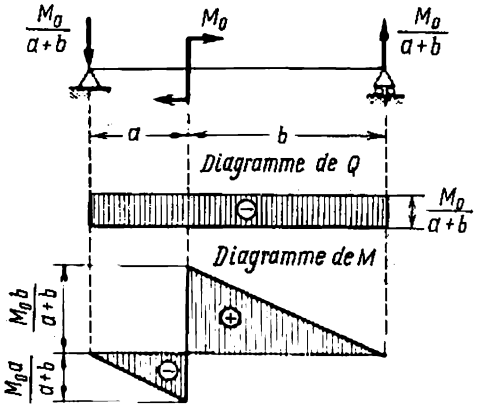


Fig. 53

De la définition de M il découle que, dans une section soumise à un couple, le diagramme du moment fléchissant doit avoir un saut de discontinuité de même grandeur que le moment de ce couple (fig. 53).

Pour les poutres non soumises à des couples répartis provoquant une flexion, la construction des diagrammes de Q et de M, ainsi que le contrôle de leurs exactitudes, s'effectue à l'aide des relations différentielles (90) et (91) entre M, Q et q et les conséquences qui en découlent:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \tag{90}$$

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \tag{91}$$

Principaux corollaires des relations (90) et (91):

1. Géométriquement, l'effort tranchant est interprété comme la tangente de l'angle formé par la tangente au diagramme du moment fléchissant au niveau de la section considérée et l'axe x de la poutre, et l'intensité de la charge, comme la tangente de l'angle formé par cet axe et la tangente au diagramme de l'effort tranchant.

2. Si les fonctions décrivant les variations des charges réparties sont des fonctions algébriques dans chaque partie de la poutre, le degré de la fonction de l'effort tranchant est supérieur d'une unité au degré de la fonction de la charge répartie dans cette même partie de la poutre, et le degré de la fonction du moment fléchissant est supérieur d'une unité au degré de la fonction de l'effort tranchant.

3. Dans la section de la poutre où l'effort tranchant est nul, le moment fléchissant à une valeur extrémale, et dans la section où l'effort tranchant passe par la valeur zéro d'une manière discontinue, le diagramme du moment fléchissant perd son allure monotone.

4. Dans la section de la poutre où le diagramme de l'effort tranchant a un saut ne passant pas par la valeur zéro, le diagramme du moment fléchissant a un point anguleux.

5. Si sur toute la longueur de la poutre ou sur une de ses parties le diagramme de l'effort tranchant est antisymétrique, sur ces mêmes parties le diagramme du moment fléchissant est symétrique, et vice-versa.

6. Dans chaque partie de la poutre la variation du moment fléchissant entre deux sections droites quelconques est égale à l'aire du diagramme des efforts tranchants entre ces deux sections.

7. Si l'axe x est orienté vers la gauche de la section extrême droite de la poutre:

$$Q = -\frac{dM}{dx}.$$

8. La concavité du diagramme curviligne du moment fléchissant est dirigée suivant le sens de l'intensité de la charge répartie provoquant la forme curviligne.

Il est utile de savoir que dans la section droite coïncidant avec l'axe de symétrie directe de la poutre l'effort tranchant (force antisymétrique) est nul et que dans la section coïncidant avec l'axe de symétrie indirecte de la poutre le moment fléchissant (moment symétrique) est nul. Si une force extérieure concentrée agit sur la poutre suivant l'axe de symétrie directe de la poutre, les valeurs numériques des efforts tranchants dans les sections à gauche et à droite de l'axe de symétrie sont égales à la moitié de cette force.

Construction des diagrammes de Q et M d'après leurs équations

Exemple 26. Etant données $M_1 = 2$ tm, $M_2 = 12$ tm, $q_1 = 2$ t/m, $q_2 = 4$ t/m, $P = 12$ t, $a = 3$ m, $b = 2$ m, $c = 1$ m, $d = 4$ m (fig. 54);

construire les diagrammes de Q et de M.

Solution. Déterminons les réactions A et B des appuis d'après la condition de la statique en prenant les sommes des moments par rapport aux appuis droit et gauche:

$$A(a+b+c+d) - q_1 b\left(\frac{b}{2}+c+d\right) - M_2 + Pd - q_2 d\frac{d}{2} = 0;$$

$$A \cdot 10 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - 12 + 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0;\ A = 2\text{ t};$$

$$B(d+c+b+a) - q_2 d\left(\frac{d}{2}+c+b+a\right) + P(c+b+a) +$$

$$+ M_2 - q_1 b\left(\frac{b}{2}+a\right) = 0;$$

$$B \cdot 10 - 4 \cdot 4 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 12 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 0;\ B = 6\text{ t}.$$

Pour simplifier les expressions de Q et de M nous considérons des sections du côté gauche dans les parties de longueurs a et b et

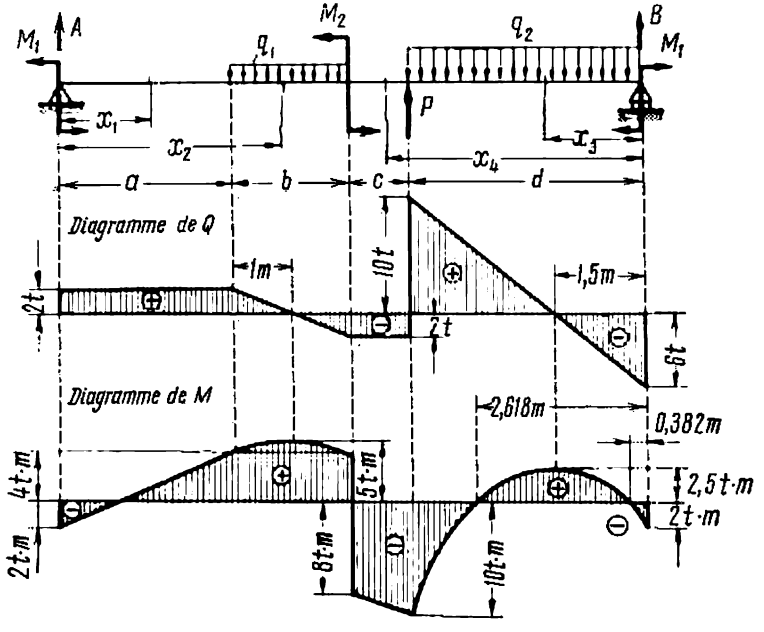


Fig. 54

du côté droite dans les parties de longueurs d et c:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant a;$$

$$Q_{x_1} = A = 2\,\text{t};\ M_{x_1} = -M_1 + Ax_1 = -2 + 2x_1;\ M_{x_1=0} = -2\ \text{t}\cdot\text{m};$$

$$M_{x_1=a=3} = -2 + 2\cdot 3 = 4\,\text{t}\cdot\text{m};$$

$$a \leqslant x_2 \leqslant a + b;$$

$$Q_{x_2} = A - q_1(x_2 - a) = 2 - 2(x_2 - 3);\ Q_{x_2=a=3} = 2\,\text{t};$$

$$Q_{x_2=a+b=5} = 2 - 2\cdot 2 = -2\,\text{t};$$

$$M_{x_2} = -M_1 + Ax_2 - q_1\frac{(x_2 - a)^2}{2} = -2 + 2x_2 - (x_2 - 3)^2;$$

$$M_{x_2=a=3} = -2 + 6 = 4\,\text{t}\cdot\text{m};\ M_{x_2=a+b=5} =$$

$$= -2 + 2\cdot 5 - 2^2 = 4\,\text{t}\cdot\text{m}.$$

$$Q_{x_2} = -2x_2 + 8 = 0 \text{ pour } x_2 = 4\,\text{m}, \text{ donc } \max M_{x_2=4} =$$

$$= -2 + 2 \cdot 4 - 1 = 5\,\text{t} \cdot \text{m}.$$

$$0 \leqslant x_3 \leqslant d;$$

$$Q_{x_3} = -B + q_2 x_3 = -6 + 4x_3;\ Q_{x_3=0} = -6\,\text{t};\ Q_{x_3=d=4} =$$

$$= -6 + 4 \cdot 4 = 10\,\text{t};$$

$$M_{x_3} = -M_1 + Bx_3 - q_2 \frac{x_3^2}{2} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2;$$

$$M_{x_3=0} = -2\,\text{t} \cdot \text{m};\ M_{x_3=d=4} = -2 + 6 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = -10\,\text{t} \cdot \text{m}.$$

$$Q_{x_3} = -6 + 4x_3 = 0 \text{ pour } x_3 = \frac{3}{2}\,\text{m}, \text{ donc } \max M_{x_3=\frac{3}{2}} =$$

$$= -2 + 6 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{9}{4} = 2{,}5\,\text{t} \cdot \text{m};$$

$$d \leqslant x_4 \leqslant d + c;$$

$$Q_{x_4} = -B + q_2 d - P = -6 + 4 \cdot 4 - 12 = -2\,\text{t};$$

$$M_{x_4} = -M_1 + Bx_4 - q_2 d \left(x_4 - \frac{d}{2}\right) + P(x_4 - d) =$$

$$= -2 + 6x_4 - 16(x_4 - 2) + 12(x_4 - 4);\ M_{x_4=d=4} =$$

$$= -2 + 6 \cdot 4 - 16 \cdot 2 = -10\,\text{t} \cdot \text{m};\ M_{x_4=d+c=5} =$$

$$= -2 + 6 \cdot 5 - 16 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = -8\,\text{t} \cdot \text{m}.$$

Nous trouvons dans quelles sections: $M_{x_3} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2 = 0$;

$$x_3^2 - 3x_3 + 1 = 0;\ x_3 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}5 \pm 1{,}118;$$

$$x_{3_1} = 2{,}618\,\text{m},\ x_{3_2} = 0{,}382\,\text{m}.$$

D'après les valeurs ainsi obtenues on construit les diagrammes de Q et de M (fig. 54).

Exemple 27. Etant données q, l, $P = 0{,}2\ ql$ (fig. 55);
calculer la longueur avantageuse de la console a et construire les diagrammes de Q et de M.

Solution. On appelle *longueur avantageuse de la console d'une poutre* la longueur de la console pour laquelle le moment fléchissant maximal a la plus petite valeur possible. La longueur

de la console avantageuse est déterminée par la condition d'égalité des valeurs absolues du moment fléchissant dans la section se trouvant sur l'appui (M_{app}) et du moment fléchissant maximal dans la travée de la poutre entre les appuis (M_{max}). Comme la barre est symétrique par rapport à la section moyenne, la valeur M_{max} dans la travée sera atteinte au milieu de la poutre et les valeurs des moments fléchissants dans les sections situées sur les appuis M_{app} seront identiques.

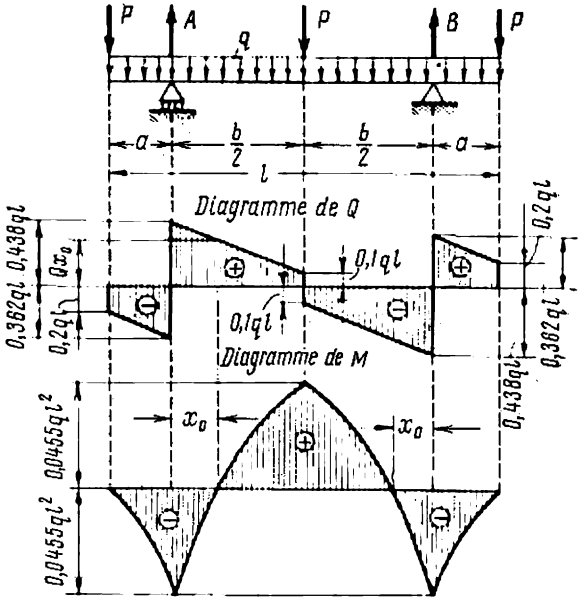


Fig. 55

La condition de détermination de la longueur avantageuse de la console s'écrit: $|M_{app}| = |M|_{max}$. Déterminons ces moments. Les réactions aux appuis seront:

$$A = B = \frac{3}{2}P + \frac{ql}{2};\quad M_{app} = -Pa - \frac{qa^2}{2};$$

$$M_{max} = -P\frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} + A\frac{l-2a}{2} = -\frac{Pl}{2} -$$

$$-\frac{ql^2}{8} + \left(\frac{3}{2}P + \frac{ql}{2}\right)\frac{l-2a}{2} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{qla}{2}.$$

Par condition, nous avons: $|M_{app}| = |M|_{max}$

$$Pa + \frac{qa^2}{2} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{qla}{2}$$

ou:

$$\frac{a^2}{l^2} + \left(\frac{5P}{ql} + 1\right)\frac{a}{l} - \frac{1}{4}\left(\frac{2P}{ql} + 1\right) = 0.$$

D'où:

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{5P}{ql} + 1\right) + \sqrt{\left(\frac{5P}{ql} + 1\right)^2 + \frac{2P}{ql} + 1}\right].$$

Le signe moins devant la racine est rejeté, car le rapport $\frac{a}{l}$ ne peut être une grandeur négative.

Construisons les diagrammes de Q et M. Puisque $\frac{P}{ql} = 0{,}2$, donc:

$$a = \frac{\sqrt{5{,}4} - 2}{2} l \approx 0{,}162l, \quad b = l - 2a \approx l(1 - 0{,}324) = 0{,}676l$$

$$\text{et } A = B = \frac{3}{2} 0{,}2ql + \frac{ql}{2} = 0{,}8ql.$$

Comme la charge répartie suivant la longueur de la poutre est uniforme, pour toutes les parties de la poutre le diagramme de Q est linéaire et le diagramme de M parabolique. Puisque la poutre est symétrique le diagramme de Q est antisymétrique et le diagramme de M symétrique.

Dans la section extrême gauche libre de la poutre $Q = -P = -0{,}2\ ql$.

Dans la section extrême droite de la console gauche nous avons:

$$Q = -P - qa \approx -(0{,}2 + 0{,}162)\, ql = -0{,}362ql.$$

Sur l'appui, en raison de la réaction A, le diagramme de Q a un saut de discontinuité. Par conséquent, à l'extrémité gauche de la travée de la poutre, entre les appuis:

$$Q = 0{,}362ql + 0{,}8ql = 0{,}438ql.$$

En s'approchant de la section moyenne de la poutre du côté gauche on obtient:

$$Q = -0{,}2ql + 0{,}8ql - 0{,}5ql = 0{,}1ql.$$

Avec les valeurs ainsi trouvées, on construit le diagramme de Q (fig. 55).

Dans la section extrême gauche libre de la poutre le moment fléchissant $M = 0$. Dans la section sur l'appui :

$$M_{app} \approx -0{,}2ql \cdot 0{,}162l - \frac{q}{2}(0{,}162l)^2 = -0{,}0455ql^2.$$

Au milieu de la poutre nous avons :

$$M_{max} = |M_{app}| = 0{,}0455ql^2.$$

La valeur de x_0 pour laquelle $M = 0$ dans la travée de la poutre est déterminée comme suit. La similitude des triangles implique :

$$\frac{Q_{x_0} - 0{,}1ql}{0{,}438ql - 0{,}1ql} = \frac{\frac{b}{2} - x_0}{\frac{b}{2}}$$

ou :

$$\frac{Q_{x_0} - 0{,}1ql}{0{,}338ql} = \frac{0{,}338l - x_0}{0{,}338l}.$$

d'où :

$$Q_{x_0} = (0{,}438l - x_0)\, q.$$

L'aire trapézoïdale du diagramme de Q de hauteur x_0 est égale à la variation de M entre la section sur l'appui et la section à une distance x_0 de l'appui, c'est-à-dire :

$$\frac{0{,}438ql - Q_{x_0}}{2} \cdot x_0 = 0{,}0455ql^2$$

ou :

$$(0{,}438l + 0{,}438l - x_0)\, x_0 = 0{,}091l^2,$$

d'où :

$$x_0^2 - 0{,}876lx_0 + 0{,}091l^2 = 0$$

et

$$x_0 = l\,(0{,}438 \pm \sqrt{0{,}438^2 - 0{,}091}) = l\,(0{,}438 \pm \sqrt{0{,}101}).$$

Puisque x_0 ne peut être plus grand que $\frac{b}{2} = 0{,}338l$, seule la racine $x_0 = l\,(0{,}438 - \sqrt{0{,}101}) \approx 0{,}122l$ donne la réponse au problème.

D'après les valeurs ainsi trouvées on construit le diagramme de M (fig. 55).

Exemple 28. Etant donnés: P et a (fig. 56, a); construire les diagrammes de Q et de M.

Solution. Puisque dans la section B passant par l'articulation suspendue le moment fléchissant est nul, la poutre peut être représentée par deux poutres (fig. 56, b); la poutre-jetée gauche AB et la poutre console droite BC.

L'extrémité droite B de la poutre-jetée s'appuie sur l'extrémité gauche libre B de la console. Ces deux poutres peuvent être considérées séparément (fig. 56, c). Dans la poutre-jetée la réaction des appuis $A = B = P$.

L'effet de la poutre-jetée sur la poutre console s'exprime par l'action d'une force concentrée $B = P$ agissant de haut en bas en son extrémité gauche.

Le problème ensuite se résout pour chaque poutre à part.

Dans la partie gauche de la poutre-jetée $Q = A = P$. Dans la partie moyenne $Q = 0$ et dans la partie droite $Q = -P$. $Q = -P$ pour la console. Le diagramme de Q est représenté fig. 56, d.

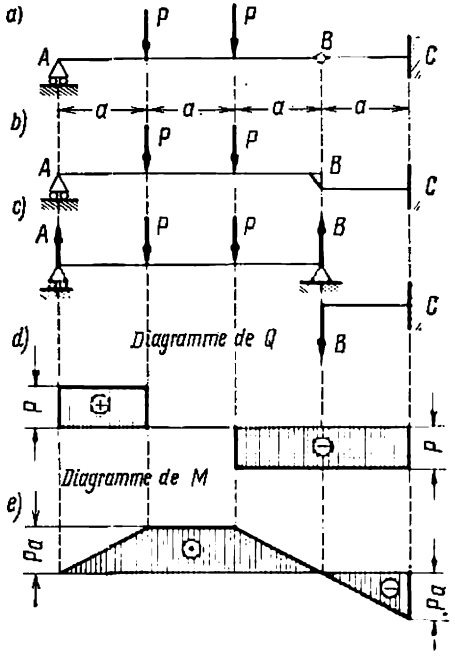


Fig. 56

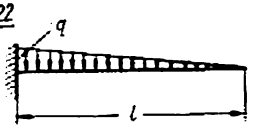
Dans les parties de la poutre où $Q = \text{const}$, le moment fléchissant varie linéairement, et pour la partie où $Q = 0$, $M = \text{const}$. Les variations de M dans les différentes parties sont aisément déterminées d'après les aires des diagrammes de Q. Le diagramme des moments fléchissants est représenté fig. 56, e.

Problèmes 222-270. Construire les diagrammes des efforts tranchants Q et des moments fléchissants M.

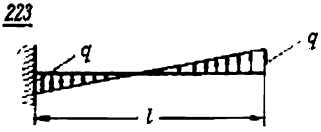
Dans les problèmes 251, 253, 255, 256 et 260 construire les diagrammes de Q et de M pour les longueurs avantageuses a des consoles.

Dans le problème 252 construire le diagramme de M sans calculer les réactions des appuis et les efforts tranchants Q.

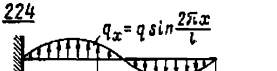
222



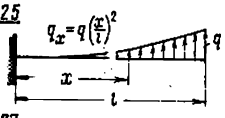
223



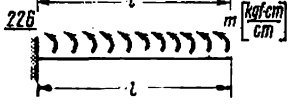
224



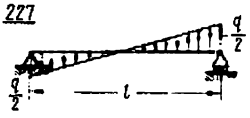
225



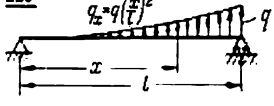
226



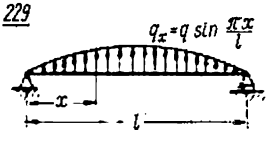
227



228

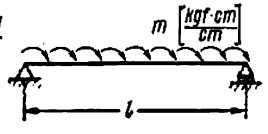


229

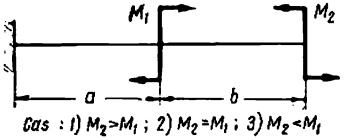


230

231

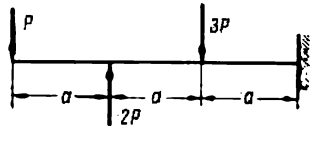


232

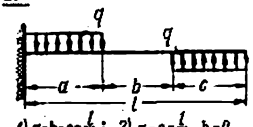


Cas : 1) $M_2 > M_1$; 2) $M_2 = M_1$; 3) $M_2 < M_1$

233

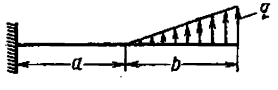


234

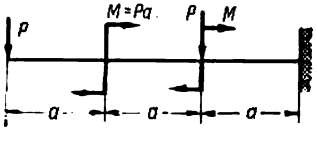


1) $a=b=c=\frac{l}{3}$; 2) $a=c=\frac{l}{2}$, $b=0$

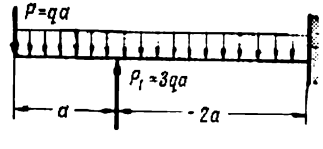
235



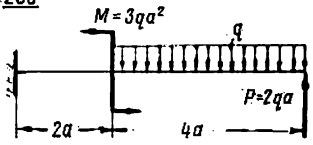
236



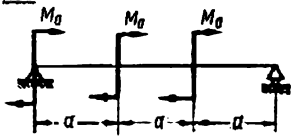
237



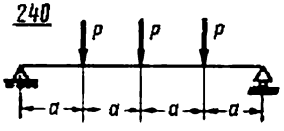
238



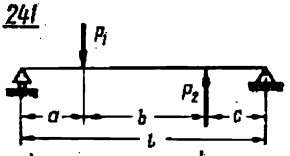
239



240

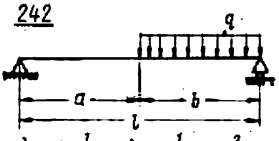


241



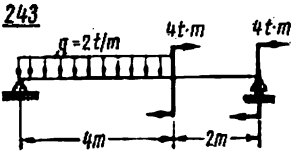
1) $P_1 = P_2 = P$, $a = b = c = \frac{l}{3}$
2) $P_1 = 2P_2$, $a = c$, $b = 2a$

242

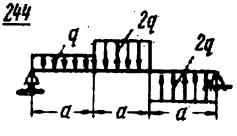


1) $a = b = \frac{l}{2}$; 2) $a = \frac{l}{4}$; $b = \frac{3}{4}l$;
3) $a = \frac{3}{4}l$, $b = \frac{l}{4}$

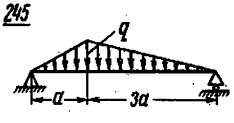
243



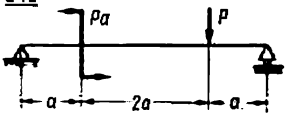
244



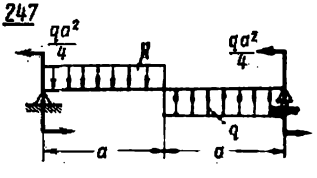
245



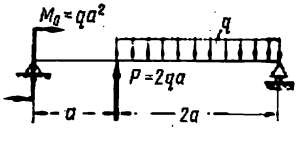
246



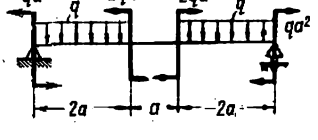
247



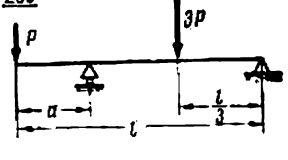
248



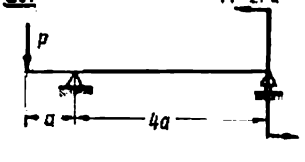
249



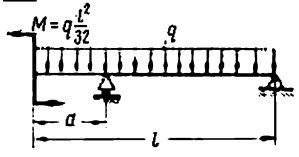
250



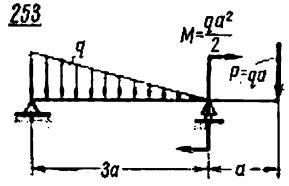
251



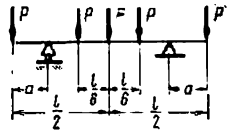
252



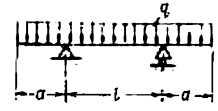
253



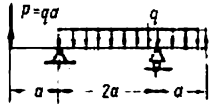
254



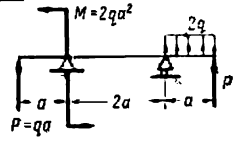
255



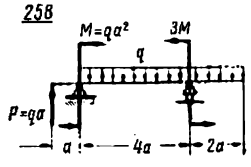
256



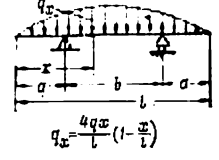
257



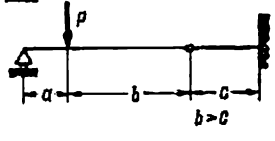
258



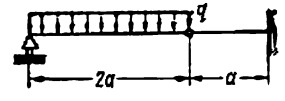
259



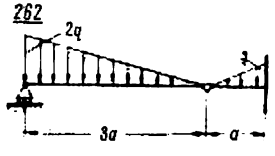
260



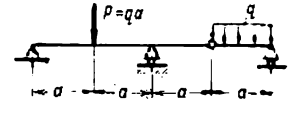
261



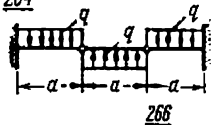
262



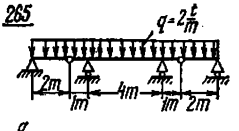
263



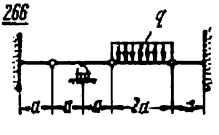
264

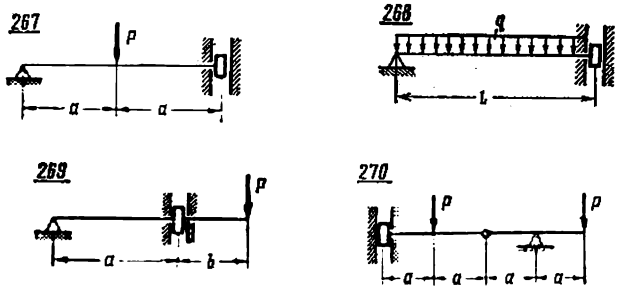


265



266





Construction graphique des diagrammes de Q et de M

On peut construire aussi les diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants par la méthode graphique. Cette méthode est particulièrement commode quand la poutre est soumise à un système complexe de forces extérieures.

Quand le dessin est exécuté soigneusement en échelles appropriées, l'exactitude des résultats obtenus par la méthode graphique est amplement suffisante pour la pratique. Cette méthode de construction des diagrammes de Q et de M est basée sur les propriétés bien connues en mécanique rationnelle du dynamique des forces parallèles et du funiculaire.

En déterminant graphiquement le moment fléchissant M_x et l'effort tranchant Q_x dans une section arbitraire de la barre, il faut tenir compte de l'échelle de longueur $\frac{1}{\xi}$ avec laquelle est dessinée la poutre (ξ cm de longueur de la poutre correspond à 1 cm sur le dessin) et de l'échelle des forces $\left(\frac{1}{\eta}\right)$ avec laquelle est dessiné le dynamique (η kgf de force correspond à 1 cm de longueur du vecteur dans le dynamique).

La distance polaire H dans le dynamique est évaluée en unités de force et le segment vertical y entre le funiculaire et sa ligne de fermeture dans la section considérée de la poutre en unités de longueur, les valeurs réelles de M_x et de Q_x seront donc :

$$M_x = y(\xi) H(\eta) \text{ kgf·cm}, \quad Q_x = \overline{Q}_x(\eta) \text{ kgf},$$

où Q_x est un vecteur dans le dynamique, correspondant à la somme algébrique des vecteurs de forces extérieures, se trouvant d'un côté de la section considérée de la poutre.

Les lignes de fermeture du funiculaire sont menées selon les règles suivantes, correspondant aux types de liaison de la poutre :

1) à l'extrémité libre de la poutre la ligne de fermeture est tangente au funiculaire :

2) à l'extrémité articulée de la poutre et à une articulation suspendue la ligne de fermeture coupe le funiculaire;

3) à un appui simple dans la travée de la poutre la ligne de fermeture a un point anguleux (les lignes de fermeture, quand on s'approche du côté droit et du côté gauche de la section se trouvant sur l'appui, se croisent).

En construisant, pour une charge donnée, le funiculaire et en menant les lignes de fermeture suivant les types de liaison de la poutre, on obtient le diagramme des moments fléchissants.

L'échelle de ce diagramme sera la quantité mettant en correspondance 1 cm de longueur du segment vertical du diagramme à H ($\xi\eta$) kgf·cm de moment fléchissant.

Avant de construire le diagramme des efforts tranchants, il est nécessaire de dessiner les vecteurs correspondant aux réactions sur les appuis. Dans le dynamique ces vecteurs sont interceptés par les parallèles à la ligne de fermeture du funiculaire menée du pôle. On construit le diagramme des efforts tranchants en transférant les vecteurs du dynamique aux points correspondants de la ligne des valeurs nulles de Q, parallèlement à l'axe géométrique de la poutre. L'échelle de ce diagramme sera la quantité mettant en correspondance 1 cm de longueur du segment vertical du diagramme η kgf d'effort tranchant.

Quand la poutre est soumise à une charge répartie, on la divise en tronçons par des lignes, perpendiculaires à son axe géométrique. On représente l'aire de chaque tronçon par un vecteur appliqué en son centre de gravité. A l'aide de ces vecteurs, considérés comme des vecteurs de charges concentrées, on construit et le dynamique et le funiculaire. On corrige le diagramme polygonal de M ainsi obtenu en inscrivant une courbe dans le polygone, et le diagramme en escalier de Q, en menant une courbe ou une droite (selon l'ordre de la charge répartie) passant par les points des segments horizontaux du diagramme en escalier se trouvant en face du commencement et de la fin de chaque tronçon de l'aire de la charge répartie.

Quand la poutre est soumise à des couples concentrés, ces couples M sont reportés sur le diagramme des moments fléchissants sous forme de segments verticaux de longueur $y = \frac{M}{H(\xi\eta)}$.

Par communauté avec la méthode analytique, dans la construction graphique des diagrammes de Q et de M, on admettra que les segments verticaux au-dessus de la ligne de fermeture du funiculaire pour M et au-dessus de la parallèle à l'axe géométrique de la poutre, considérée comme la ligne de valeurs nulles de Q, sont positifs.

Si l'on convient de s'approcher de la section considérée de la poutre du côté gauche et reporter dans le même ordre les vecteurs-charges sur le dynamique, pour obtenir sur les diagrammes les signes convenus pour M et Q le pôle doit se trouver du côté gauche du dynamique.

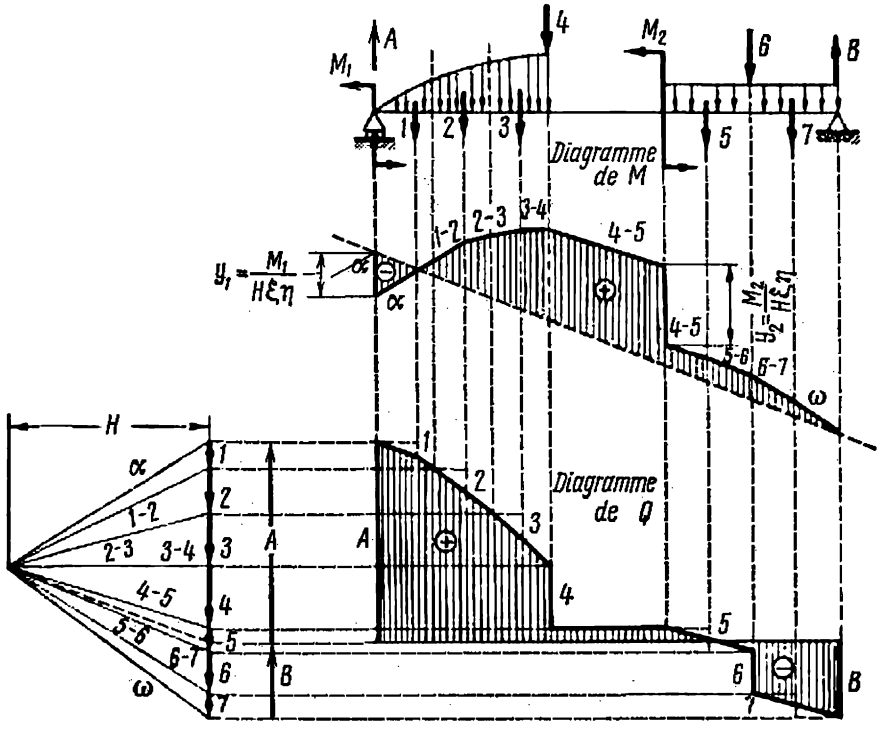

A
M1
4
M2
6
B
1
2
3
5
7
Diagramme de M
1-2
2-3
3-4
4-5
5-6
6-7
ω
α
y1 = M1 / Hξη
y2 = M2 / Hξη
H
A
B
Diagramme de Q

Fig. 57

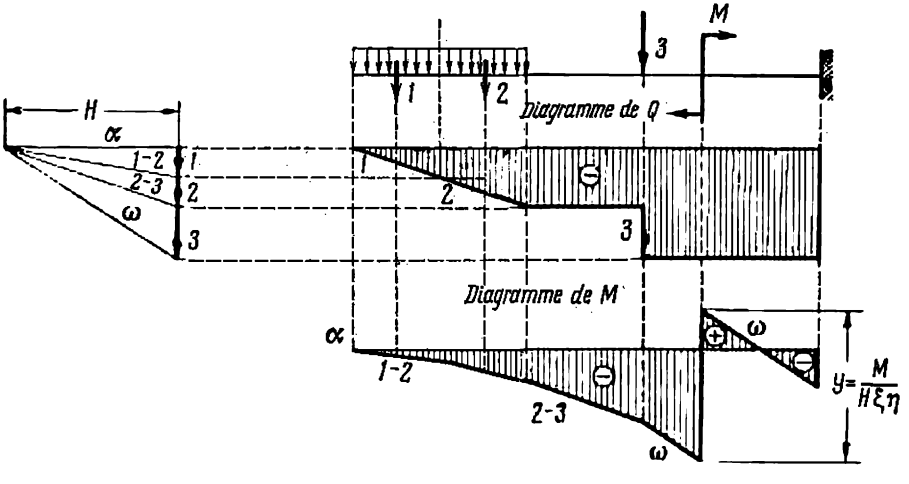

M
3
1
2
H
α
1-2
2-3
ω
Diagramme de Q
Diagramme de M
y = M / Hξη

Fig. 58

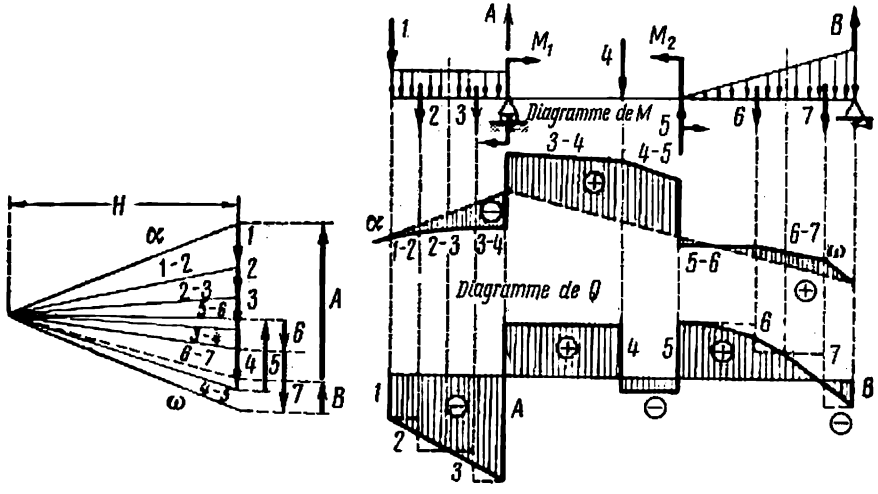

H
α
1-2
2-3
3-4
4-5
5-6
6-7
ω
A
B
M1
M2
Diagramme de M
Diagramme de Q

Fig. 59

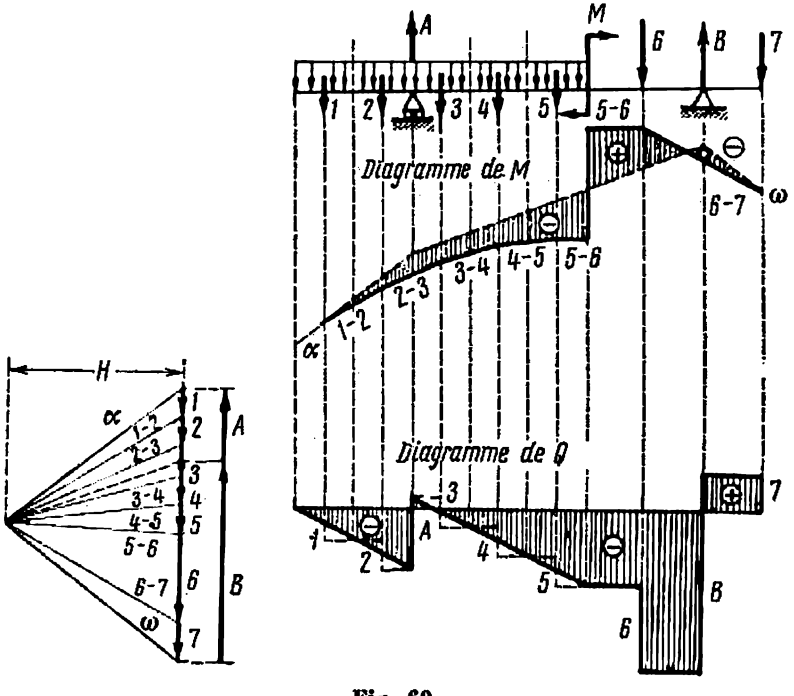

H
α
ω
A
B
M
Diagramme de M
Diagramme de Q

Fig. 60

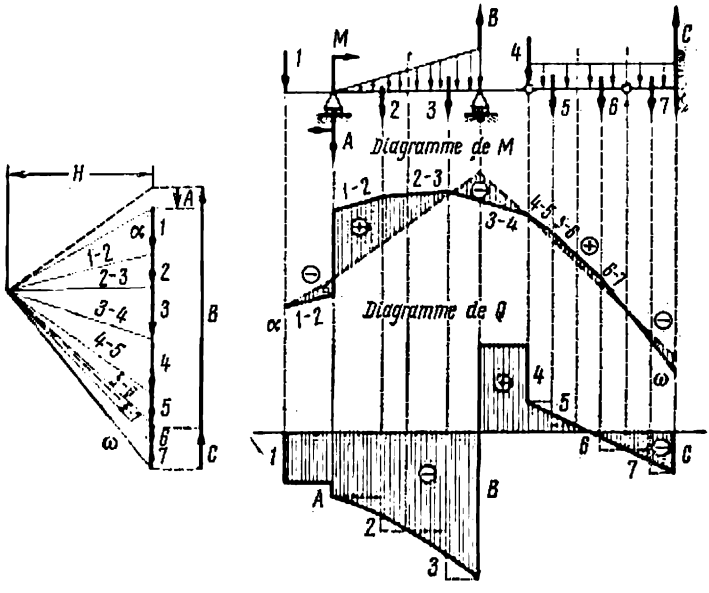


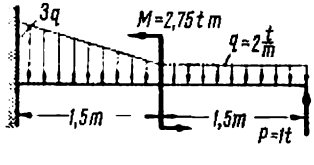
Fig. 61

La méthode de construction graphique des diagrammes de Q et de M pour les poutres, avec différents types de liaison et de charges, est donnée dans les exemples 29, 30, 31, 32 et 33.

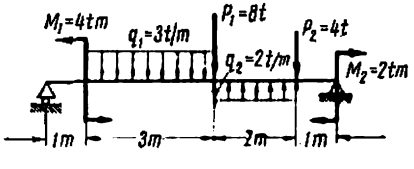
Exemple 29 (fig. 57).
Exemple 30 (fig. 58).
Exemple 31 (fig. 59).
Exemple 32 (fig. 60).
Exemple 33 (fig. 61).

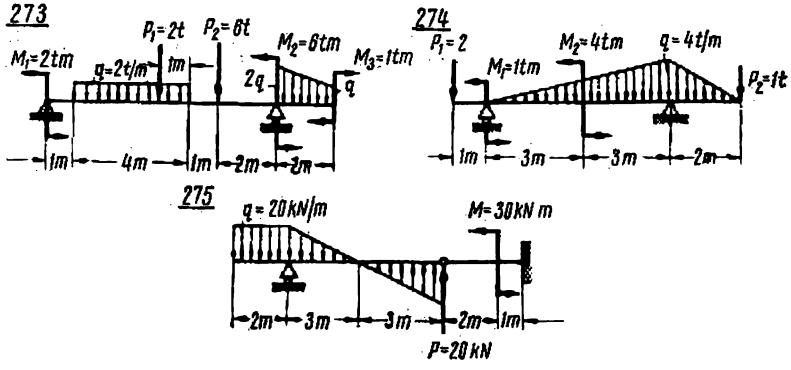
Problèmes 271-275. Construire graphiquement les diagrammes de l'effort tranchant Q et du moment fléchissant M.

271

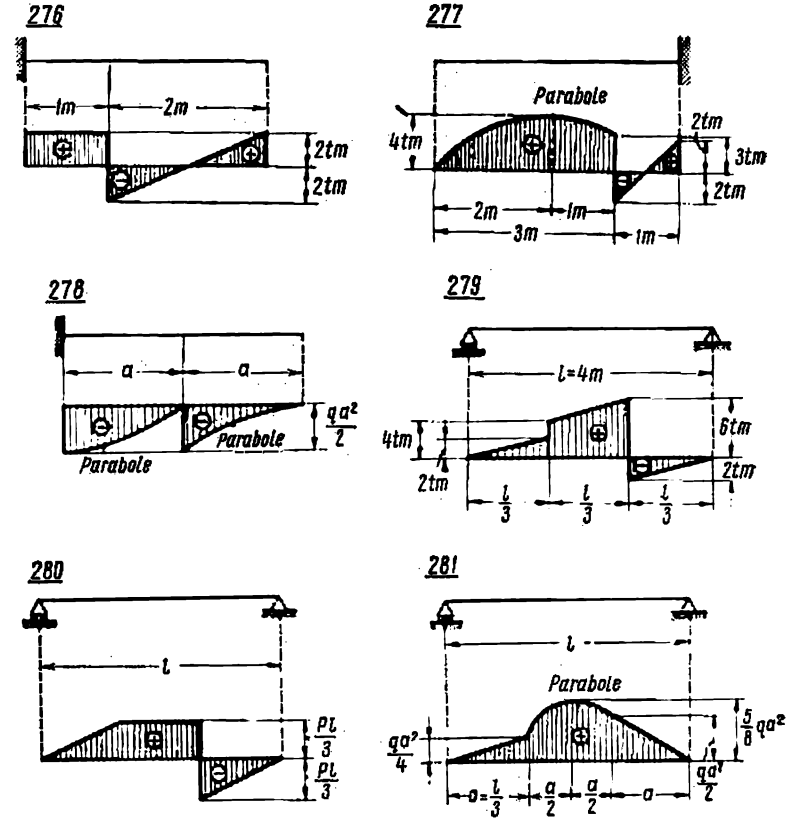


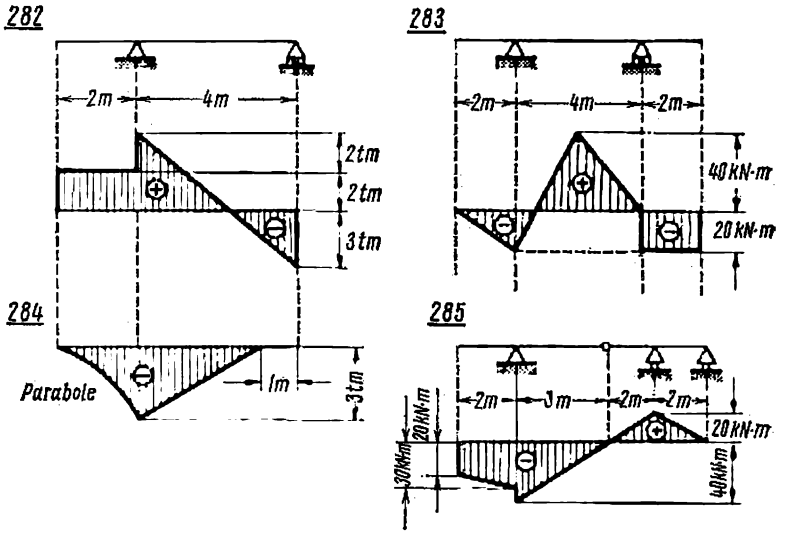
272





Problèmes 276-285. Construire les diagrammes des efforts tranchants Q et déterminer les charges, agissant sur la poutre, d'après les diagrammes donnés des moments fléchissants M.





§ 2. Contraintes normales et choix des dimensions de section droite de la poutre

On détermine la contrainte normale en un point arbitraire de la section droite d'une poutre en flexion par la formule:

$$\sigma = \frac{My}{I}, \tag{92}$$

où M est le moment fléchissant dans la section droite considérée;

I, le moment d'inertie de l'aire de cette section par rapport à l'axe neutre;

y, la distance du point considéré de la section à l'axe neutre.

Les maxima des contraintes normales de traction et de compression dans la section considérée correspondent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. On les détermine d'après les formules:

$$\sigma_{max} = \frac{My_1}{I} = \frac{M}{W_1}, \tag{93}$$

$$\sigma_{min} = -\frac{My_2}{I} = -\frac{M}{W_2}, \tag{94}$$

où y_1 et y_2 sont les distances à l'axe neutre des fibres les plus éloignées tendues ou comprimées;

$W_1 = \frac{I_1}{y_1}$ et $W_2 = \frac{I_2}{y_2}$, les modules de résistance équatoriaux ou axiaux de la section droite de la poutre (ou les modules

de résistance de la section droite de la poutre en flexion) respectivement pour les fibres tendues ou comprimées.

Si pour la section droite:

$$y_1 = y_2 = \frac{h}{2},$$

où h est la hauteur (par exemple, pour des sections symétriques par rapport à l'axe neutre, ou pour des sections dont le centre de gravité se trouve au milieu de la hauteur) on a:

$$W_1 = W_2 = W = \frac{2I}{h} \text{ et } \sigma_{max} = -\sigma_{min} = \frac{M}{W}.$$

On choisit les dimensions nécessaires de la section droite des poutres en flexion d'après les contraintes normales développées aux points les plus éloignés de l'axe neutre.

Pour les poutres dont les résistances en traction et en compression sont les mêmes, c'est-à-dire quand $[\sigma_t] = [\sigma_c]$, la formule de flexion permettant le choix de la section est

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma_f]}, \tag{95}$$

où W est le module de résistance minimal de la section droite de la poutre par rapport à l'axe neutre;

M_{max}, le moment fléchissant maximal en valeur absolue;

$[\sigma_f]$, la contrainte admissible en flexion du matériau de la poutre.

Les valeurs obtenues par la formule (95) ne doivent pas s'écarter de $\pm 5\%$. Des écarts plus importants sont permis, dans le sens de l'accroissement du coefficient de sécurité, quand on détermine les dimensions des sections des poutres laminées. Le calcul de résistance des poutres en matériaux dont les résistances en traction et en compression sont différentes s'effectue d'après les deux formules:

$$W_1 = \frac{M_{max}}{[\sigma_t]}, \tag{96}$$

$$W_2 = \frac{M_{max}}{[\sigma_c]}. \tag{97}$$

La condition rationnelle d'égale résistance du matériau de la poutre dans les fibres extrêmes de la section dangereuse implique une section droite symétrique par rapport à l'axe neutre de la poutre pour un matériau dont les résistances en traction et en compression sont les mêmes, et une section droite dissymétrique par rapport à l'axe neutre de la poutre pour un matériau dont les résistances en traction et en compression sont différentes. On doit de plus vérifier

que l'on a:

$$\frac{[\sigma_c]}{[\sigma_t]} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{y_2}{y_1}. \tag{98}$$

Outre la condition de résistance, la poutre doit aussi vérifier la condition d'économie.

Comme la résistance de la section droite de la poutre en flexion est définie par la valeur de son module de résistance W, et que son poids est proportionnel à l'aire de sa section droite F, on peut évaluer le degré d'économie de la section droite de la poutre par le rapport $\xi = \frac{W}{F^{3/2}}$, appelé *module de résistance spécifique*. Pour des aires égales plus ce rapport est grand, plus la section est économique.

Exemple 34. Calculer les dimensions nécessaires des sections circulaire, carrée, rectangulaire et en double té laminées; le rapport

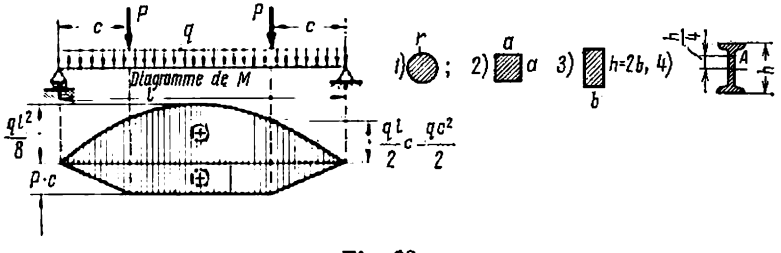


Fig. 62

des poids de ces poutres; la contrainte normale au point indiqué A sous la force pour la poutre en double té. On prendra: $q = 11$ kgf/cm; $P = 1$ t; $l = 4$ m; $c = 1$ m; $[\sigma_t] = 1\,600$ kgf/cm^2 (fig. 62).

Solution. Puisque la poutre est symétrique par rapport à la section moyenne, le moment fléchissant maximal sera dans cette section.

Le diagramme des moments fléchissants M pour une charge uniformément répartie est parabolique avec $M_{\max q} = \frac{ql^2}{8}$; le diagramme de M pour des forces concentrées est trapézoïdale avec $M_{\max P} = Pc$. Par conséquent:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + Pc = \frac{1{,}1 \cdot 4^2}{8} + 1 \cdot 1 = 3{,}2\ \text{t} \cdot \text{m}.$$

D'après la formule (95) la valeur exigée du module de résistance de la section est:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma_t]} = \frac{3{,}2 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} = 200\ \text{cm}^3.$$

1. Pour la section circulaire on a:

$$W_1 = \frac{\pi d^3}{32} = 200\,\text{cm}^3;\quad d = \sqrt[3]{\frac{6\,400}{\pi}} = 12{,}68\,\text{cm};$$

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4} = 126{,}8\,\text{cm}^2.$$

2. Pour la section carrée on a:

$$W_2 = \frac{a^3}{6} = 200\,\text{cm}^3;\quad a = \sqrt[3]{200 \cdot 6} = 10{,}63\,\text{cm};$$

$$F_2 = a^2 \approx 113\,\text{cm}^2.$$

3. Pour la section rectangulaire on a:

$$W_3 = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 200\,\text{cm}^3,\quad h = \sqrt[3]{2\,400} = 13{,}39\,\text{cm},$$

$$F_3 = bh = \frac{h^2}{2} = 89{,}6\,\text{cm}^2.$$

4. D'après le catalogue de l'assortiment des poutres en double té on a: pour le N° 20, $W = 184\,\text{cm}^3$; pour le N° 20^a, $W = 203\,\text{cm}^3$.

On vérifie la poutre N° 20:

$$\frac{\sigma_{max} - [\sigma_f]}{[\sigma_f]} 100 = \frac{\frac{M_{max}}{W_{N°20}} - \frac{M_{max}}{W}}{\frac{M_{max}}{W}} 100 = \frac{W - W_{N°20^a}}{W_{N°20}} 100 =$$

$$= \frac{200 - 184}{184} 100 = 8{,}7\%\ \text{surtension.}$$

Comme la surtension est supérieure à 5 %, on rejette la poutre en double té N° 20.

On vérifie la poutre N° 20^a.

$$\frac{\sigma_{max} - [\sigma_f]}{[\sigma_f]} 100 = \frac{W - W_{N°20^a}}{W_{N°20^a}} = \frac{200 - 203}{203} 100 =$$

$$= -1{,}5\%\ \text{sous-tension.}$$

Puisque dans le catalogue de l'assortiment il n'y a pas de numéro intermédiaire, donc, malgré une sous-tension importante, on prend la poutre N° 20^a, pour laquelle $F_4 = 28{,}9\,\text{cm}^2$, le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre $I = 2\,030\,\text{cm}^4$ et la hauteur $h = 20\,\text{cm}$.

Etant donné que le poids de la poutre est proportionnel à l'aire de sa section droite, le rapport des poids des poutres est égal au rapport des aires de leurs sections.

En prenant l'aire de la section circulaire comme unité, on aura $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 \approx 1 : 0{,}89 : 0{,}71 : 0{,}23$.

Ainsi, par exemple, la poutre en double té, même avec des dimensions plus grandes qu'exigées (on a admis une sous-tension de 1,5 %) est à peu près 4,4 fois plus légère que la poutre de section circulaire.

Déterminons le moment fléchissant dans la section de la poutre au droit de la force :

$$M = \frac{ql}{2} c - \frac{qc^2}{2} + Pc = \frac{1{,}1 \cdot 4 \cdot 1}{2} - \frac{1{,}1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 1 = \frac{5{,}3}{2} \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Au point A de cette section pour lequel $y = \frac{h}{4} = 5$ cm, la contrainte normale sera une contrainte de compression (la poutre fléchit vers le bas). On la calculera d'après la formule (92) :

$$\sigma_A = \frac{My}{I} = \frac{-5{,}3 \cdot 10^5 \cdot 5}{2 \cdot 2\,030} \approx -653 \text{ kgf/cm}^2.$$

Exemple 35. Pour le matériau de la poutre en U (fig. 63), on a $[\sigma_c] = 3\,[\sigma_t]$. Etant donnés : $b = 20$ cm et $t = 1$ cm ; calculer la hauteur rationnelle h de la section.

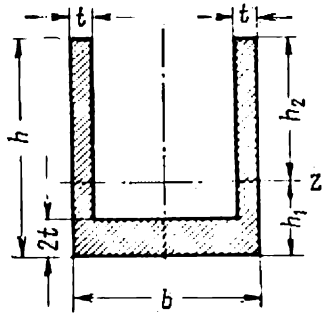


Fig. 63

Solution. Soient z l'axe neutre de la poutre, h_1 et h_2 les distances des fibres extrêmes à cet axe. D'après la condition d'utilisation rationnelle du matériau (98) (condition d'égale résistance des fibres extrêmes), on a :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{3}.$$

Puisque

$$h_1 + h_2 = h, \quad h_1 = \frac{h}{4} \text{ et } h_2 = \frac{3}{4} h.$$

L'axe neutre z est aussi l'axe central, et le moment statique de l'aire de la section par rapport à l'axe z doit être nul, c'est-à-dire :

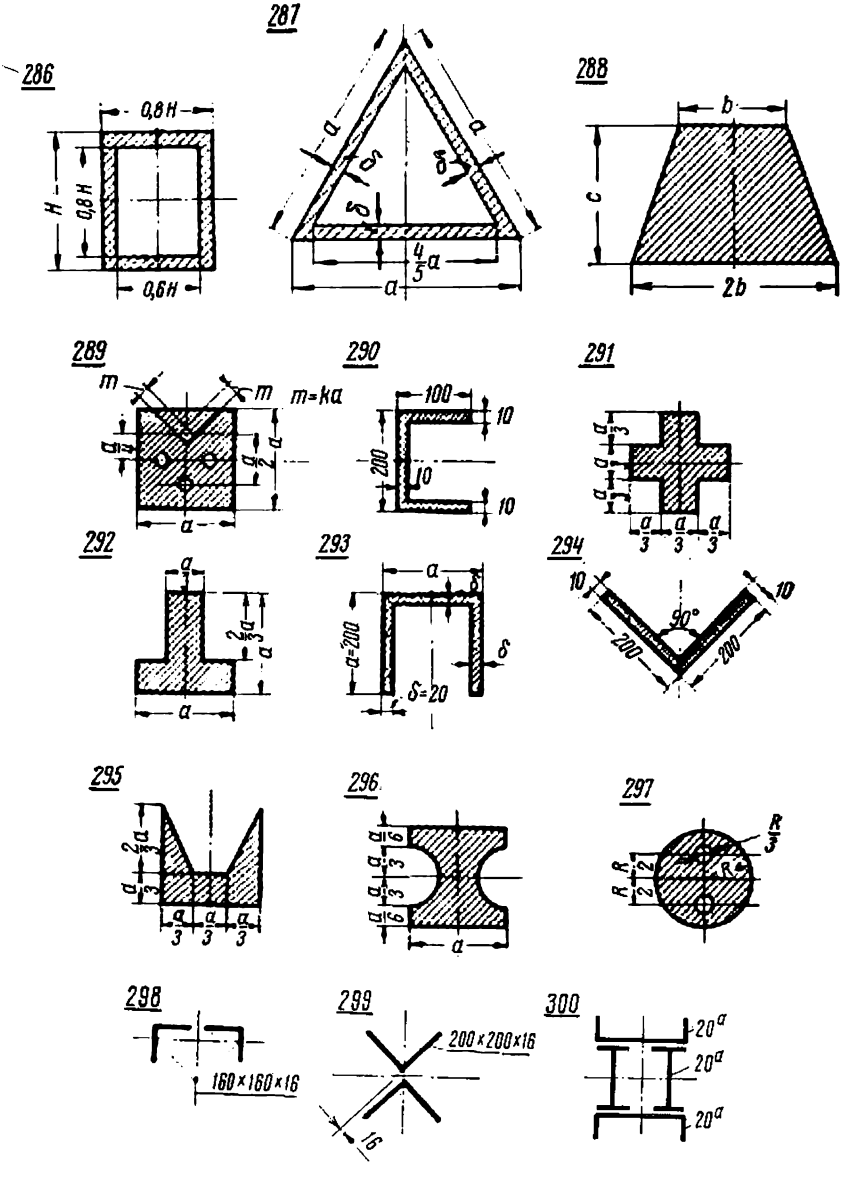
$$S_z = -(b - 2t)\, 2t \left(\frac{h}{4} - t \right) + 2ht \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{4} \right) =$$

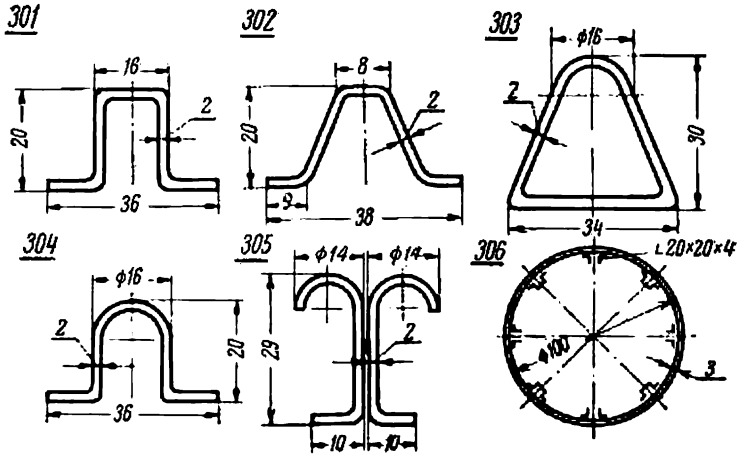
$$= -36 \left(\frac{h}{4} - 1 \right) + \frac{h^2}{2} = 0.$$

D'où l'on tire :

$$h^2 - 18h + 72 = 0 \text{ et } h = 9 \pm \sqrt{9} = 9 \pm 3.$$

Par conséquent, la hauteur h de la section doit être égale à 6 ou à 12 cm.





Problèmes 286-306. Calculer les modules de résistance axiaux W_z (z est l'axe central horizontal) des sections droites des poutres. Les données du problème 306 sont celles du problème 301.

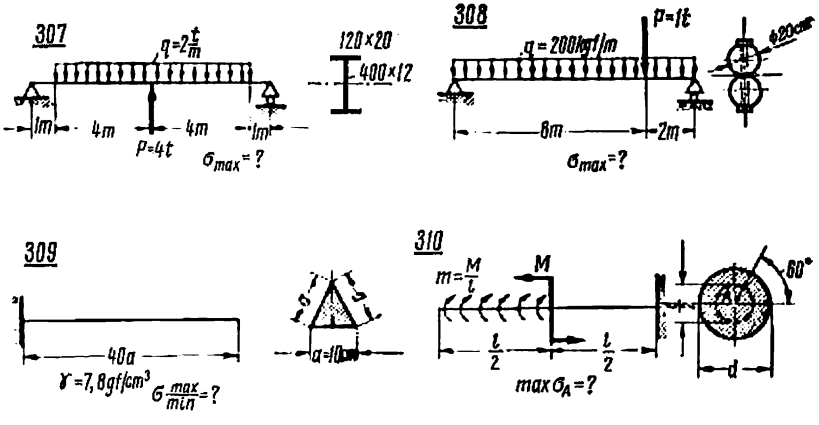
Problèmes 307-313. Calculer les contraintes normales aux points des sections droites des poutres (les points et les sections sont indiqués dans les données des problèmes).

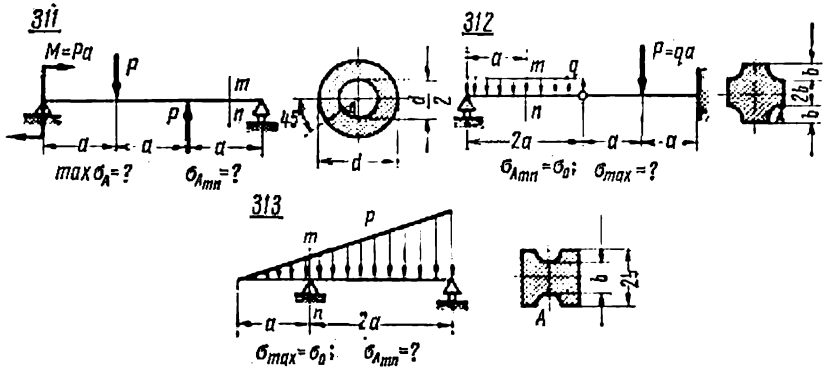
Notations: $\sigma_{\substack{\max \\ \min}}$ sont les contraintes maximale et minimale dans la section dangereuse;

$\max \sigma_A$ la contrainte normale au point A de la section dangereuse;

$\sigma_{A_{mn}}$ la contrainte normale au point A de la section mn,

γ le poids spécifique du matériau de la poutre.



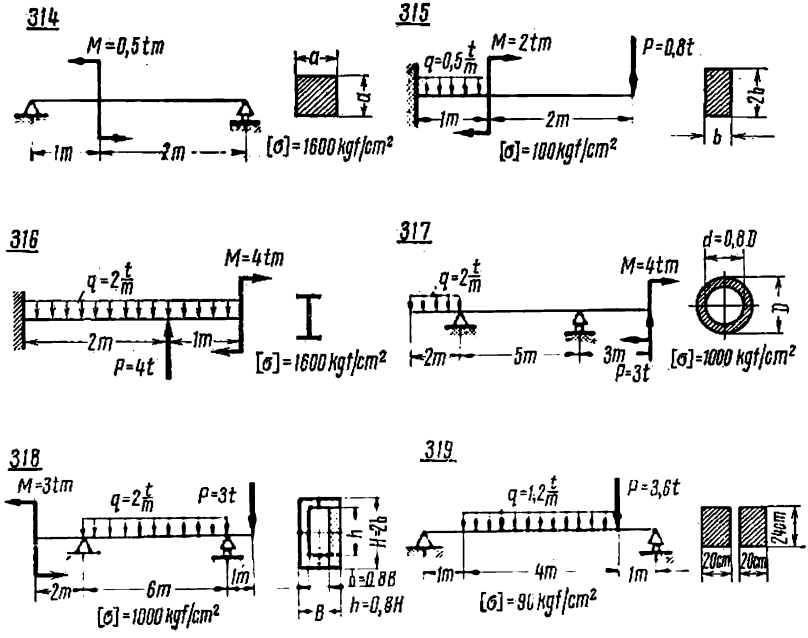


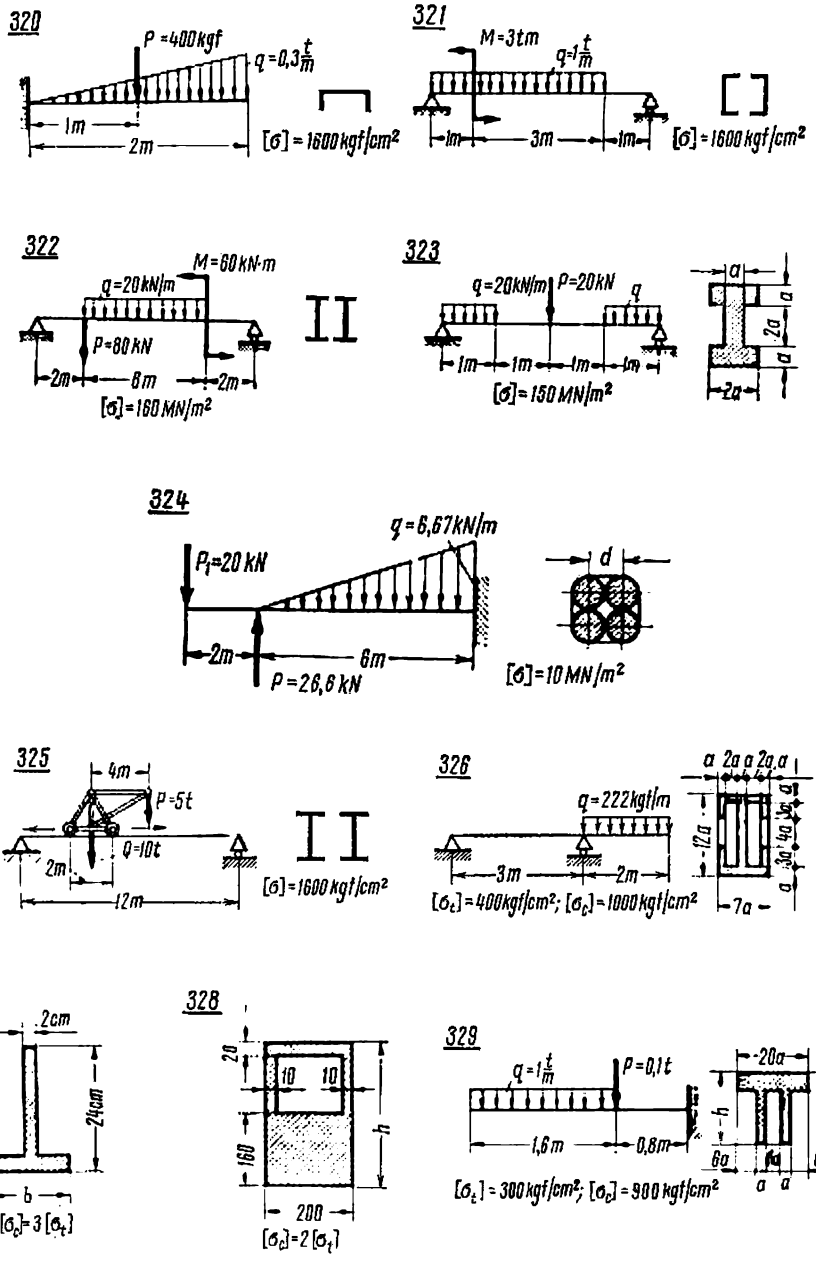
Problèmes 314-329. Choisir les dimensions nécessaires des sections droites des poutres.

Dans le problème 319 déterminer le nombre nécessaire de poutres, montées parallèlement, de sections rectangulaires et de dimensions données.

Dans le problème 325 choisir les numéros des poutres en double té pour la position la plus défavorable des charges mobiles.

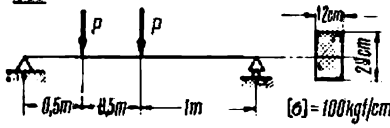
Dans les problèmes 327-328 calculer les dimensions b et h d'après la condition d'égale résistance des fibres tendues et comprimées.





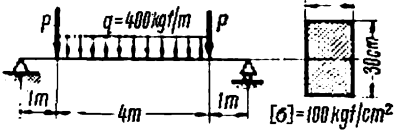
Problèmes 330-342. Déterminer les valeurs des charges admissibles agissant sur les poutres de dimensions données.

330



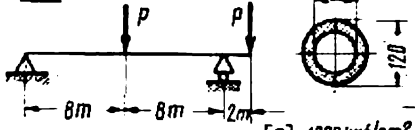
[σ]=100kgf/cm²

331



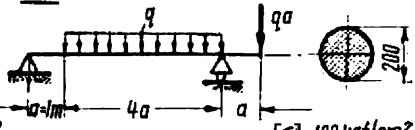
[σ]=100 kgf/cm²

332



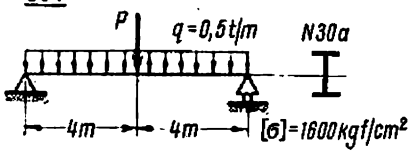
[σ]=1000 kgf/cm²

333



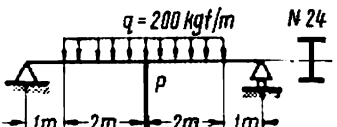
[σ]=100 kgf/cm²

334



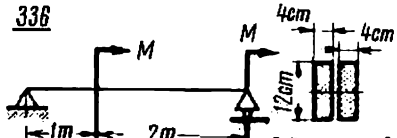
[σ]=1600 kgf/cm²

335



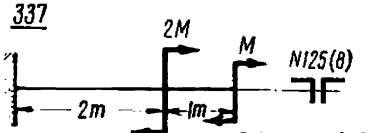
[σ]=1400 kgf/cm²

336



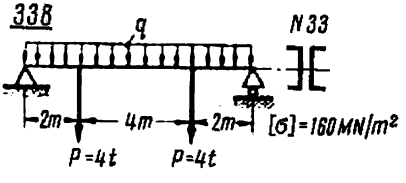
[σ]=10 MN/m²

337



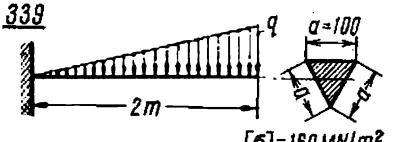
[σ]=160 MN/m²

338



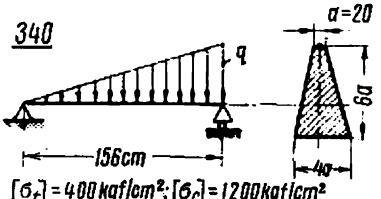
[σ]=160 MN/m²

339



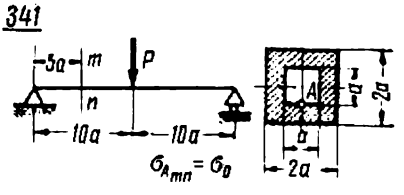
[σ]=160 MN/m²

340



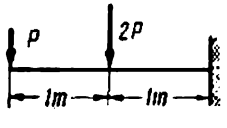
$[\sigma_t]=400\ kgf/cm^2$; $[\sigma_c]=1200\ kgf/cm^2$

341

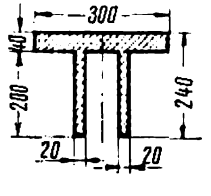


$\sigma_{A_{mn}}=\sigma_0$

342



$[\sigma_t]=480\ kgf/cm^2$, $[\sigma_c]=1200\ kgf/cm^2$



§ 8. Contraintes tangentielles, centre de flexion et vérification de la résistance des poutres aux contraintes tangentielles

En un point arbitraire d'une section droite rectangulaire de la poutre (fig. 64), la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par la formule de D. I. Jouravski :

$$\tau = \frac{QS}{bI}, \tag{99}$$

où Q est l'effort tranchant dans la section considérée ;

$S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$ le moment statique par rapport à l'axe neutre z de la partie de l'aire de la section située au-dessus de y où est déterminée la contrainte ;

b la largeur de la section ;

$I = \frac{bh^3}{12}$ le moment d'inertie de l'aire de la section par rapport à l'axe z.

La contrainte tangentielle atteint la valeur maximale aux points de l'axe neutre. Elle est égale à :

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}, \tag{100}$$

où $F = bh$ est l'aire de la section droite de la barre.

On peut utiliser aussi la formule (99) pour calculer approximativement les composantes des contraintes tangentielles perpendiculaires à l'axe neutre dans les poutres de section non rectangulaires, si b est la largeur de la section au niveau du point considéré. Les résultantes des contraintes tangentielles aux points du contour de la section sont dirigées suivant la tangente au contour de la sec-

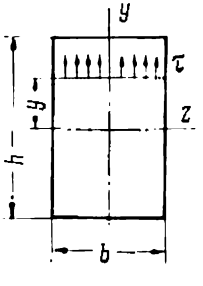


Fig. 64

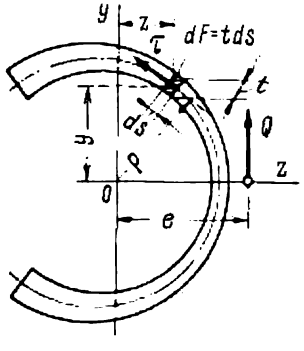


Fig. 65

tion, et aux autres points de la section elles sont inclinées par rapport au plan d'action des forces.

Le calcul exact des contraintes tangentielles dans les poutres de sections arbitraires est très compliqué. Le calcul approché est basé sur quelques hypothèses relatives aux directions des contraintes tangentielles dans la section.

Pour les poutres à sections droites en forme de profil ouvert à paroi mince (fig. 65), on admet que les contraintes tangentielles sont dirigées suivant la tangente à la ligne moyenne de paroi de la section et sont uniformément réparties suivant la direction normale (t) à celle-ci. La formule donnant la valeur de la contrainte tangentielle dans ce cas est:

$$\tau = \frac{QS}{tI}, \tag{101}$$

où S est le moment statique par rapport à l'axe neutre z de la partie de la section, située d'un côté de la normale t à la ligne moyenne au niveau y du point considéré.

La dissymétrie de la section de la poutre par rapport à l'axe principal central y, perpendiculaire à l'axe neutre z, donne naissance à des contraintes tangentielles qui créent dans cette section un moment de torsion. Pour prévenir la torsion de la poutre, il faut appliquer l'effort tranchant non pas au centre de gravité de la section, mais en un point appelé *centre de flexion* de la section.

La détermination de la position du centre de flexion d'une poutre de section droite de forme arbitraire est très difficile. Pour une section à parois minces, symétrique par rapport à l'axe neutre z (fig. 65), le centre de flexion est situé sur l'axe z à une distance

$$e = \frac{1}{I} \int_F \frac{S}{t} \rho \, dF \tag{102}$$

du centre de gravité de la section; dans cette formule ρ est le bras de levier de l'effort tangentiel élémentaire τdF par rapport au centre de gravité de la section; F l'aire de toute la section.

Quand l'épaisseur t de la paroi du profil est constante, la formule (102) prend la forme simple:

$$e = \frac{1}{I^s} \int_s S^{s'} \rho \, ds. \tag{103}$$

Dans cette formule I^s est le moment d'inertie équatorial de l'arc s de la ligne moyenne de toute la section par rapport à l'axe z;

$S^{s'}$ le moment statique par rapport à l'axe z de l'arc s' de la ligne moyenne de la partie de la section située d'un côté du niveau y d'un point arbitraire.

L'intégration s'effectue non pas suivant l'aire de la section, mais suivant l'arc s.

Si le profil de la section est composé de plusieurs parties d'épaisseurs différentes mais constantes t, la quantité e peut être calculée par sommation d'expressions (102), écrites pour chaque partie.

On vérifie la résistance de la poutre au cisaillement aux points où la contrainte tangentielle est maximale dans la section soumise à l'effort tranchant maximal en valeur absolue Q_{max}.

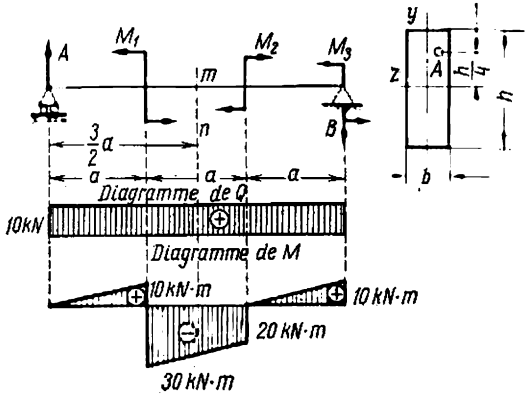


Fig. 66

La vérification doit se faire pour les poutres courtes, pour les poutres à parois minces et de grande hauteur, pour les poutres dont les matériaux résistent mal au cisaillement, et pour les poutres supportant des charges importantes aux voisinages des appuis.

La formule de vérification est:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_0}{b_0 I} \leqslant [\tau], \qquad (104)$$

où S_0 est le moment statique par rapport à l'axe neutre de la partie de la section droite située du côté de la ligne d'action de τ_{max};

b_0 est la largeur de la section à la ligne d'action de τ_{max}.

Pour la plupart des sections à vérifier τ_{max} agit aux points de l'axe neutre.

On prend généralement la valeur de la contrainte tangentielle admissible $[\tau]$ égale à 0,5-0,7 de $[\sigma]$. Par exemple, pour les aciers Ac OC et Ac 2, $[\tau] = 900$ kgf/cm², pour Ac 3, $[\tau] = 1\,000$ kgf/cm²; pour le pin et le sapin $[\tau] = 20$ kgf/cm².

Exemple 36. Calculer σ_A et τ_A dans la section mn (fig. 66). On prendra: $M_1 = 40$ kN·m, $M_2 = 20$ kN·m, $M_3 = 10$ kN·m, $a = 1$ m, $b = 4$ cm, $h = 12$ cm.

Solution. Les réactions aux appuis sont:

$$A = B = \frac{M_1 - M_2 + M_3}{3a} = \frac{40 - 20 + 10}{3} = 10\,\text{kN}.$$

Les diagrammes de Q et de M sont représentés fig. 66.

Dans la section mn:

$$M = -\frac{30 + 20}{2} = -25\,\text{kN}\cdot\text{m};\quad Q = 10\,\text{kN}.$$

Le point A est situé dans la zone tendue de la section, on a donc d'après la formule (92):

$$\sigma_A = \frac{|M|y}{I}.$$

Pour une section rectangulaire:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 12^3}{12} = 576\,\text{cm}^4.$$

Pour le point considéré A:

$$y = \frac{h}{4} = 3\,\text{cm}.$$

C'est pourquoi:

$$\sigma_A = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 0{,}03}{576 \cdot 10^{-8}} \approx 130 \cdot 10^6\,\text{N/m}^2 = 130\,\text{MN/m}^2.$$

D'après la formule (99):

$$\tau_A = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{6Q}{h^3 b}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right) =$$

$$= \frac{9}{8}\frac{Q}{bh} = \frac{9}{8} \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{0{,}04 \cdot 0{,}12} = 2{,}34 \cdot 10^6\,\text{N/m}^2 = 2{,}34\,\text{MN/m}^2.$$

Exemple 37. Construire le diagramme des contraintes tangentielles conventionnelles perpendiculaires à l'axe neutre (d'après la formule de Jouravski) (fig. 67). On prendra: $Q = 8$ t, $h = 12$ cm, $h_0 = 8$ cm, $b = 6$ cm, $b_0 = 4$ cm.

Solution. On détermine les valeurs de la contrainte tangentielle aux points *1* des fibres extrêmes de la section, aux points *2* des fibres extrêmes de la cavité, aux points *3* les plus éloignés de l'axe neutre sur les parois de la cavité et aux points *4* sur l'axe neutre z (fig. 67).

Pour cela, on utilise la formule (99).

Le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre z de l'aire de la section de forme donnée est:

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_0 h_0^3}{12} = \frac{1}{12}(6 \cdot 12^3 - 4 \cdot 8^3) = \frac{2\,080}{3}\ \text{cm}^4.$$

Pour les points *1*:

$S_{(1)} = 0$, par conséquent, $\tau_{(1)} = 0$.

Pour les points *2*:

$$S_{(2)} = b\frac{h - h_0}{2}\left(\frac{h}{2} - \frac{h - h_0}{4}\right) = 6 \cdot 2\,(6 - 1) = 60\ \text{cm}^3,$$

par conséquent:

$$\tau_{(2)} = \frac{QS_{(2)}}{bI} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 3}{6 \cdot 2\,080} \approx 115{,}4\ \text{kgf/cm}^2.$$

La largeur de la section aux points *3* est égale à $b - b_0$, donc:

$$\tau_{(3)} = \frac{QS_{(2)}}{(b - b_0)I} = \tau_{(2)}\frac{b}{b - b_0} \approx$$

$$\approx 115{,}4 \cdot \frac{b}{2} = 346{,}2\ \text{kgf/cm}^2.$$

Pour les points *4*:

$$S_{(4)} = S_{(2)} + (b - b_0)\frac{h_0}{2} \cdot \frac{h_0}{4} =$$

$$= 60 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 76\ \text{cm}^3$$

et

$$\tau_{(4)} = \frac{QS_{(4)}}{(b - b_0)I} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 76 \cdot 3}{2 \cdot 2\,080} \approx$$

$$\approx 438{,}5\ \text{kgf/cm}^2.$$

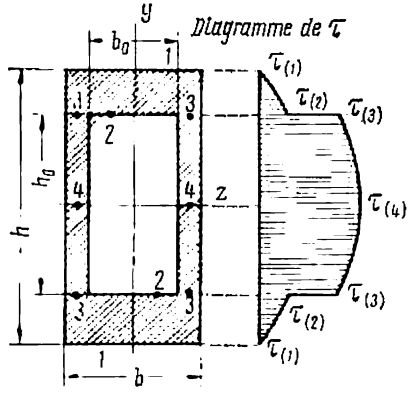


Fig. 67

D'après les résultats obtenus on construit le diagramme de τ (fig. 67).

Exemple 38. Etant donnée une section à paroi mince ayant la forme d'une portion d'anneau circulaire d'angle au centre 2α, de rayon de la ligne moyenne r et d'épaisseur constante t (fig. 68). Déterminer la position du centre de flexion A sur l'axe neutre z.

Solution. Le dessin montre que l'élément d'arc de la ligne moyenne de l'anneau $ds = rd\varphi$; l'élément d'aire de la paroi de l'anneau est $dF = tds = rtd\varphi$; les coordonnées du centre de gravité de

l'élément d'aire $d\,F$ dans le système d'axes centraux yoz sont:

$$y = r\sin\varphi, \qquad z = r\cos\varphi - a,$$

b est la distance de l'axe y à l'axe y' passant par le centre de courbure O_1 de la section.

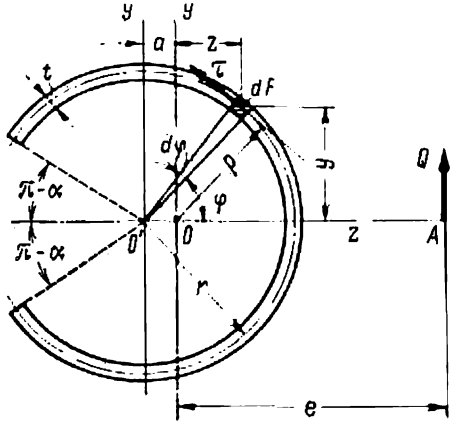


Fig. 68

On détermine la position du centre de gravité O de la section sur l'axe z. Puisque l'axe y est l'axe central de la section, le moment statique de l'aire de la section sera:

$$S_y = \int_F z\,dF = 2rt\int_0^{\alpha}(r\cos\varphi - a)\,d\varphi = 2rt\,(r\sin\alpha - a\alpha) = 0.$$

D'où:

$$a = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}.$$

Le bras de levier ρ de l'effort tangentiel $\tau t ds$ par rapport au centre de gravité de la section est égal à:

$$\rho = r - a\cos\varphi = r\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi\right).$$

Le moment d'inertie I^s de l'arc de la ligne moyenne de la section par rapport à l'axe neutre z est:

$$I^s = \int_s y^2\,ds = 2r^3\int_0^{\alpha}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{r^3}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Le moment statique $S^{s'}$ par rapport à l'axe z de la partie de l'arc de la ligne moyenne, située du côté d'un élément arbitraire défini par l'angle φ, est :

$$S^s = \int_{s'} y\,ds = r^2 \int_{\varphi}^{\alpha} \sin\varphi\,d\varphi = r^2(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

D'après la formule (103), la distance e du centre de flexion A au centre de gravité est :

$$e = \frac{1}{I^s}\int_s S^{s'}\rho\,ds = \frac{2}{r^2(2\alpha - \sin 2\alpha)} \times$$

$$\times\, 2\cdot r^4 \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi\right)\cdot(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\varphi,$$

ou

$$e = \frac{2r}{2\alpha - \sin 2\alpha}\left(\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha + \frac{1}{\alpha}\sin^2\alpha\cos\alpha\right).$$

La distance du centre de courbure O' de la section au centre de flexion A est :

$$a + e = \frac{r}{\alpha}\sin\alpha + \frac{2r}{2\alpha - \sin 2\alpha} \times$$

$$\times\left(\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha}\sin^2\alpha\cos\alpha\right) =$$

$$= r\,\frac{4(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

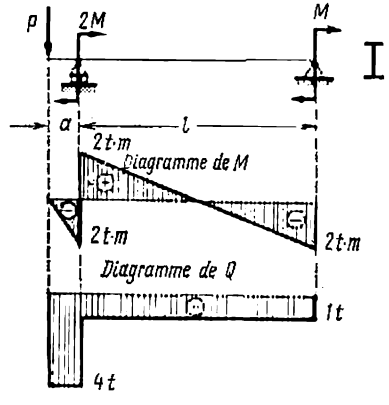


Fig. 69

Exemple 39. Déterminer le numéro de la poutre en double té. On prendra : $P = 4$ t, $M = 2$ t·m, $a = 0{,}5$ m, $l = 4$ m, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm², $[\tau] = 1\,000$ kgf/cm² (fig. 69).

Solution. On construit aisément, sans calculs, le diagramme des moments fléchissants M, comme cela est indiqué fig. 69.

Dans la console $Q = \text{const} = -4$ t. Dans la travée de la poutre entre les appuis $Q = \text{const} < 0$; le diagramme de M donne :

$$\Delta M = 2\,\text{t·m} = -Q\cdot 2\,\text{m}.$$

D'où

$$Q = -1\text{ t}.$$

Le diagramme de Q est représenté fig. 69. Donc:

$$M_{max} = 2\text{ t}\cdot\text{m}, \quad |Q|_{max} = 4\text{ t}.$$

D'après la formule on a:

$$W = \frac{M_{max}}{|\sigma|} = \frac{2\cdot 10^5}{16\cdot 10^2} = 125\text{ cm}^3$$

Le catalogue de l'assortiment donne: pour la poutre en double té N° 16, $W = 109$ cm³, pour N° 18, $W = 143$ cm³. On vérifie la poutre en double té N° 16:

$$\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]}\cdot 100 = \left(\frac{125}{109} - 1\right)\cdot 100 \approx 15\% \text{ (surtension)}.$$

On vérifie la poutre N° 18:

$$\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]}\cdot 100 = \left(\frac{125}{143} - 1\right)\cdot 100 \approx -12{,}5\% \text{ (sous-tension)}.$$

On choisit la poutre en double té N° 18; pour cette poutre on trouve:

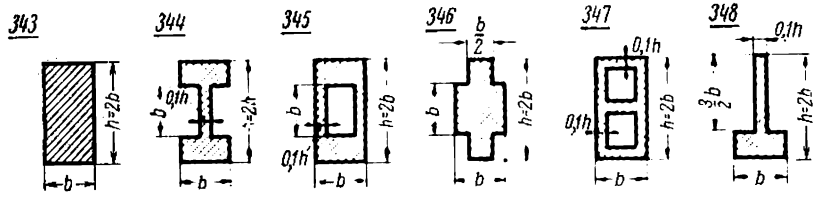
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{2\cdot 10^5}{143} \approx 1\,400\text{ kgf/cm}^2.$$

D'après le catalogue de l'assortiment $S = 81{,}4$ cm³; $I = 1\,290$ cm⁴; $d = 0{,}51$ cm.
Par conséquent:

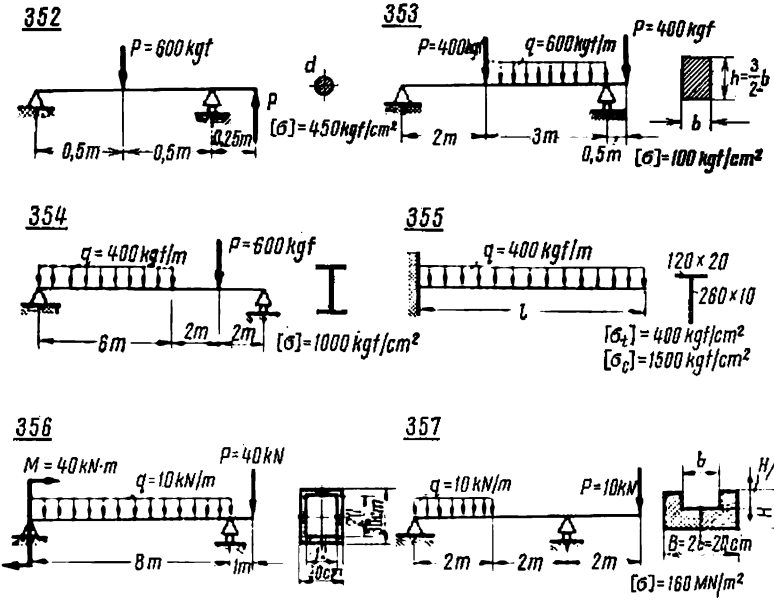
$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}S}{dI} = \frac{4\cdot 10^3\cdot 81{,}4}{0{,}51\cdot 1\,290} \approx 495\text{ kgf/cm}^2 < [\tau]$$

et la poutre en double té N° 18 choisie résistera et aux contraintes normales et aux contraintes tangentielles.

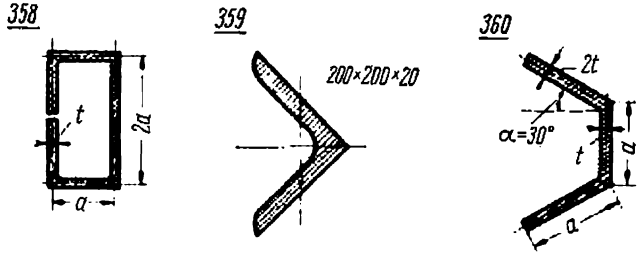
Problèmes 343-351. Construire les diagrammes des contraintes tangentielles τ, perpendiculaires à l'axe neutre (horizontal), en prenant comme unité la valeur maximale $\tau_{max} = \tau_0$ pour les formes indiquées de la section droite de la poutre.

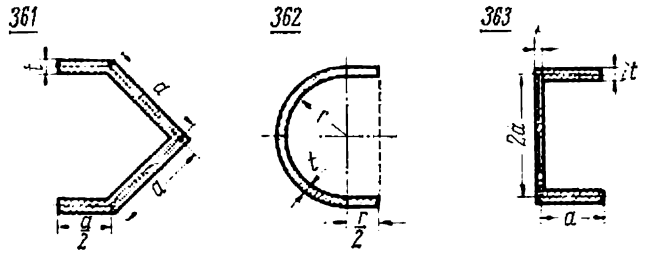


Problèmes 352-357. Déterminer les contraintes tangentielles maximales τ_{max} après avoir établi au préalable (là où cela est nécessaire) les dimensions nécessaires des poutres ou les charges de sécurité d'après les valeurs admissibles données de la contrainte normale.



Problèmes 358-363. Calculer la distance *e* du centre de flexion au centre de gravité de la section (on admet que les sections sont à parois minces).





§ 4. Contraintes principales et vérification totale de la résistance de la poutre

En un point arbitraire de la section droite d'une poutre, situé à une distance y de l'axe neutre z, les contraintes normales σ et tangentielles τ sont calculées par les formules (92) et (99).

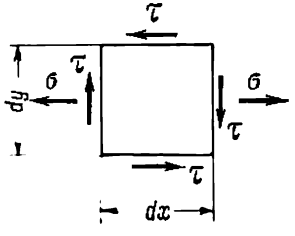


Fig. 70

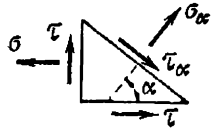


Fig. 71

Un élément contenant ce point et dégagé par deux sections droites infiniment voisines distantes de dx, et par deux sections longitudinales infiniment voisines, parallèles à la surface neutre et distantes de dy, est dans un état de contrainte plan du type indiqué fig. 70.

Les valeurs des contraintes normales σ_α et tangentielles τ_α dans le plan incliné de la section passant par ce point (fig. 71) sont:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cos^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Deux plans inclinés rectangulaires seront les plans principaux de contrainte au point considéré de la poutre, si:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}. \tag{106}$$

Les valeurs des contraintes principales σ_1 et σ_3 sont données par la formule:

$$\sigma_{\substack{1\\3}} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right). \tag{107}$$

Les valeurs des contraintes tangentielles extrémales sont données par la formule :

$$\tau_{\substack{\max\\ \min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \tag{108}$$

La détermination graphique des valeurs et des directions des contraintes principales pour les quatre variantes possibles d'état de contrainte des éléments dégagés de la poutre est indiquée fig. 72.

Si une même section droite est simultanément soumise à un moment fléchissant et à un effort tranchant maximaux ou à un

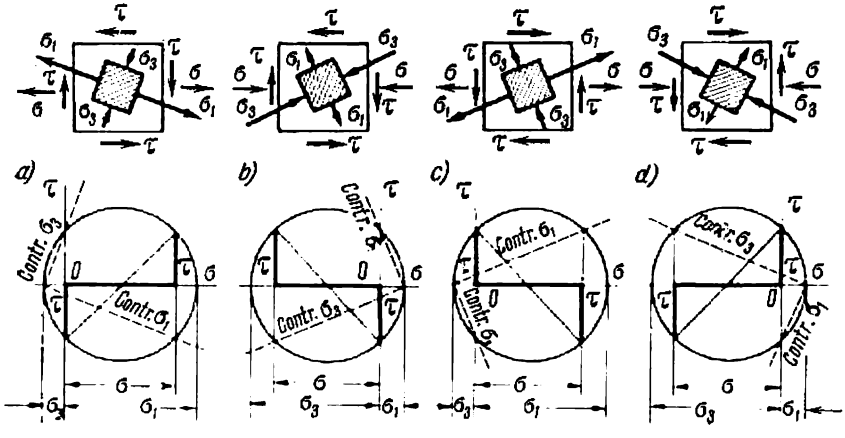


Fig. 72

moment fléchissant M et un effort tranchant Q dont les valeurs sont voisines des valeurs maximales, la résistance de la poutre pour cette section est vérifiée par rapport aux contraintes principales.

La résistance par rapport aux contraintes principales est vérifiée seulement pour les poutres dans lesquelles la largeur des sections droites varie brutalement au voisinage des fibres extrêmes. La vérification de la résistance s'effectue pour les points où a lieu la transition d'une largeur à l'autre.

La résistance des poutres en matériaux plastiques est vérifiée par la troisième hypothèse de résistance selon la formule :

$$\sigma_{eq_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]. \tag{109}$$

La résistance des poutres en matériaux fragiles est vérifiée par la première hypothèse de résistance selon la condition :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leqslant [\sigma_t]. \tag{110}$$

Le calcul complet de la résistance d'une poutre isostatique est donné dans l'exemple 40.

Exemple 40. Etant données: $P = 4$ t, $q = 3$ t/m, $a = 0{,}8$ m, $l = 4$ m, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm², $[\tau] = 1000$ kgf/cm² (fig. 73); déterminer le numéro de la poutre en double té.

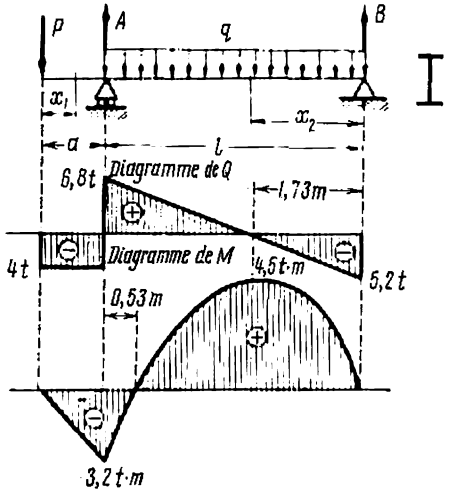


Fig. 73

Solution: 1. Détermination des réactions aux appuis.

$$A = \frac{P(a+l) + \frac{q}{2} l^2}{l} = \frac{4 \cdot 4{,}8 + 3 \cdot 8}{4} = 10{,}8\text{ t},$$

$$B = \frac{\frac{q}{2} l^2 - Pa}{l} = \frac{3 \cdot 8 - 4 \cdot 0{,}8}{4} = 5{,}2\text{ t}.$$

2. Construction des diagrammes de Q et de M.

Dans la console $0 \leqslant x_1 \leqslant a$:

$$Q_{x_1} = -P = -4\text{ t};\quad M_{x_1} = -Px_1 = -4x_1;$$

$$M_{x_1=0} = 0;$$

$$M_{x_1=a} = -4 \cdot 0{,}8 = -3{,}2\text{ t·m}.$$

Dans la travée entre les appuis $0 \leqslant x_2 \leqslant l$:

$$Q_{x_2} = -B + qx_2 = -5{,}2 + 3x_2;\quad Q_{x_2=0} = -5{,}2\text{ t};$$

$$Q_{x_2=l} = -5{,}2 + 3 \cdot 4 = 6{,}8\text{ t};$$

$$M_{x_2} = Bx_2 - \frac{q}{2}x_2^2 = 5{,}2x_2 - \frac{3}{2}x_2^2;\ M_{x_2=0} = 0;$$

$$M_{x_2=l} = 5{,}2 \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 16 = -3{,}2\ \text{t} \cdot \text{m}.$$

Comme $Q_{x_2} = -5{,}2 + 3x_2 = 0$ pour $x_2 = \frac{5{,}2}{3} \approx 1{,}73$ m, on a :

$$M_{\max\limits_{x_2=1{,}73}} = 5{,}2 \cdot 1{,}73 - 3 \cdot \frac{1{,}73^2}{2} \approx 4{,}5\ \text{t} \cdot \text{m};$$

$$M_{x_2} = 5{,}2x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 = 0, \text{ quand } x_2 = \frac{5{,}2 \cdot 2}{3} = 3{,}47\ \text{m}.$$

D'après ces données on construit les diagrammes de Q et de M (fig. 73).

3. Choix de la section de la poutre en double té.

Puisque $M_{\max} = 4{,}5$ t·m, on a $W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4{,}5 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} \approx 281\ \text{cm}^3$.

D'après le catalogue de l'assortiment pour la poutre en double té N° 22 a, on a $W = 254$ cm³ :

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{W - W_{\text{N°22a}}}{W_{\text{N°22a}}} \cdot 100 =$$

$$= \frac{281 - 254}{254} \cdot 100 = 10{,}6\% > 5\% \text{ (surtension)}.$$

Pour la poutre en double té N° 24 $W = 289$ cm³ :

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{W - W_{\text{N°24}}}{W_{\text{N°24}}} \cdot 100 =$$

$$\frac{281 - 289}{289} \cdot 100 \approx -2{,}77\% \text{ (sous-tension)}.$$

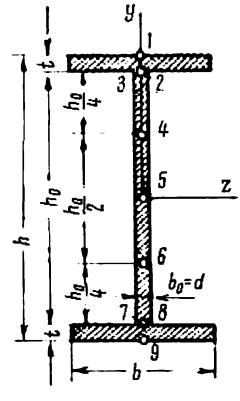


Fig. 74

On choisit la poutre en double té N° 24 pour laquelle $W = 289$ cm³, $I = 3\,460$ cm⁴, $S_0 = 163$ cm³, $h = 24$ cm, $b = 11{,}5$ cm, $t = 0{,}95$ cm, $d = b_0 = 0{,}56$ cm, $h_0 = h - 2t = 22{,}1$ cm (fig. 74).

La contrainte normale maximale dans la fibre extrême de la poutre en double té sera égale à :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{4{,}5 \cdot 10^5}{289} \approx 1\,560\ \text{kgf/cm}^2.$$

4. Vérification de la section de la poutre au cisaillement.
Puisque $Q_{max} = 6{,}8$ t, on a :

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_0}{b_0 I} = \frac{6{,}8 \cdot 10^3 \cdot 163}{0{,}56 \cdot 3\,460} \approx 570 \text{ kgf/cm}^2 < [\tau].$$

5. Construction des diagrammes des contraintes normales σ, tangentielles τ, des contraintes principales $\sigma_{1,3}$ et des contraintes tangentielles extrémales $\tau_{\substack{max \\ min}}$ dans la section défavorable de la poutre et détermination de leurs directions.

La section défavorable par rapport aux contraintes principales est la section située au droit de l'appui gauche (quand on s'approche d'elle du côté droit) ; dans cette section $M = -3{,}2$ t · m et $Q = 6{,}8$ t.

On déterminera les contraintes aux 9 points de la section indiqués fig. 74.

Pour la contrainte normale en un point arbitraire à une distance y de l'axe neutre, on a :

$$\sigma = -\frac{My}{I} = \frac{3{,}2 \cdot 10^5}{3\,460} \approx 92{,}5y. \qquad \text{(a)}$$

Le moment statique de la semelle par rapport à l'axe z sera :

$$S_s = bt\frac{h-t}{2} = 11{,}5 \cdot 0{,}95 \frac{24 - 0{,}95}{2} \approx 126 \text{ cm}^3.$$

Le moment statique de la partie de l'âme située d'un côté de l'ordonnée y sera :

$$S_a = \frac{b_0}{2}\left(\frac{h_0^2}{4} - y^2\right) = \frac{0{,}56}{2}\left(\frac{22{,}1^2}{4} - y^2\right) = 0{,}28\,(122 - y^2).$$

Le moment statique de la partie de la section située d'un côté de l'ordonnée y sera :

$$S = S_s + S_a = 126 + 0{,}28\,(122 - y^2) \approx 160 - 0{,}28y^2.$$

La contrainte de cisaillement pour les points de la semelle est donnée par la formule (99) :

$$\tau = \frac{Q\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{2I}, \qquad \text{(b)}$$

pour les points de l'âme

$$\tau = \frac{QS}{b_0 I}. \qquad \text{(c)}$$

D'après les formules (a), (b), (c), (108), (107), (106) on trouve les valeurs de σ, τ, $\tau_{\max}$, $\sigma_{1,3}$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, α_1, α_2 pour les valeurs de y correspondant aux 9 points de la section (voir la table ci-dessous).

Numéros des points	y	σ	τ	$\tau^{\max}_{\min}$	σ_1	σ_3	$\operatorname{tg} 2\alpha$	α_1	α_2
	cm	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²			
1	12,00	1110	0	±555	1110	0	0,00	0°0′	90°0′
2	11,05	1020	20	±510	1020	0	−0,0392	−1 07	88 53
3	11,05	1020	440	±670	1180	−160	−0,863	−20 24	69 36
4	5,52	510	530	±590	840	−340	−2,08	−32 10	57 50
5	0,00	0	560	±560	560	−560	∞	−45 0	45 0
6	−5,52	−510	530	±590	340	−840	2,08	32 10	122 10
7	−11,05	−1020	440	±670	160	−1180	0,863	20 24	110 24
8	−11,05	−1020	20	±510	0	−1020	0,0392	1 07	91 07
9	−12,00	−1110	0	±555	0	−1110	0,00	0 0	90 0

Les diagrammes des contraintes sont représentés fig. 75.

Les directions des contraintes principales aux points considérés de la section sont indiquées fig. 76.

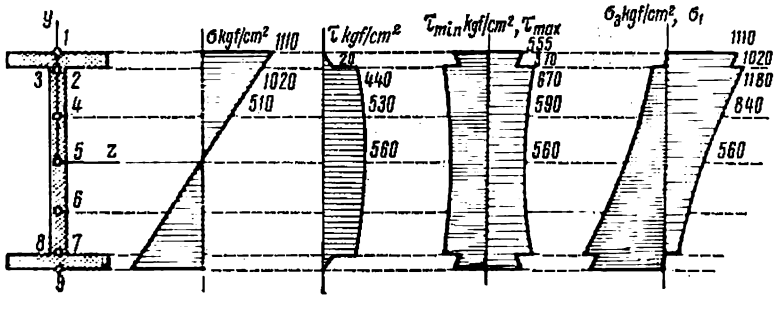


Fig. 75

La détermination graphique des valeurs et directions des contraintes principales σ_1 et σ_3 aux points *4*, *5* et *6* est effectuée fig. 77.

6. Vérification de la résistance des poutres aux contraintes principales.

Le point le plus dangereux dans la section défavorable est le point 3. En ce point $\sigma_1 = 1\,180$ kgf/cm² et $\sigma_3 = -160$ kgf/cm². On vérifie la résistance en ce point d'après la troisième hypothèse de résistance, selon l'inégalité :

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma].$$

Comme $1\,180 + 160 = 1\,340 < 1\,600$, la résistance aux contraintes principales de la section choisie est assurée.

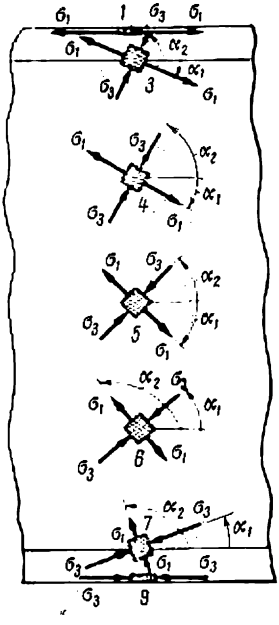


Fig. 76

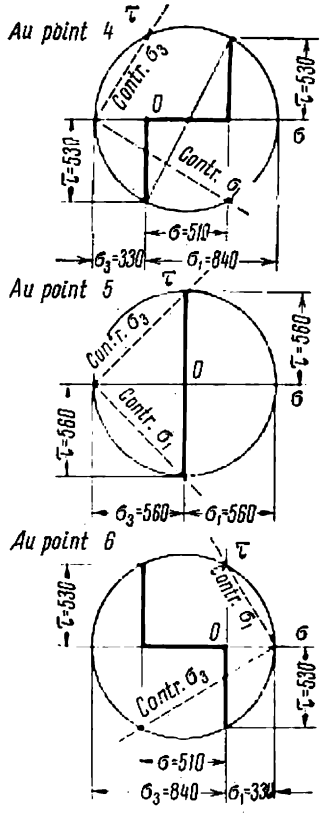
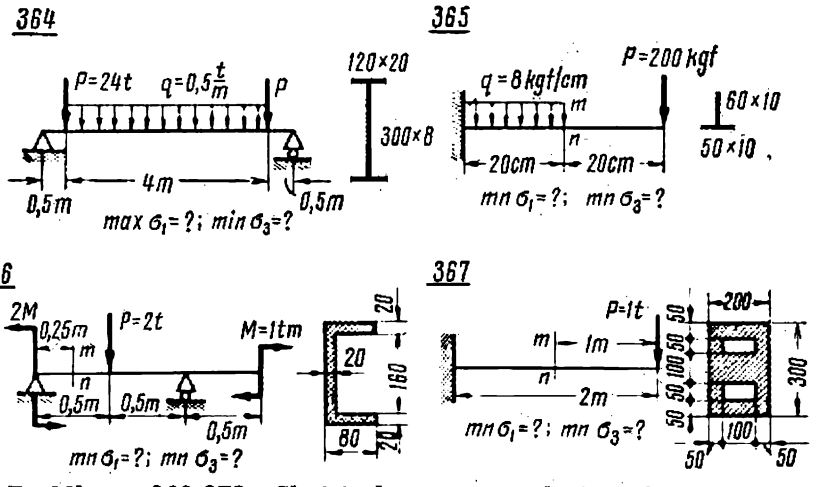


Fig. 77

Problèmes 364-367. Déterminer (par calculs analytique et graphique) les valeurs maximales et minimales des contraintes principales σ_1 et σ_3 et leurs directions dans les sections indiquées des poutres.

Notations : max σ_1 et min σ_3 sont les valeurs maximale et minimale des contraintes principales dans la plus défavorable section de la poutre suivant la longueur aux endroits de variation brutale de la largeur de la section ; σ_{1mn} et σ_{3mn} sont les contraintes principales aux mêmes points de la section *mn*.

Dans le problème 366 le plan des charges passe par la ligne des centres de flexion des sections droites.

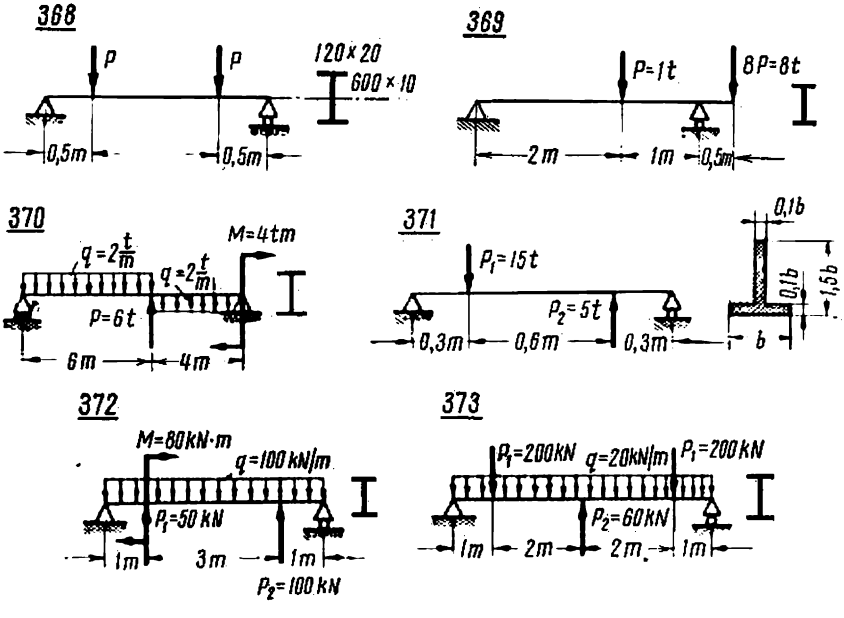


Problèmes 368-373. Choisir les sections droites des poutres et effectuer une vérification complète de leurs résistances.

On prendra: $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm², $[\tau] = 1\,000$ kgf/cm² et la troisième hypothèse de résistance pour la vérification de la résistance aux contraintes principales.

Dans les problèmes 372 et 373 prendre $[\sigma] = 160$ MN/m²; $[\tau] = 100$ MN/m².

Dans le problème 368 calculer la charge admissible et effectuer une vérification complète de la résistance de la poutre.



§ 5. Eléments de calcul de la résistance des poutres d'après la capacité portante

Pour les matériaux plastiques la différence entre un calcul d'après la contrainte admissible et un calcul d'après la capacité portante réside dans les stades des états de déformation considérés comme dangereux.

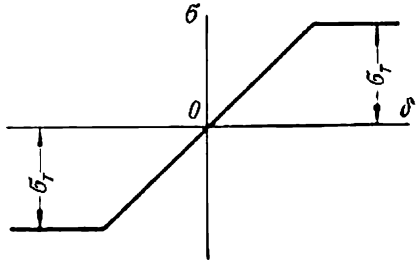


Fig. 78

Le calcul basé sur la capacité portante est, en général, effectué d'après les contraintes normales sans considération de l'écrouissage du matériau de la poutre lors de la déformation plastique. Cette méthode de calcul est fondée sur le diagramme simplifié de traction et de compression du matériau de la poutre (fig. 78).

Dans le calcul d'après la contrainte admissible, on admet que l'état dangereux de la poutre est l'état où la contrainte normale dans la fibre extrême la plus chargée est égale à la limite d'écoulement du matériau $\sigma_{éc}$ (fig. 79).

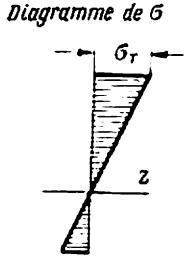


Fig. 79

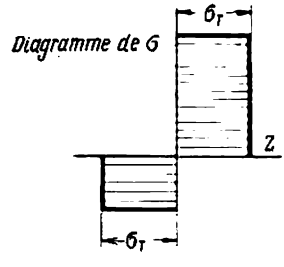


Fig. 80

Selon le diagramme de σ (fig. 79) le moment fléchissant correspondant à l'état dangereux de la poutre est

$$M_{éc} = \sigma_{éc} W. \qquad (111)$$

En introduisant un coefficient de sécurité, on obtient la formule donnant la valeur du moment fléchissant admissible:

$$M_{max} = [\sigma] W. \qquad (112)$$

Dans le calcul d'après la capacité portante, on admet que l'état dangereux de la poutre est l'état où les contraintes normales en tous les points de la section dangereuse sont égales à la limite d'écoulement du matériau (fig. 80).

Cet état, selon le diagramme de σ (fig. 80), correspond à la valeur suivante du moment fléchissant :

$$M'_{éc} = 2\sigma_{éc}S, \tag{113}$$

où S est le moment statique de la moitié de l'aire de la section droite de la poutre par rapport à l'axe z.

Puisqu'un accroissement ultérieur du moment fléchissant est impossible dans cette section, on dit qu'une « rotule plastique » s'est formée, et que la poutre est devenue un système géométriquement déformable.

En introduisant un coefficient de sécurité, on obtient la formule donnant la valeur du moment fléchissant admissible :

$$M'_{max} = 2[\sigma]S. \tag{114}$$

La comparaison des formules (112) et (114) montre que, pour un même coefficient de sécurité, le moment fléchissant admissible

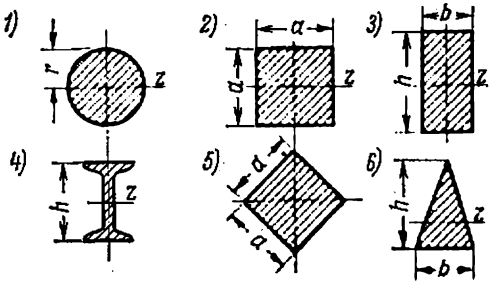


Fig. 81

M'_{max}, obtenu par calcul d'après la capacité portante est η fois plus grand que le moment fléchissant admissible M_{max} obtenu par calcul d'après la contrainte admissible. La valeur de η est :

$$\eta = \frac{M'_{max}}{M_{max}} = \frac{2S}{W} \tag{115}$$

La quantité η ne dépend que de la géométrie de la section droite de la poutre.

Exemple 41. Etant données les formes des sections droites indiquées fig. 81 ;

déterminer la valeur de η.

Solution.

1) $W=\frac{\pi r^3}{4}$; $S=\frac{2}{3}r^3$; $\eta=\frac{4r^3\cdot 4}{3\pi r^3}=\frac{16}{3\pi}\approx 1{,}697$.

2) $W=\frac{a^3}{6}$; $S=\frac{a^3}{8}$; $\eta=\frac{3}{2}=1{,}5$.

3) $W=\frac{bh^2}{6}$; $S=\frac{bh^2}{8}$; $\eta=1{,}5$.

4) Puisque $W=\frac{2I}{h}$, donc $\eta=\frac{2S}{W}=\frac{S}{I}h$.

Par exemple, d'après le catalogue de l'assortiment des poutres, pour la poutre en double té N° 20 a, on a :

$$I=2\,030\,\text{cm}^4;\ S=114\,\text{cm}^3;\ h=20\,\text{cm};\ \eta=\frac{114\cdot 20}{2\,030}\approx 1{,}12.$$

5) $W=\frac{a^4\sqrt{2}}{12\cdot a\sqrt{2}}=\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$; $S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$;

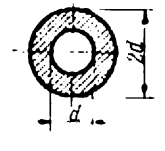
$$\eta=\frac{\sqrt{2}a^3 6\sqrt{2}}{6a^3}=2.$$

6) $W=\frac{bh^3}{36}\cdot\frac{3}{2\cdot h}=\frac{bh^2}{24}$; $S=\frac{bh}{4}\left(\frac{2}{3}h-\frac{2}{3}\frac{h}{\sqrt{2}}\right)=\frac{bh^2}{12}(2-\sqrt{2})$;

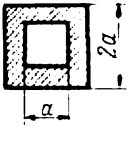
$$\eta=\frac{bh^2(2-\sqrt{2})\,24}{6bh^2}\approx 2{,}344.$$

Problèmes 374-379. Déterminer le rapport $\eta=\frac{M'_{\max}}{M_{\max}}$ des moments fléchissants maximaux $M'_{\max}$ et $M_{\max}$, calculés d'après la capacité portante et la contrainte admissible pour les formes indiquées des sections droites des poutres.

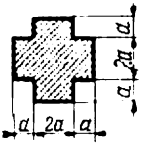
374

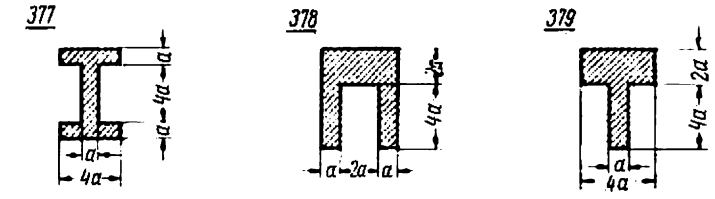


375



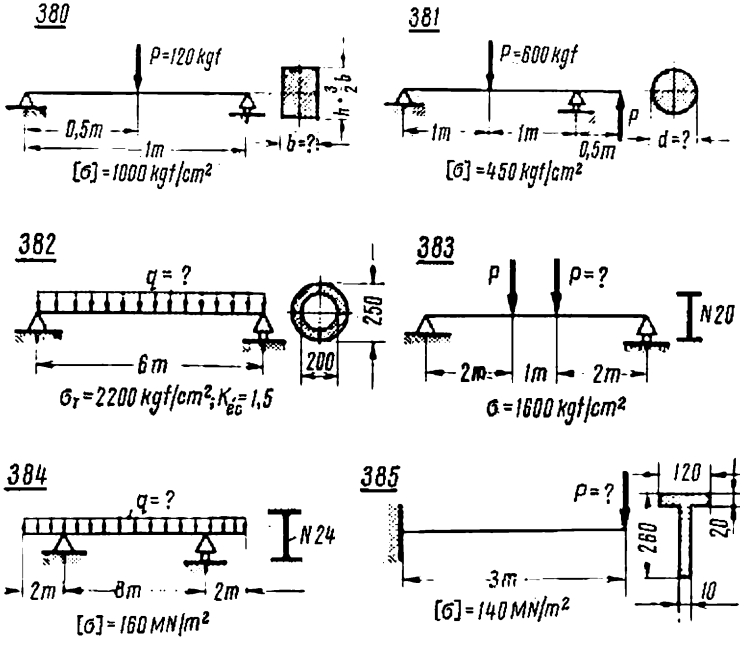
376





Problèmes 380-385. Déterminer les dimensions nécessaires des poutres ou les charges admissibles d'après les calculs basés sur la contrainte admissible et la capacité portante.

Notations: b, d, h, P_{max}, q_{max} sont les dimensions nécessaires des sections droites des poutres et les charges admissibles d'après le calcul basé sur la contrainte admissible; b', d', h', P'_{max}, q'_{max} — les mêmes quantités déterminées d'après le calcul basé sur la capacité portante.



§ 6. Déplacements des poutres en flexion

Les déplacements des sections d'une poutre sont caractérisés:

1) par des déplacements linéiques des centres de gravité des sections droites dans une direction normale à l'axe géométrique x de la poutre, appelés *déplacements verticaux* (f_x);

2) par des déplacements angulaires des sections droites autour de l'axe neutre z, appelés *rotations des sections* (θ_x).

Le déplacement vertical f_x est positif, si sa direction coïncide avec le sens positif de l'axe perpendiculaire à l'axe géométrique x de la poutre.

La rotation θ_x est positive, si la rotation de la section droite de la poutre autour de l'axe neutre z se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Les déplacements verticaux et rotations maximaux et minimaux (f_{max}, f_{min}), (θ_{max}, θ_{min}) sont évalués en valeurs absolues.

Puisque l'effort tranchant n'a un effet appréciable que sur la déformation pour les poutres courtes, les quantités f et θ sont en général déterminées compte tenu seulement du moment fléchissant. Les valeurs de f et θ peuvent être calculées par la méthode des paramètres initiaux, par les méthodes graphique, grapho-analytique et autres.

La méthode des paramètres initiaux

On prend pour paramètres initiaux le déplacement vertical f_0 et la rotation θ_0 de la section droite de la poutre ayant son centre de gravité à l'origine des coordonnées. Il est rationnel de placer l'origine des coordonnées au centre de gravité de la section extrême de la poutre.

Les valeurs de f_x et θ_x dans une section arbitraire de la poutre, située à une distance x de l'origine des coordonnées (si le coefficient de charge linéique q_x est une fonction développable en puissances de x), sont données par les équations suivantes:

$$EIf_x = EIf_0 + EI\theta_0 \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x-a_m)^2}{2!} + \\ + \sum P \frac{(x-a_p)^3}{3!} + \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^4}{4!} + \\ + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^5}{5!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^5}{5!} + \ldots; \qquad (116)$$

$$EI\theta_x = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a_m)}{1!} + \sum P \frac{(x-a_p)^2}{2!} + \\ + \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^3}{3!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^3}{3!} + \\ + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^4}{4!} + \ldots, \qquad (117)$$

où E est le module d'élasticité longitudinale du matériau de la poutre ;

I le moment d'inertie de sa section droite par rapport à l'axe neutre z ;

M les moments des couples extérieurs ;

a_m les distances à l'origine des coordonnées des sections où sont appliqués les couples (fig. 82,*a*) ;

P les forces concentrées normales à la ligne moyenne (y compris les réactions) ;

a_p les distances à l'origine des coordonnées des points d'application de ces forces sur l'axe de la poutre (fig. 82,*b*) ;

q_{a_q}, q'_{a_q} respectivement les valeurs de q_x de la première, seconde, etc., dérivées de q_x par rapport à x aux points $x = a_q$, c'est-à-dire pour les sections droites où commence l'action des charges réparties (fig. 82,*c*) ;

q_{b_q}, q'_{b_q} respectivement les valeurs de q_x, de la première, seconde, etc., dérivées de q_x par rapport à x aux points $x = b_q$, c'est-à-dire pour les sections droites où se termine l'action des charges réparties avant les sections considérées (fig. 82,*c*).

Si l'origine des coordonnées est au centre de gravité de la section droite extrême de la poutre et l'axe x orienté vers la gauche, pour

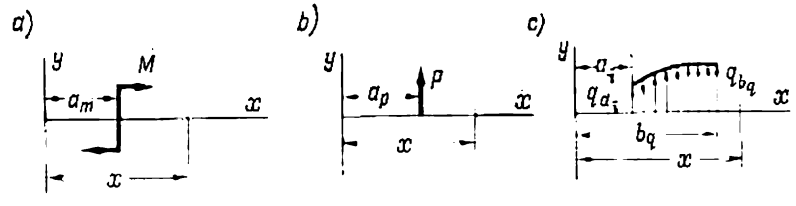


Fig. 82

les directions indiquées des charges, les signes des termes traduisant l'effet des moments des couples extérieurs dans les formules (116) et (117) seront négatifs ; le sens de rotation de la section de la poutre, donné par la formule (117), sera l'inverse de celui adopté plus tôt.

Il faut se rappeler seulement la formule (116) ; la formule (117) s'obtient à partir de celle-ci par différentiation.

Les deux paramètres initiaux f_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions suivantes de liaison de la poutre :

1) pour un encastrement le déplacement vertical et la rotation de la section sont nuls ;

2) pour des articulations les déplacements verticaux sont nuls.

Dans le cas des poutres symétriques, on considère une de leurs moitiés et on utilise les conditions de symétrie : la rotation de la section, coïncidant avec l'axe de symétrie directe de la poutre, est nulle, ou le déplacement vertical de la section, coïncidant avec l'axe de symétrie indirecte de la poutre, est nul.

Il est rationnel d'écrire seulement une équation (116) et une équation (117) pour une section arbitraire de la dernière partie de la poutre en tenant compte des charges dans l'ordre de leurs distances à l'origine des coordonnées. Chacune de ces équations est valable pour calculer f_x et θ_x dans n'importe quelle partie de la poutre, si l'on marque d'un trait le nombre des termes correspondant aux charges sur les parties précédentes.

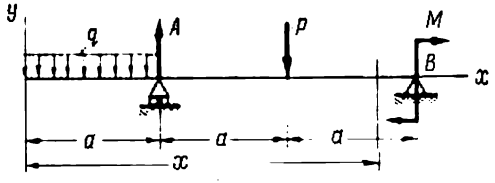


Fig. 83

Exemple 42. Etant donnés: q, a, $P = 4qa$, $M = qa^2$, EI (fig. 83); calculer f_x et θ_x.

Solution. De la condition de la statique $\sum M_B = 0$, on a:

$$-qa \cdot \frac{5}{2} a + A \cdot 2a - 4qa \cdot a + qa^2 = 0; \quad A = \frac{11}{4} qa.$$

Selon l'équation (116), pour la dernière partie droite de la poutre on peut écrire:

$$EIf_x =$$

$$= \underbrace{EIf_0 + EI\theta_0 x - q\frac{x^4}{24}}_{I} + \underbrace{\frac{11}{4} qa\frac{(x-a)^3}{6}}_{II} + \underbrace{q\frac{(x-a)^4}{24} - 4qa\frac{(x-2a)^3}{6}}_{III}.$$

Pour le tronçon I: $0 \leqslant x \leqslant a$.
Pour le tronçon II: $a \leqslant x \leqslant 2a$.
Pour le tronçon III: $2a \leqslant x \leqslant 3a$.

D'après les conditions de liaison, on a:
à l'appui gauche:

$$EIf_a = EIf_0 + EI\theta_0 a - \frac{qa^4}{24} = 0,$$

à l'appui droit:

$$EIf_{3a} = EIf_0 + EI\theta_0 3a + \frac{88}{24} qa^4 - \frac{2}{3} qa^4 - \frac{81}{24} qa^4 + \frac{16}{24} qa^4 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left.\begin{aligned} EIf_0 + EI\theta_0 a - \frac{qa^4}{24} &= 0, \\ EIf_0 + 3EI\theta_0 a + \frac{7}{24} qa^4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

d'où :

$$2EI\theta_0 a + \frac{8}{24} qa^4 = 0 \text{ et } \theta_0 = -\frac{1}{6}\frac{qa^3}{EI}.$$

Après substitution, on obtient :

$$EIf_0 - \frac{1}{6} qa^4 - \frac{1}{24} qa^4 = 0.$$

Par conséquent :

$$f_0 = \frac{5}{24}\frac{qa^4}{EI}.$$

Les équations, déterminant f_x et θ_x dans une section arbitraire de chaque partie, se réduisent à :

$$EIf_x = \frac{5}{24} qa^4 - \frac{1}{6} qa^3 x - \frac{1}{24} qx^4 + \frac{11}{24} qa\,(x-a)^3 + \frac{1}{24} q\,(x-a)^4 - \frac{2}{3} qa\,(x-2a)^3.$$

$$0 \leqslant x \leqslant a \qquad a \leqslant x \leqslant 2a \qquad 2a \leqslant x \leqslant 3a$$

$$EI\theta_x = -\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qx^3 + \frac{11}{8} qa\,(x-a)^2 + \frac{1}{6} q\,(x-a)^3 - 2qa\,(x-2a)^2.$$

$$0 \leqslant x \leqslant a \qquad a \leqslant x \leqslant 2a \qquad 2a \leqslant x \leqslant 3a$$

Par exemple, pour la rotation de la section située sur l'appui gauche, on a :

$$\theta_a = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qa^3\right) = -\frac{qa^3}{3EI};$$

pour la rotation de la section située sur l'appui droit, on a :

$$\theta_{3a} = \frac{qa^3}{EI}\left(-\frac{1}{6} - \frac{27}{6} + \frac{44}{8} + \frac{8}{6} - 2\right) = \frac{1}{6}\frac{qa^3}{EI};$$

pour le déplacement de la poutre, au droit de la force concentrée, on a :

$$f_{2a}=\frac{qa^4}{EI}\left(\frac{5}{24}-\frac{2}{6}-\frac{16}{24}+\frac{11}{24}+\frac{1}{24}\right)=-\frac{7}{24}\frac{qa^4}{EI}.$$

La ligne pointillée (fig. 84) représente à peu près la déformée ; y sont représentées aussi les valeurs trouvées pour le déplacement vertical et la rotation des sections.

Notons que dans les sections de la poutre où le moment fléchissant est nul, la déformée doit avoir un point d'inflexion. Dans les

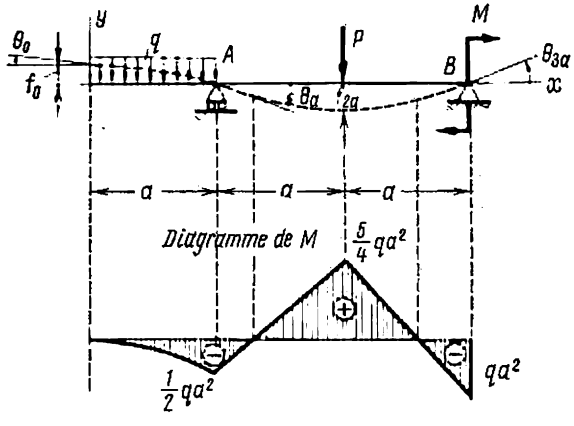


Fig. 84

parties de la poutre où le moment fléchissant est positif, la déformée est convexe vers le bas, là où le moment fléchissant est négatif, la déformée est convexe vers le haut (ceci est montré fig. 84).

Problèmes 386-387. Dans le problème 386 calculer les déplacements verticaux f et les rotations θ des sections des poutres par la méthode d'intégration de l'équation différentielle de la déformée :

1) dans les problèmes 222-226 calculer les déplacements verticaux et les rotations des extrémités libres ;

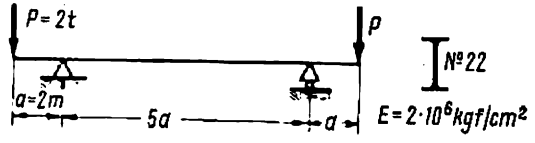
2) dans les problèmes 228, 229, 231 calculer les flèches et les rotations des sections situées sur les appuis ;

3) dans les problèmes 227 et 230 calculer la valeur absolue du déplacement vertical maximal et les rotations des sections situées sur les appuis.

Les charges, les longueurs et les rigidités des sections des poutres sont supposées connues.

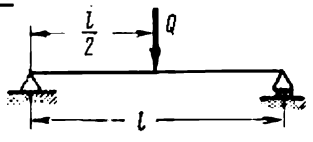
Dans le problème 387 calculer en pour cent de combien la flèche de la poutre (montrée sur la figure), calculée d'après l'équation approchée de la déformée diffère de la valeur exacte, calculée d'après l'équation du cercle et dans quel sens.

387

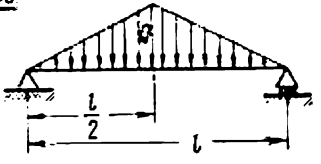


Problèmes 388-391. Calculer en pour cent de combien le moment fléchissant maximal et le déplacement vertical sont plus grands pour une poutre sur deux appuis supportant la même charge Q, mais uniformément répartie suivant la longueur.

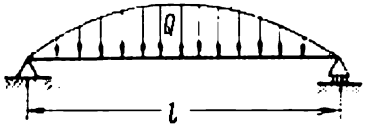
388



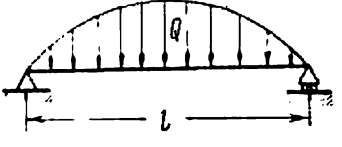
389



390 Parabole



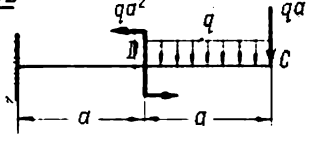
391 Sinusoïde (demi-onde)



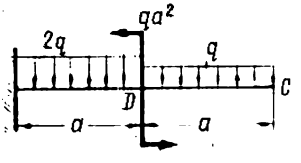
Problèmes 392-409. Calculer les déplacements verticaux f_C des sections C et les rotations θ_D des sections D des poutres.

Les quantités q, a, E et I sont supposées connues.

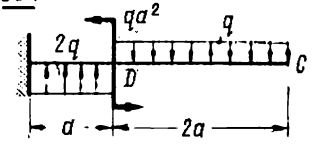
392



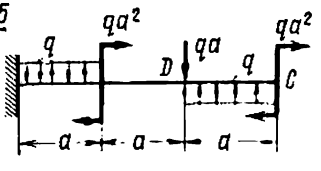
393



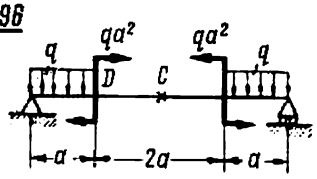
394



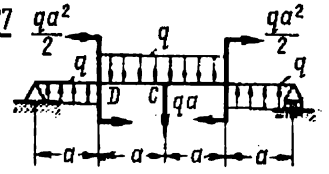
395



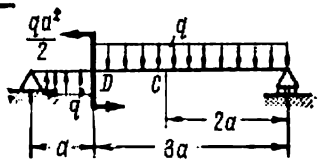
396



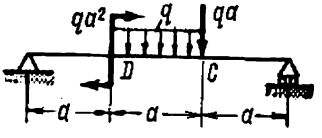
397



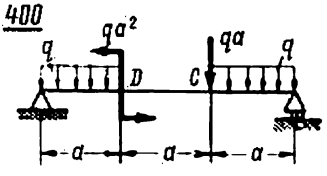
398



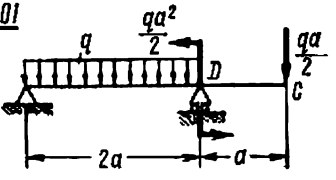
399



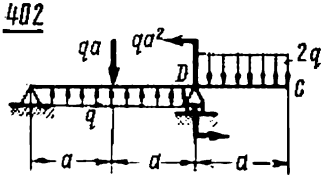
400



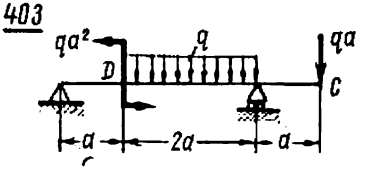
401



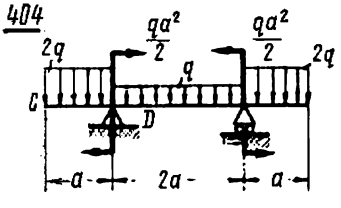
402



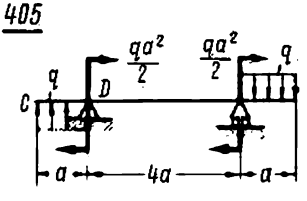
403



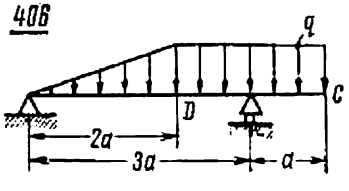
404



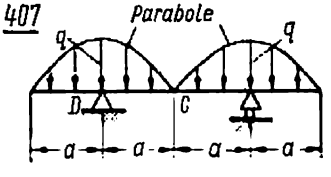
405

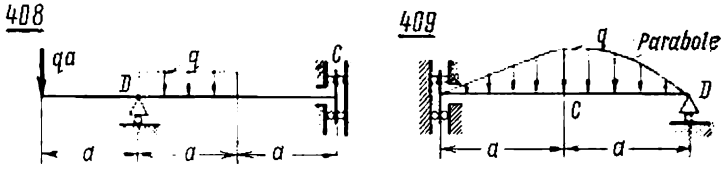


406



407





La méthode grapho-analytique

Pour une poutre donnée, on construit le diagramme du moment fléchissant. Ce diagramme est considéré comme une charge répartie fictive pour une poutre fictive. La rotation θ_x d'une section quelconque de la poutre donnée est déterminée par le rapport de l'effort tranchant Q_{f_x} dans la même section de la poutre fictive à la rigidité de la poutre donnée, c'est-à-dire :

$$\theta_x = \frac{Q_{f_x}}{EI}. \tag{118}$$

Le déplacement vertical f_x d'une section quelconque de la poutre donnée est déterminé par le rapport du moment fléchissant M_{f_x} dans la même section de la poutre fictive à la rigidité EI de la poutre donnée, c'est-à-dire :

$$f_x = \frac{M_{f_x}}{EI}. \tag{119}$$

D'après les formules (118) et (119) les conditions de déformation dans les liaisons et aux extrémités de la poutre donnée se ramènent à celles de Q_f et de M_f de la poutre fictive.

Pour obtenir la poutre fictive correspondant à une poutre donnée, il faut observer les règles suivantes :

1) un appui à l'extrémité de la poutre donnée reste un appui à l'extrémité de la poutre fictive ;

2) un appui qui n'est pas situé à l'extrémité de la poutre donnée devient une articulation suspendue pour la poutre fictive ;

3) l'extrémité encastrée de la poutre donnée devient une extrémité libre de la poutre fictive ;

4) l'extrémité libre de la poutre donnée devient une extrémité encastrée de la poutre fictive ;

5) une articulation suspendue de la poutre donnée devient un appui de la poutre fictive.

Les règles de construction des poutres fictives sont indiquées fig. 85 et 86 ; a et b sont les poutres données, a' et b' les poutres fictives correspondantes.

La méthode grapho-analytique est commode pour calculer les déplacements des sections particulières de la poutre, s'il est aisé

de déterminer les aires et les centres de gravité des diagrammes du moment fléchissant, provoqué par la charge donnée.

Pour garder la convention des signes pour le déplacement vertical et la rotation de la section, le diagramme positif du moment

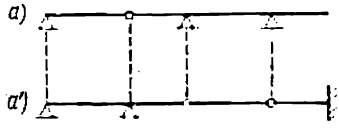


Fig. 85

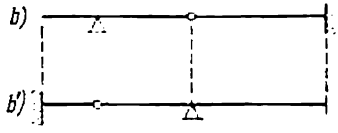


Fig. 86

fléchissant de la poutre donnée doit être considéré comme une charge fictive, agissant sur la poutre fictive de bas en haut, et le diagramme négatif du moment fléchissant de la poutre donnée comme charge fictive, agissant sur la poutre fictive de haut en bas.

Exemple 43. Etant données les quantités: P, l, E, I (fig. 87); déterminer θ_C, θ_A, f_A.

S o l u t i o n. Le diagramme du moment fléchissant de la poutre donnée ABC est représenté par un triangle négatif de hauteur Pl dans la section B.

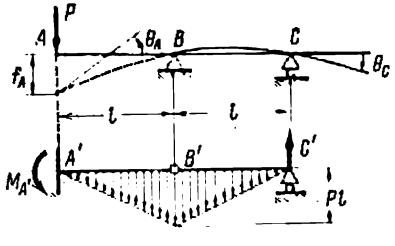


Fig. 87

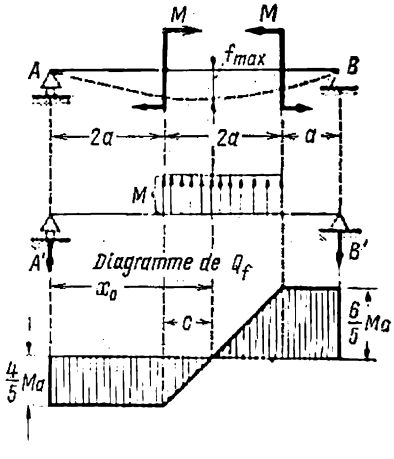


Fig. 88

On considère ce diagramme comme une charge fictive pour la poutre fictive $A'B'C'$.

De la somme des moments par rapport à l'articulation suspendue B' (des moments des forces à droite de cette articulation), on trouve

la réaction :

$$C' = \frac{1}{l} Pl \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{Pl^2}{6}.$$

Par conséquent :

$$Q_{t_{C'}} = -C' = -\frac{Pl^2}{6}.$$

Comme

$$Q_{t_{A'}} = -\frac{Pl^2}{6} + Pll = \frac{5}{6} Pl^2$$

et

$$M_{t_{A'}} = \frac{Pl^2}{6} 2l - Pl^2 l = -\frac{2}{3} Pl^3,$$

on a :

$$\theta_C = \frac{Q_{t_{C'}}}{EI} = -\frac{Pl^2}{6EI}; \quad \theta_A = \frac{Q_{t_{A'}}}{EI} = \frac{5}{6} \frac{Pl^2}{EI};$$

$$f_A = \frac{M_{t_{A'}}}{EI} = -\frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EI}.$$

Exemple 44. Etant données les quantités : M, a, E, I (fig. 88) ; calculer $f_{\max}$.

S o l u t i o n. La poutre fictive est une poutre sur deux appuis avec une charge fictive uniformément répartie d'intensité M sur le second tronçon.

De la somme des moments des forces par rapport aux appuis A' et B' on trouve les réactions fictives :

$$B' = \frac{6}{5} Ma \text{ et } A' = \frac{4}{5} Ma$$

Le diagramme de Q_t est représenté fig. 88. Dans la section où :

$$Q_t = 0, \quad M_t = M_{t_{\max}}$$

Puisque :

$$|Q_t| = A' - Mc = \frac{4}{5} Ma - Mc = 0,$$

l'on a :

$$c = \frac{4}{5} a.$$

Par conséquent :

$$x_0 = 2a + c = \frac{14}{5}a.$$

On trouve $M_{f_{max}}$:

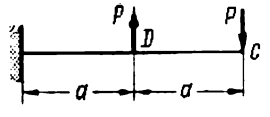
$$M_{f_{max}} = -A'x_0 + M\frac{c^2}{2} = -\frac{4}{5}Ma\frac{14}{5}a + \frac{M}{2}\cdot\frac{16}{25}a^2 = -\frac{48}{25}Ma^2.$$

La flèche est :

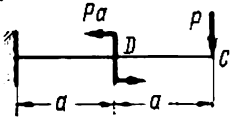
$$f_{max} = \frac{M_{f_{max}}}{EI} = -\frac{48}{25}\frac{Ma^2}{EI}.$$

Problèmes 410-421. Calculer les déplacements verticaux f_C des sections C et les rotations θ_D des sections D des poutres. Dans ce paragraphe ainsi que dans les suivants, P, q, M, a, E, I sont supposés connus.

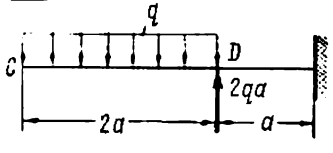
410



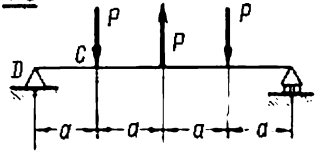
411



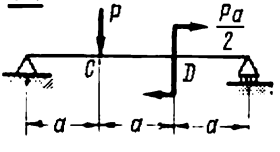
412



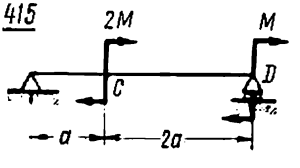
413



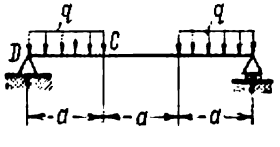
414



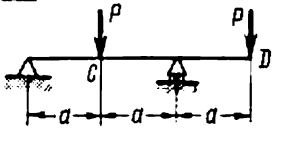
415

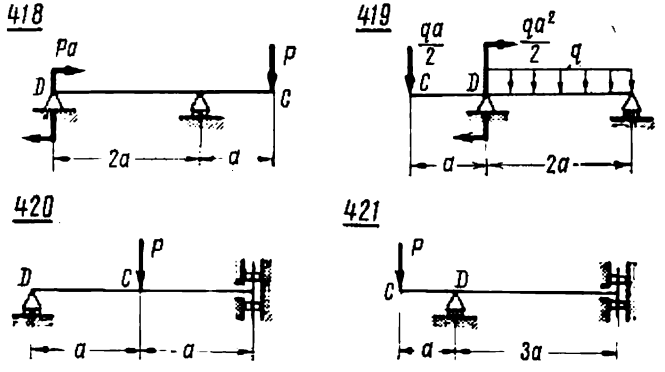


416

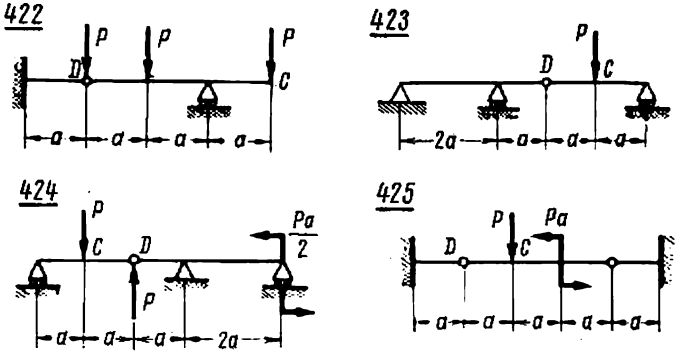


417

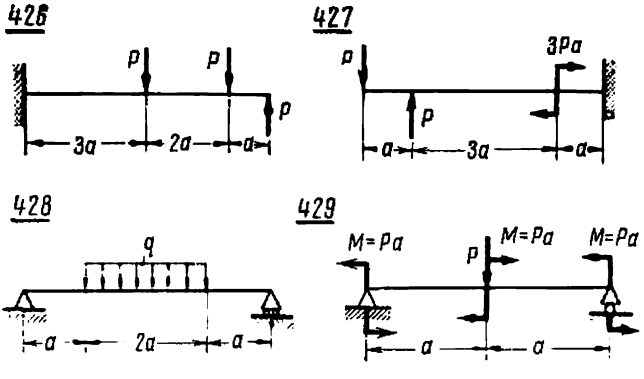


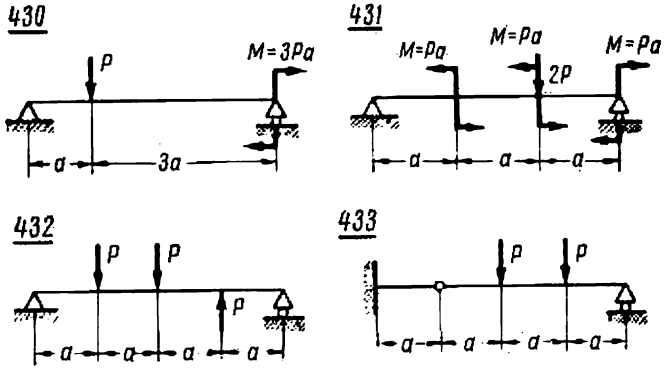


Problèmes 422-425. Calculer les déplacements verticaux f_C des sections C et les rotations θ_{D_1} et θ_{D_2} des sections à gauche et à droite de l'articulation D des poutres.

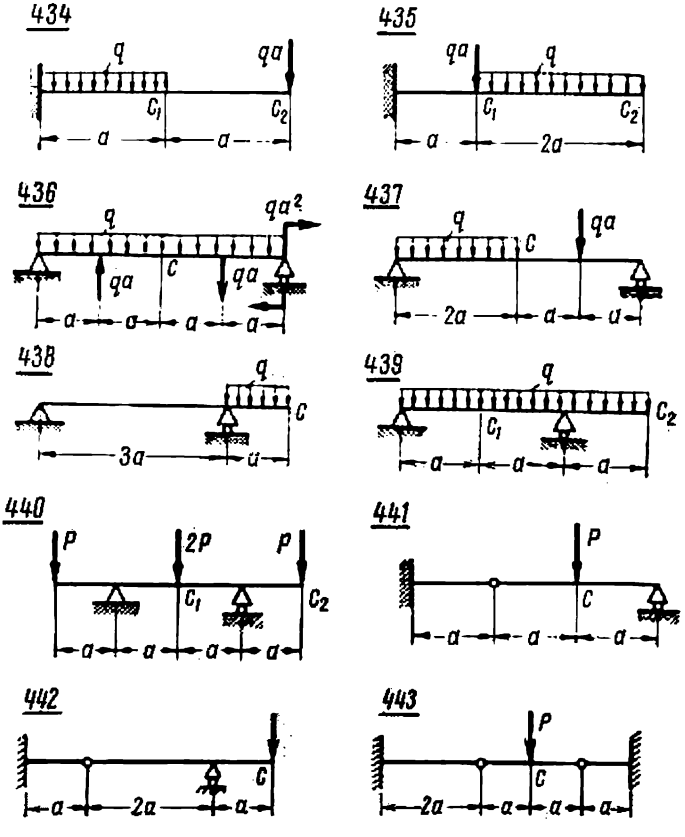


Problèmes 426-433. Calculer les valeurs absolues maximales des déplacements verticaux $|f|_{max}$ et des rotations $|\theta|_{max}$ des sections des poutres. Dessiner la forme de la déformée des poutres.

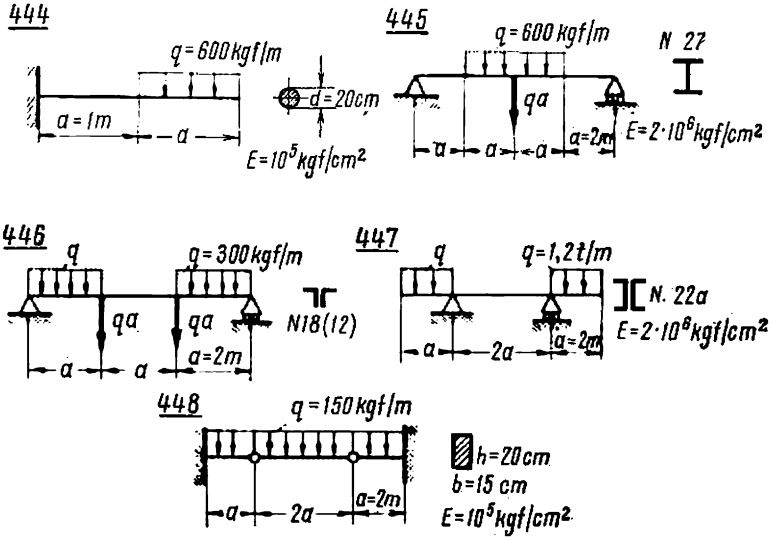




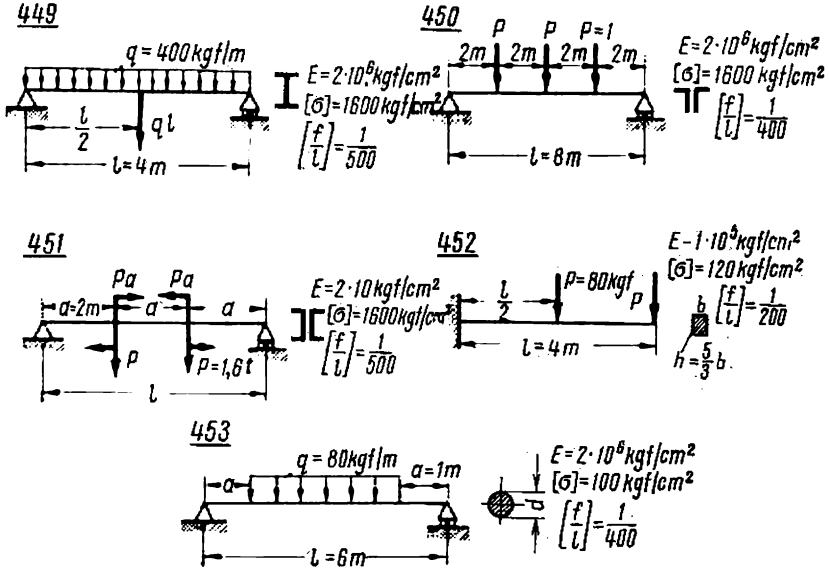
Problèmes 434-443. Calculer les déplacements verticaux f, f_1, f_2 des sections C, C_1 et C_2 des poutres à l'aide des valeurs des déplacements verticaux et des rotations des poutres simples données dans des tables (cf. fig. 99).



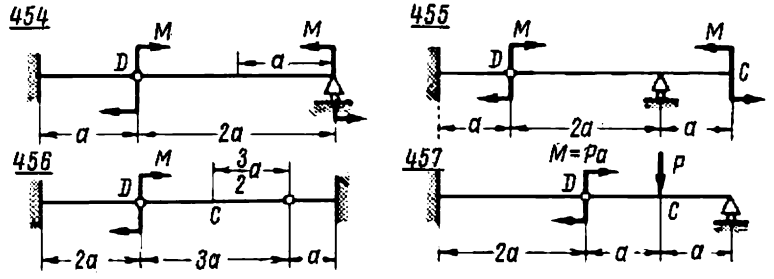
Problèmes 444-448. Calculer par n'importe quelle méthode les valeurs absolues maximales des déplacements verticaux $|f|_{max}$ des poutres.



Problèmes 449-453. Choisir les dimensions des sections droites des poutres vérifiant les conditions de résistance et de rigidité.



Problèmes 454-457. Déterminer le rapport des déplacements verticaux des sections C des poutres selon que le couple M est appliqué à gauche ou à droite de l'articulation D.



La méthode graphique

Si l'on construit graphiquement pour une poutre fictive les diagrammes du moment fléchissant fictif M_{f_x} et de l'effort tranchant fictif Q_{f_x}, la courbe funiculaire (approximativement le polygone funiculaire) sera la déformée de la poutre donnée, et la ligne de l'effort tranchant, la variation de la rotation des sections.

Les segments verticaux y_x entre la courbe funiculaire et sa ligne de fermeture représenteront des quantités proportionnelles aux déplacements verticaux f_x de la poutre donnée, et les segments verticaux y'_x entre la ligne des efforts tranchants fictifs et la ligne de ses valeurs nulles, des quantités proportionnelles aux rotations θ_x des sections.

Puisque :

$$f_x = \frac{M_{f_x}}{EI} = y_x \frac{H(\xi\eta)}{EI} \tag{120}$$

et

$$\theta_x = \frac{Q_{f_x}}{EI} = y'_x \frac{(\eta)}{EI}, \tag{121}$$

où H est la distance polaire du dynamique, $\frac{1}{\xi}$ l'échelle linéique pour la poutre, $\frac{1}{\eta}$ l'échelle des vecteurs, déterminant les aires des parties du diagramme du moment fléchissant de la poutre donnée, EI la rigidité de la section de celle-ci, l'échelle pour les déplacements verticaux sera la quantité $\frac{EI}{H(\eta\xi)}$, et l'échelle pour la rotation la quantité $-\frac{EI}{\eta}$. Les quantités H, ξ et η doivent être choisies telles qu'on

puisse mesurer les segments y_x et y'_x sur le dessin avec une exactitude suffisante.

En général, on construit graphiquement seulement la déformée de la poutre. Dans la méthode graphique on peut appliquer la charge

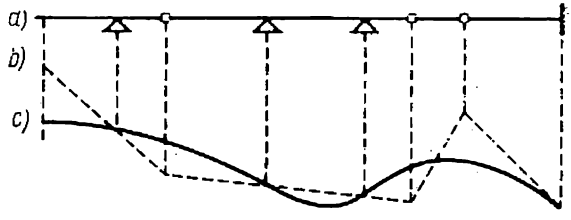


Fig. 89

fictive non sur la poutre fictive (et cela est plus commode), mais sur la poutre donnée. Alors, pour mener la (les) ligne (s) de fermeture du funiculaire, il faut utiliser les règles suivantes, découlant des conditions de liaison des poutres :

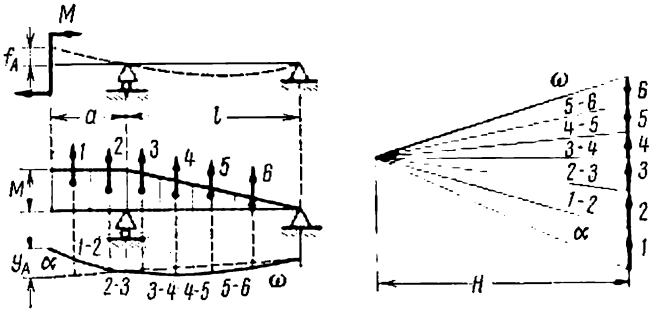


Fig. 90

1) dans un encastrement la ligne de fermeture est tangente au funiculaire ;

2) dans une articulation la ligne de fermeture coupe le funiculaire ;

3) dans une articulation suspendue la ligne de fermeture a un point anguleux (quand on s'approche de l'articulation suspendue de gauche et de droite, les lignes de fermeture se croisent).

L'application des règles pour mener la (les) ligne (s) de fermeture est montrée fig. 89 ; a) désigne la poutre donnée, b) la courbe funiculaire, c) la ligne de fermeture.

La construction graphique de la déformée des poutres est donnée dans les exemples 45 et 46.

Exemple 45 (fig. 90).
Exemple 46 (fig. 91).

Dans certains cas, à la condition de résistance s'ajoute une condition supplémentaire de rigidité de la poutre : le rapport de la valeur

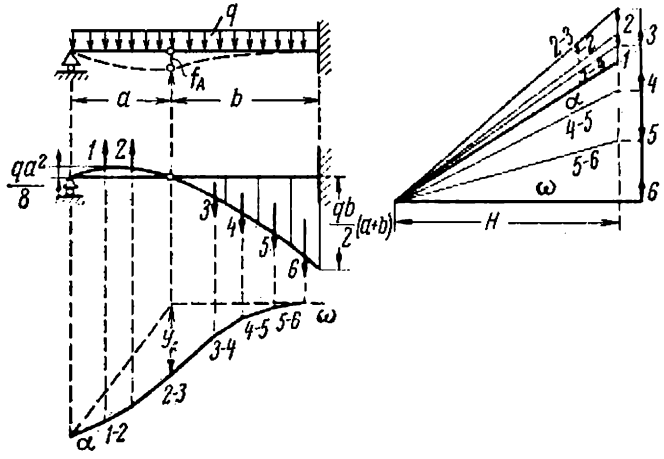


Fig. 91

absolue maximale du déplacement vertical $|f|_{max}$ à la portée l de la poutre ne doit pas dépasser une valeur donnée $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$\frac{|f|_{max}}{l} \leqslant \frac{1}{n}. \tag{122}$$

La valeur admissible $\frac{1}{n}$ varie selon le matériau et la destination de la poutre. Pour les poutres en acier, par exemple, on prend :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{200} \div \frac{1}{1000}.$$

§ 7. Poutres à section variable

Quand la variation des dimensions de la section droite de la poutre suivant la longueur est petite et monotone, on peut calculer les contraintes d'après les formules établies pour les poutres à section constante.

Les plus rationnelles sont les poutres d'égale résistance, dans lesquelles les contraintes normales dans les fibres extrêmes de chaque section droite sont les mêmes.

Calcul des poutres d'égale résistance

En flexion pure la poutre d'égale résistance est une poutre de section constante. Dans le cas général de flexion, la poutre d'égale résistance a une section qui varie suivant l'équation :

$$W_x = \frac{|M_x|}{[\sigma]}, \tag{123}$$

où M_x est le moment fléchissant dans une section arbitraire ;
W_x le module de résistance de cette section.

Si dans une section droite quelconque de la poutre le moment fléchissant est nul ou a une petite valeur et l'effort tranchant est

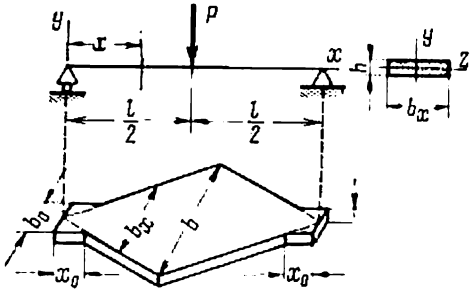


Fig. 92

différent de zéro, ou a une grande valeur, on corrige la forme de la poutre d'égale résistance déterminée par l'équation (123) d'après la condition de résistance au cisaillement (104).

Dans ce qui suit nous donnons quelques exemples de calcul des poutres d'égale résistance.

Exemple 47. Etant données les quantités : P, l, $h = \text{const}$, $[\sigma]$, $[\tau]$ (fig. 92) ;
calculer b_x.

S o l u t i o n. Le moment fléchissant dans une section arbitraire est égal à :

$$M_x = \frac{Px}{2}.$$

Le module de résistance de cette section est :

$$W_x = \frac{b_x h^2}{6}.$$

D'après l'équation (123), on a :

$$\frac{b_x h^2}{6} = \frac{Px}{2[\sigma]},$$

d'où :

$$b_x = \frac{3Px}{h^2[\sigma]}; \quad b_{x=0} = 0; \quad b_{x=\frac{l}{2}} = \frac{3}{2}\frac{Pl}{h^2[\sigma]}$$

Dans les sections situées sur les appuis $M = 0$ et $Q = \frac{P}{2}$, on ne peut donc prendre une largeur nulle pour la section. On détermine la largeur b_0 d'après la condition de résistance au cisaillement :

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F} = \frac{3}{4}\frac{P}{b_0 h} \leqslant [\tau],$$

d'où :

$$b_0 \geqslant \frac{3}{4}\frac{P}{h[\tau]}.$$

La forme de la poutre d'égale résistance est montrée fig. 92.

On trouve la longueur x_0 des extrémités de la poutre de largeur constante b_0, d'après la condition :

$$b_0 = \frac{3}{4}\frac{P}{h[\tau]} = \frac{3Px_0}{h^2[\sigma]},$$

d'où :

$$x_0 = \frac{h}{4}\frac{[\sigma]}{[\tau]}.$$

Puisque $[\tau] = (0{,}5 \div 0{,}6)\ [\sigma]$, on a $x_0 \approx (0{,}5 \div 0{,}42)\ h$.

Exemple 48. Etant données les quantités : P, l, $[\sigma]$, $[\tau]$ (fig. 93) : calculer d_x.

Solution. $M_x = -Px$; $W_x = \frac{\pi d_x^3}{32}$.

D'après l'équation (118), on a :

$$\frac{\pi d_x^3}{32} = \frac{Px}{[\sigma]}.$$

Par conséquent :

$$d_x = 2\sqrt[3]{\frac{4Px}{\pi[\sigma]}}; \quad d_{x=0} = 0; \quad d_{x=l} = 2\sqrt[3]{\frac{4Pl}{\pi[\sigma]}}$$

Puisque pour $x = 0$, $M = 0$ et $Q = -P$, on corrige la forme de la poutre d'égale résistance d'après la condition de résistance au

cisaillement :

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{|Q|}{F} = \frac{4P}{3\frac{\pi d_0^2}{4}} \leqslant [\tau],$$

d'où :

$$d_0 \geqslant 4\sqrt{\frac{P}{3\pi[\tau]}}.$$

La forme trouvée de la poutre d'égale résistance est représentée fig. 93,*a*.

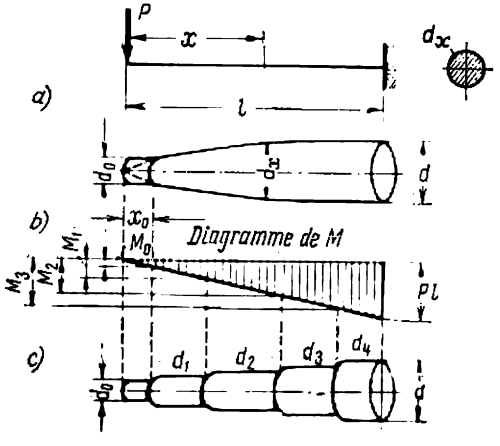


Fig. 93

On détermine la longueur x_0 de l'extrémité de la poutre de diamètre constant d_0 d'après la condition :

$$d_0 = 4\sqrt{\frac{P}{3\pi[\tau]}} = 2\sqrt[3]{\frac{4Px_0}{\pi[\sigma]}},$$

d'où :

$$x_0 = \frac{d_0}{6}\frac{[\sigma]}{[\tau]} \approx (0{,}33 \div 0{,}26)\, d_0.$$

Si la poutre d'égale résistance a une forme complexe, on construit une poutre à gradins circonscrite à la poutre d'égale résistance. Connaissant d_0 et d on prend des diamètres arbitraires compris entre ces dimensions, comme par exemple :

$$d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < d.$$

On détermine ensuite les quantités:

$$W_0 = \frac{\pi d_0^3}{32}, \quad W_1 = \frac{\pi d_1^3}{32}, \quad W_2 = \frac{\pi d_2^3}{32}, \quad W_3 = \frac{\pi d_3^3}{32}$$

et

$$M_0 = W_0[\sigma], \quad M_1 = W_1[\sigma], \quad M_2 = W_2[\sigma], \quad M_3 = W_3[\sigma],$$

assurant la résistance de la poutre pour les valeurs choisies de d_0, d_1, d_2 et d_3.

En rapportant sur le diagramme du moment fléchissant (fig. 93,*b*) les valeurs de M_0, M_1, M_2 et M_3, on détermine les longueurs respectives de chaque gradin de la poutre (fig. 93,*c*).

Détermination des déplacements des poutres à section variable

Les déplacements des poutres à section variable peuvent être déterminés par calculs analytique, grapho-analytique et graphique.

Dans la *méthode analytique* on établit pour chaque tronçon de la poutre l'équation différentielle de la déformée:

$$Ey'' = \frac{M_x}{I_x}, \tag{124}$$

où I_x est le moment d'inertie variable des sections de la poutre par rapport à l'axe neutre.

Après une double intégration, on trouve les fonctions décrivant les variations de la rotation θ_x des sections et du déplacement vertical f_x:

$$E\theta_x = Ey' = \int \frac{M_x}{I_x} dx + C_1 \tag{125}$$

et

$$Ef_x = Ey = \int \left[\int \frac{M_x}{I_x} dx \right] dx + C_1 x + C_2. \tag{126}$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions de liaison de la poutre. Dans certains tronçons, on utilise aussi les conditions aux limites, c'est-à-dire les conditions d'égalité des rotations et des déplacements verticaux, quand on s'approche de la ligne de séparation des tronçons de gauche et de droite. La poutre doit être divisée en tronçons non seulement selon les charges, mais aussi selon les lois de variation des sections droites.

Au lieu de l'équation (124) on peut utiliser l'équation suivante:

$$EI_0y'' = M_x \frac{I_0}{I_x} = M_{\text{réd}}, \qquad (127)$$

où I_0 est le moment d'inertie de la section constante à laquelle est réduite conventionnellement la poutre;

$M_{\text{réd}} = M_x \frac{I_0}{I_x}$ le moment fléchissant réduit.

Exemple 49. Etant données les quantités: P, l, $h = \text{const}$ (une poutre d'égale résistance de section rectangulaire, de hauteur constante h et de largeur variable b_x, voir exemple 47) et E (fig. 94); calculer $\theta_{\max}$ et $f_{\max}$.

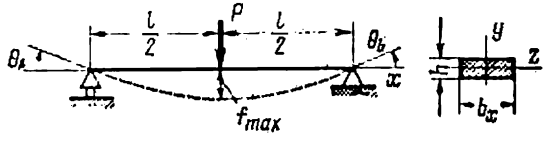


Fig. 94

Solution. Selon l'exemple 47, on a:

$$M_x = \frac{P}{2}x \quad \text{et} \quad I_x = \frac{b_x h^3}{12} = \frac{Phx}{4[\sigma]}.$$

Par conséquent, l'équation (124) prend la forme:

$$Ey'' = \frac{M_x}{I_x} = \frac{2[\sigma]}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]}y'' = 1.$$

En intégrant deux fois cette équation, on trouve:

$$\frac{Eh}{2[\sigma]}y' = x + C_1 \quad \text{et} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]}y = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Puisque pour $x = 0$, $y = 0$ et pour $x = \frac{l}{2}$, $y' = 0$, $C_2 = 0$ et $C_1 = -\frac{l}{2}$.

Par conséquent:

$$\theta_{\max} = \theta_A = -\theta_B = (y')_{x=0} = \frac{2C_1[\sigma]}{Eh} = -\frac{l[\sigma]}{Eh}$$

et

$$f_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{l^2[\sigma]}{4Eh}.$$

D'après l'exemple 47, on sait que :

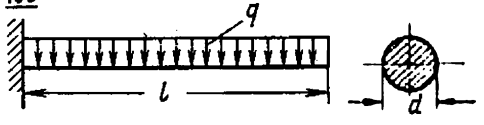
$$[\sigma]=\frac{3}{2}\frac{Pl}{h^2b},$$

par conséquent :

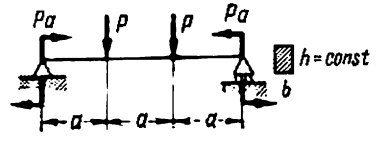
$$\theta_{max}=-\frac{3}{2}\frac{Pl^2}{Eh^3b} \quad \text{et} \quad f_{max}=-\frac{3}{8}\frac{Pl^3}{Eh^3b}.$$

Problèmes 458-466. Déterminer les formes des poutres d'égale résistance et les valeurs maximales des déplacements verticaux.

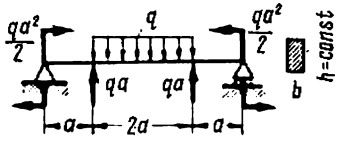
458



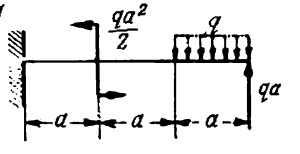
459



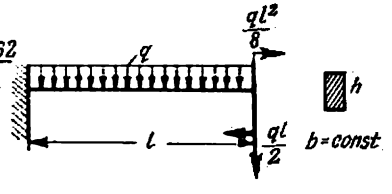
460



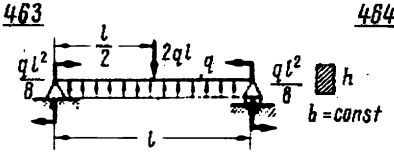
461



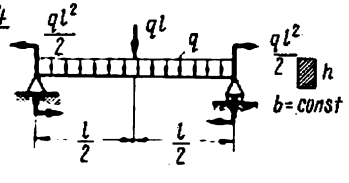
462



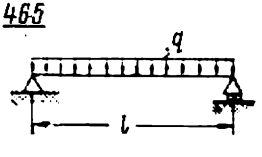
463



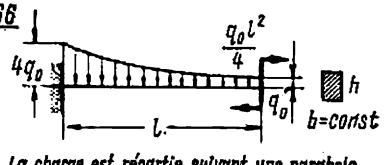
464



465



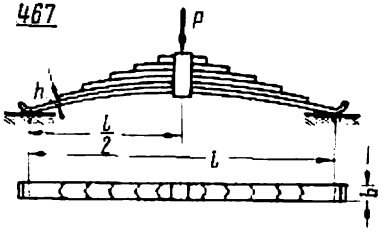
466



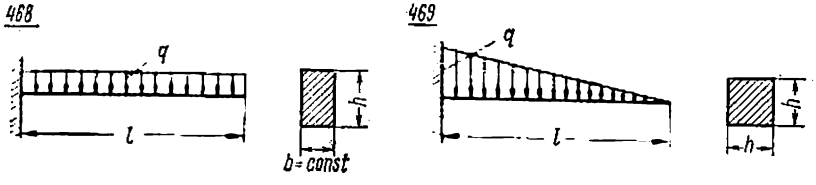
La charge est répartie suivant une parabole avec le sommet à l'extrémité libre

Problème 467. Etant données: $l = 1$ m, $b = 60$ mm, $h = 5$ mm, $n = 10$ lames, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2;

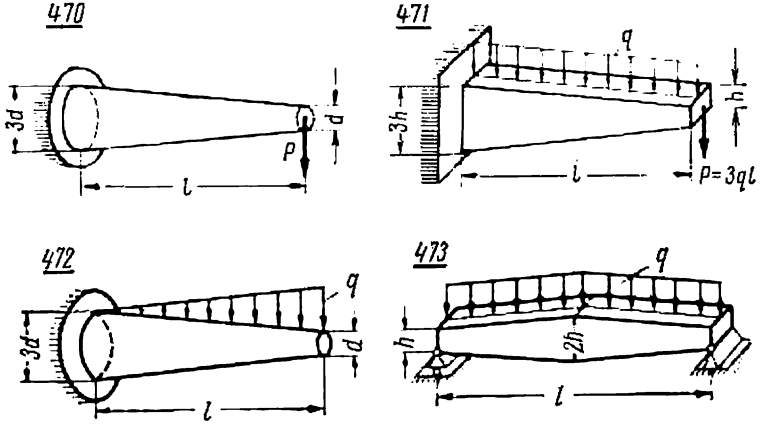
calculer P_{max} et f_{max}. Négliger le frottement entre les lames du ressort.

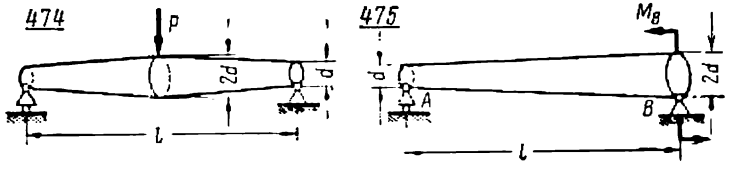


Problèmes 468-469. Déterminer les formes des poutres d'égale résistance; l'influence des contraintes tangentielles sur la forme des poutres; les déplacements verticaux des extrémités libres des poutres; les rotations des sections extrêmes des poutres (expliquer les résultats obtenus). Les quantités q, l, h_{max}, E, I_{max} sont supposées connues.

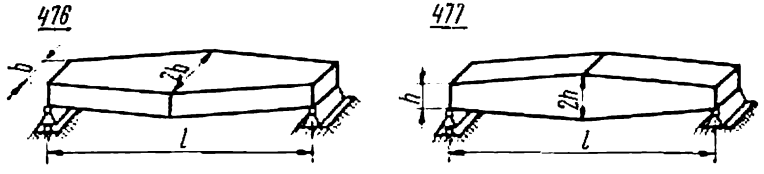


Problèmes 470-475. Déterminer dans quelle section de la poutre apparaissent les contraintes normales maximales et de combien de fois σ_{max}, $|f|_{max}$ et $|\theta|_{max}$ sont supérieurs aux mêmes quantités calculées pour des poutres semblables à section constante.

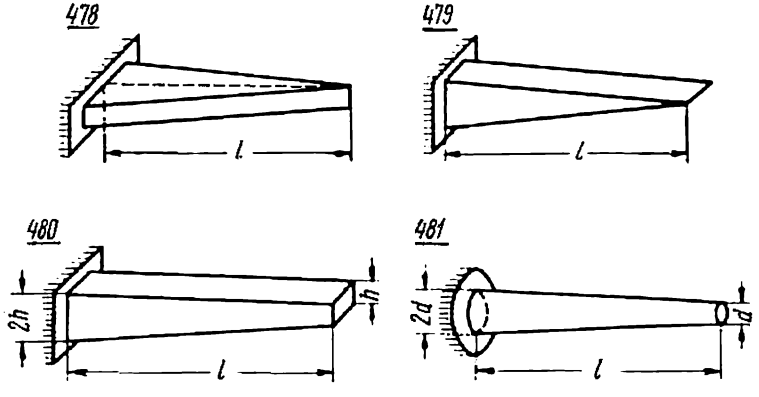




Problèmes 476-477. Déterminer les contraintes normales maximales σ_{max} provoquées par le poids propre des poutres et la position de la section dangereuse. Les valeurs de M_{max} et W_{max} sont supposées connues.



Problèmes 478-481. Calculer les déplacements verticaux des extrémités libres dus aux poids propres des poutres. Les poids propres des poutres Q, ainsi que l, E et I_{max}, sont supposés connus.



Dans la *méthode grapho-analytique* de détermination des déformations des poutres à section variable la charge fictive sur la poutre fictive est non pas le moment fléchissant réel M_x, mais la valeur du moment fléchissant réduit :

$$M_{réd} = M_x \frac{I_0}{I_x},$$

selon l'équation (127).

On détermine la rotation et le déplacement vertical d'une section arbitraire par les formules:

$$\theta_x = \frac{Q_{fx}}{EI_0} \tag{128}$$

et

$$f_x = \frac{M_{fx}}{EI_0}, \tag{129}$$

où Q_{f_x} et M_{f_x} sont l'effort tranchant fictif et le moment fléchissant fictif de la poutre fictive;

EI_0 la rigidité de la section constante à laquelle est conventionnellement réduite la poutre.

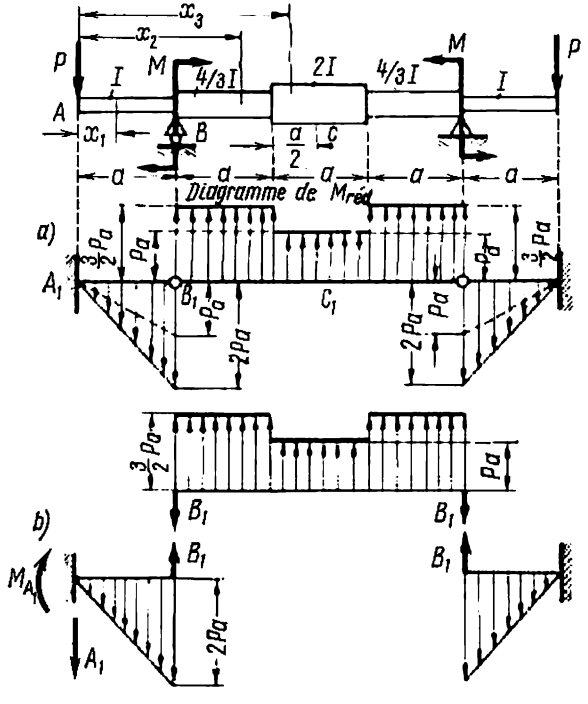


Fig. 95

Pour une poutre d'égale résistance de section à hauteur constante, pour laquelle I_0 est le moment d'inertie de la section droite où agit M_{max} le moment fléchissant réduit est $M_{réd} = M_{max} = \text{const}$.

Exemple 50. Etant données: P, a, $M = 2Pa$, E, I (fig. 95); calculer θ_A, θ_B, f_A, f_C.

Solution. Les moments fléchissants dans les tronçons de la poutre donnée sont: $M_{x_1} = -Px$, $M_{x_2} = M_{x_3} = Pa$.

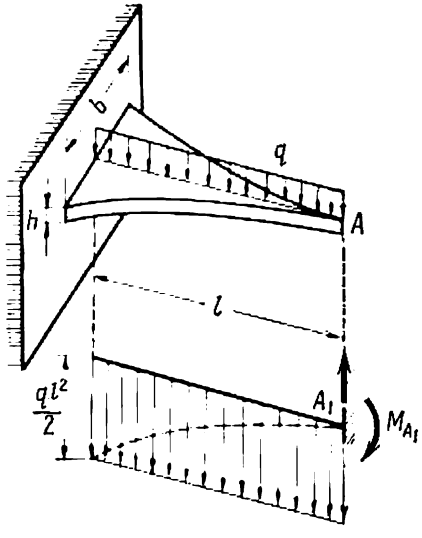


Fig. 96

On choisit $I_0 = 2I$ et on calcule les valeurs des moments fléchissants réduits dans les tronçons:

$$M_{\text{réd}_1} = M_{x_1}\frac{2I}{I} = -2Px_1,$$

$$M_{\text{réd}_2} = M_{x_2}\frac{2I}{\frac{4}{3}I} = \frac{3}{2}Pa,$$

$$M_{\text{réd}_3} = M_{x_3} = Pa.$$

On considère le diagramme du moment réduit comme une charge fictive sur la poutre fictive (fig. 95,*a*).

On divise la poutre fictive en deux poutres principales (en deux consoles) et une poutre-jetée (fig. 95,*b*). Puisque:

$$B_1 = \frac{3}{2}Pa\cdot a + Pa\cdot\frac{a}{2} = 2Pa^2;$$

$$Q_{f_A} = -2Pa^2 + 2Pa\cdot\frac{a}{2} = -Pa^2; \quad Q_{f_{B_1}} = -B_1 = -2Pa^2;$$

$$M_{f_{A_1}} = 2Pa^2\cdot a - Pa^2\cdot\frac{2}{3}a = \frac{4}{3}Pa^3;$$

$$M_{f_{C_1}} = -2Pa^2\cdot\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}Pa^2\cdot a + \frac{1}{2}Pa^2\cdot\frac{1}{4}a = -\frac{11}{8}Pa^3,$$

alors:

$$\theta_A = \frac{Q_{f_{A_1}}}{2EI} = -\frac{Pa^2}{2EI}; \quad \theta_B = \frac{Q_{f_{B_1}}}{2EI} = -\frac{Pa^2}{EI};$$

$$f_A = \frac{M_{f_{A_1}}}{2EI} = \frac{2Pa^3}{3EI}; \quad f_C = \frac{M_{f_{C_1}}}{EI} = -\frac{11}{16}\frac{Pa^3}{EI}.$$

Exemple 51. Etant données les quantités: q, l, E, $h = \text{const}$; une poutre d'égale résistance de section rectangulaire, de hauteur constante h et de largeur variable b_x (fig. 96);

calculer θ_A et f_A.

Solution. On prend :

$$I_0 = \frac{bh^3}{12},$$

alors :

$$M_{\text{réd}} = M_{\max} = -\frac{ql^2}{2}; \quad Q_{f_{A_1}} = -\frac{ql^2}{2} \cdot l = -\frac{ql^3}{2};$$

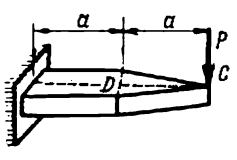
$$M_{f_{A_1}} = -\frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^4}{4}.$$

Les déplacements cherchés sont :

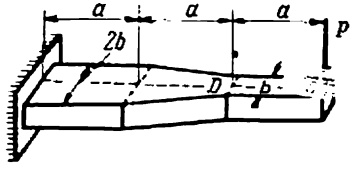
$$\theta_A = \frac{Q_{f_{A_1}}}{EI_0} = -\frac{ql^3}{2EI_0}; \quad f_A = \frac{M_{f_{A_1}}}{EI_0} = -\frac{ql^4}{4EI_0}.$$

Problèmes 482-485. Calculer les déplacements verticaux f_C des sections C et les rotations θ_D des sections D des poutres.
Les quantités P, a, E et $I_{\max}$ sont supposées connues.

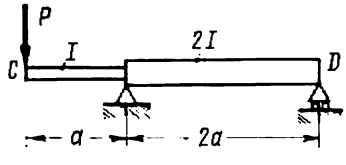
482



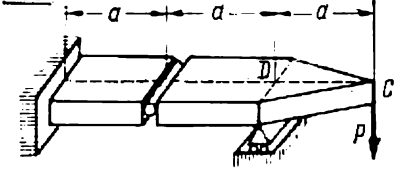
483



484

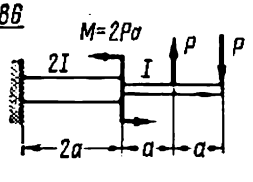


485

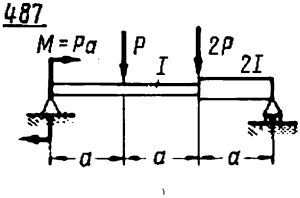


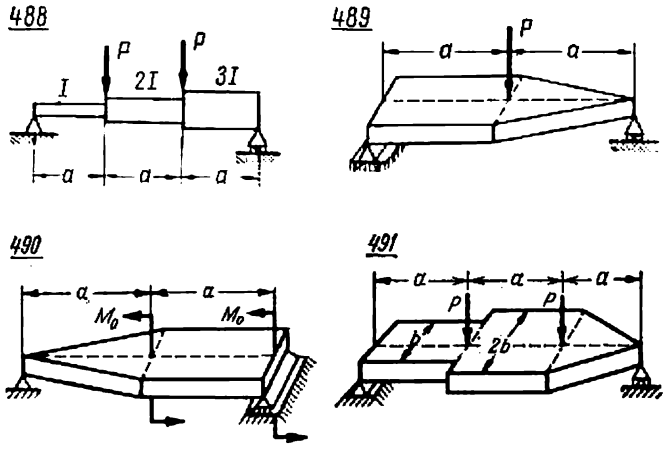
Problèmes 486-491. Calculer les valeurs absolues maximales des péplacements verticaux et des rotations des sections des poutres.
Les quantités P, M, a, E et $I_{\max}$ sont supposées connues.

486



487





La *méthode graphique* de détermination des déplacements des poutres à section variable est la même que pour les poutres à section constante.

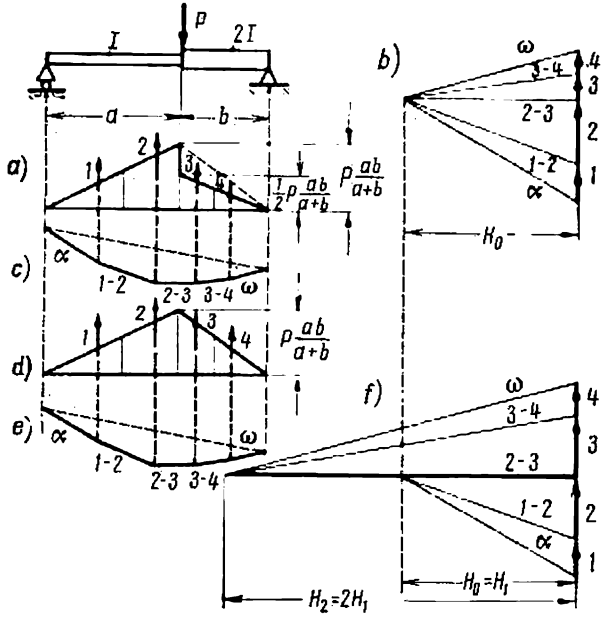


Fig. 97

La différence consiste en ce que pour les poutres à section variable la charge fictive agissant sur la poutre fictive ou donnée est non le

moment fléchissant réel M_x, mais le moment réduit $M_{réd}$. Les règles pour mener la (les) ligne(s) de fermeture du funiculaire sont les mêmes.

L'échelle pour les déplacements verticaux sera la quantité $\frac{EI_0}{H(\xi\eta)}$ où I_0 est le moment d'inertie de la section droite constante à laquelle est réduite conventionnellement la poutre.

Le moment fléchissant réel peut aussi être considéré comme une charge fictive, à condition que la distance polaire du dynamique soit variable et égale à :

$$H_x = H_0 \frac{I_x}{I_0}, \tag{130}$$

où H_0 est la distance polaire de valeur arbitraire pour la section choisie à moment d'inertie $I_0 = I$.

Exemple 52. La construction graphique de la déformée pour une poutre à gradins à l'aide du moment fléchissant réduit, pour lequel $I_0 = I$ est montrée fig. 97,*a*,*b*,*c*.

La construction graphique de la déformée de cette même poutre à l'aide du moment fléchissant réel et la distance polaire variable du dynamique est montrée fig. 97,*d*,*e*,*f*. On admet que :

$$H_0 = H_1 \quad \text{et} \quad H_2 = H_0 \frac{2I}{I} = 2H_1.$$

§ 8. Poutres hyperstatiques

On appelle *poutres hyperstatiques* les poutres pour lesquelles les composantes des réactions dans les liaisons ne peuvent être déterminées par les seules équations de la statique.

Le degré d'hyperstatisme de la poutre s'établit par le nombre d'inconnues surabondantes qui ne peuvent être déterminées par les conditions de la statique.

Méthodes de résolution des poutres hyperstatiques

La *méthode des paramètres initiaux.* Pour une poutre hyperstatique donnée, on détermine les intégrales générales des équations différentielles de la déformée en fonction des paramètres initiaux. Les paramètres initiaux et les composantes des réactions sont déterminés d'après les conditions de liaison de la poutre et les équations de la statique.

Exemple 53. Etant données les quantités : q, l, E, I (fig. 98) ; calculer A, B, M_B, f_x, θ_x, Q_x et M_x.

Solution. Puisque à l'appui gauche $f_0 = 0$, selon les équations (116) et (117) les fonctions pour le déplacement vertical f_x

et la rotation θ_x seront :

$$EIf_x = EI\theta_0 x + A\frac{x^3}{6} - \frac{qx^5}{l \cdot 120};$$

$$EI\theta_x = EI\theta_0 + A\frac{x^2}{2} - \frac{q}{l}\cdot\frac{x^4}{24}.$$

D'après les conditions de liaison, on a $f_l = 0$ et $\theta_l = 0$, c'est-à-dire :

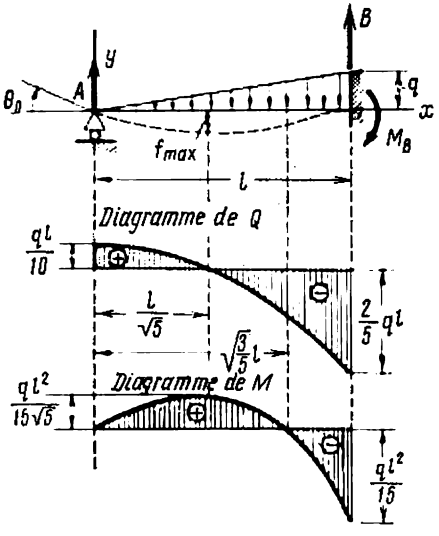


Fig. 98

$$EIf_l = EI\theta_0 l + A\frac{l^3}{6} - \frac{ql^4}{120} = 0;$$

$$EI\theta_l = EI\theta_0 + A\frac{l^2}{2} - \frac{ql^3}{24} = 0.$$

D'où :

$$A\frac{l^2}{3} = \frac{ql^3}{30}, \quad A = \frac{ql}{10} \quad \text{et}$$

$$\theta_0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{ql^3}{24} - \frac{ql^3}{20}\right) = -\frac{ql^3}{120EI}.$$

Donc

$$EIf_x = -\frac{ql^3}{120}x + \frac{ql}{60}x^3 - \frac{q}{l}\frac{x^5}{120}$$

et

$$EI\theta_x = -\frac{ql^3}{120} + \frac{ql}{20}x^2 - \frac{q}{l}\cdot\frac{x^4}{24}.$$

Posant $\theta_x = 0$, de l'équation :

$$x^4 - \frac{6l^2}{5}x^2 + \frac{l^4}{5} = 0$$

on tire la valeur de $x = \frac{l}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447l$ pour laquelle le déplacement vertical est :

$$f_{\max} = f_{x=\frac{l}{\sqrt{5}}} = -\frac{2}{375}\frac{ql^4}{EI}.$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant s'expriment par des fonctions :

$$Q_x = \frac{ql}{10} - \frac{q}{l}\cdot\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad M_x = \frac{ql}{10}x - \frac{q}{l}\cdot\frac{x^3}{6}.$$

En posant $M_x = 0$, on trouve la valeur de $x = l\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0{,}775\ l$ pour laquelle la déformée a un point d'inflexion.

En posant $Q_x = 0$, on trouve la valeur de $x = \frac{l}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447\ l$ pour laquelle le moment fléchissant est maximal:

$$M_{\max} = M_{x=\frac{l}{\sqrt{5}}} = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}}.$$

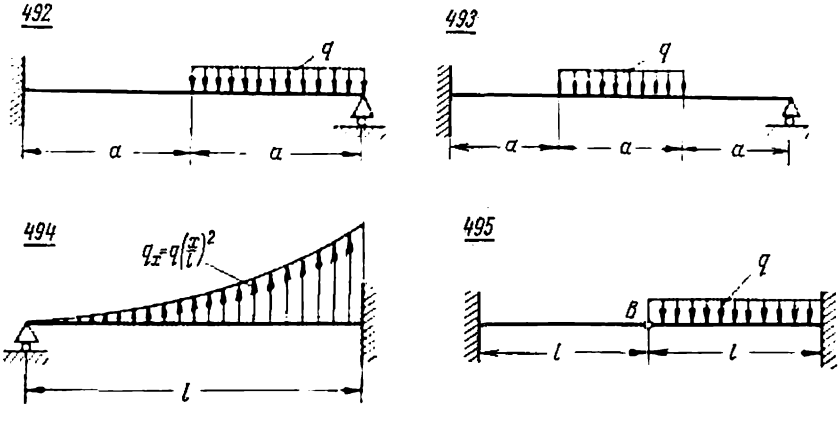
$$Q_{x=0} = \frac{ql}{10} = A; \quad Q_{x=l} = -\frac{2}{5}ql = -B; \quad M_{x=0} = 0;$$

$$M_{x=l} = -\frac{ql^2}{15} = M_B.$$

D'après ces données, on construit les diagrammes de Q et de M et la déformée de la poutre.

Problèmes 492-495. Résoudre les poutres hyperstatiques.

Dans les problèmes 492 et 493 construire les diagrammes de l'effort tranchant Q et du moment fléchissant M; dans le problème 494 calculer la rotation de la section au droit de l'appui; dans le problème 495 calculer le déplacement vertical f de la section B.



Méthode de comparaison des déplacements (ou méthode de superposition). En supprimant les liaisons surabondantes, on rend la poutre hyperstatique considérée isostatique (mais géométriquement invariable). On la dénomme poutre principale. Dans un premier

temps, on charge la poutre principale seulement de forces données et on détermine les déplacements des sections correspondant aux liaisons surabondantes supprimées (déplacement vertical pour une force, rotation pour un couple). Puis, dans un deuxième temps, on charge cette même poutre isostatique (poutre auxiliaire) seulement de forces qui créent les liaisons surabondantes, et on détermine de nouveau les déplacements correspondant aux inconnues hyperstatiques.

Les valeurs des inconnues hyperstatiques sont choisies telles que les déplacements globaux des sections où les liaisons surabondantes

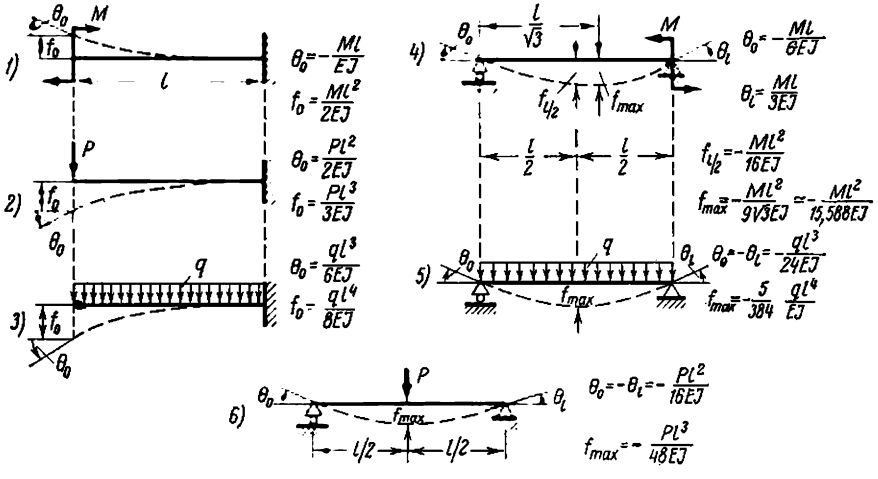


Fig. 99

ont été supprimées dans les poutres principale et auxiliaire soient égaux aux déplacements des mêmes sections de la poutre hyperstatique donnée.

Cette méthode est commode dans les cas où les poutres principale et auxiliaire peuvent être ramenées aux poutres dont les valeurs cherchées des déplacements sont données sous forme de tables.

Il est utile de connaître les valeurs de certains déplacements, au moins pour les poutres simples dont les caractéristiques sont données sous forme de table (fig. 99).

Exemple 54. Etant données: M, l, E, I (fig. 100);

calculer A, B, M_B, θ_A, $f_{\frac{l}{2}}$ et construire les diagrammes de Q et de M.

S o l u t i o n. La réaction A de l'appui de la poutre est considérée comme inconnue hyperstatique. La poutre principale I sera une console chargée d'un couple donné M.

Le déplacement (vertical) de la poutre principale au droit de la section libérée est, selon les poutres représentées fig. 99:

$$f_{A_1} = \frac{Ml^2}{2EI}.$$

Le déplacement vertical de la poutre auxiliaire *II* supportant la force inconnue A au droit de la section libérée est (voir la poutre *2* sur la fig. 99):

$$f_{A_2} = -\frac{Al^3}{3EI}.$$

Comme à l'appui A le déplacement vertical de la poutre étudiée $f_A = 0$, en égalant à la valeur connue la somme des déplacements des poutres *I* et *II*, on a:

$$f_A = f_{A_1} + f_{A_2} = 0,$$

ou

$$\frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Al^3}{3EI} = 0,$$

d'où:

$$A = \frac{3}{2}\frac{M}{l}.$$

Puisque dans n'importe quelle section de la poutre donnée l'effort tranchant $Q = A$, le diagramme de l'effort tranchant est un rectangle de hauteur $\frac{3M}{2l}$. La réaction à l'encastrement est $B = -A$.

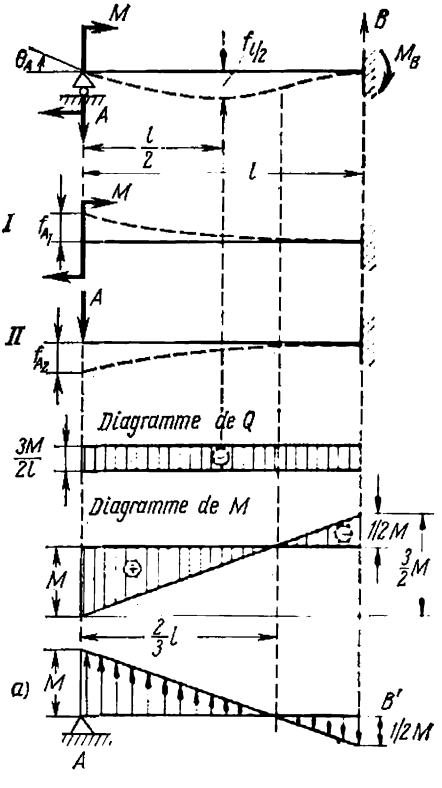


Fig. 100

Il est aisé de construire le diagramme du moment fléchissant par superposition des diagrammes des poutres principale et auxiliaire. Pour la poutre principale le diagramme du moment fléchissant est un rectangle positif de hauteur M. Pour la poutre auxiliaire le diagramme du moment fléchissant est un triangle négatif de hauteur nulle à l'extrémité gauche et $\frac{3}{2}M$ à l'extrémité droite.

En superposant ces diagrammes, on obtient le diagramme résultant du moment fléchissant pour la poutre donnée. Le moment

réactif dans l'encastrement est :

$$M_B = -\frac{3}{2}M + M = -\frac{M}{2}.$$

Pour déterminer les déplacements de la poutre, on utilise la méthode grapho-analytique. La poutre fictive et la charge fictive sont représentées fig. 100, *a*.

Comme :

$$Q_{t_{A_1}} = \frac{M}{2}\cdot\frac{l}{6} - M\frac{l}{3} = -\frac{Ml}{4}$$

et

$$M_{t_{l/2}} = -\frac{Ml}{12}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{9}\right) + \frac{M}{4}\cdot\frac{l}{12}\cdot\frac{l}{18} = -\frac{Ml^2}{32},$$

on a :

$$\theta_A = \frac{Q_{t_{A_1}}}{EI} = -\frac{Ml}{4EI} \quad \text{et} \quad f_{l/2} = \frac{M_{t_{l/2}}}{EI} = -\frac{Ml^2}{32EI}.$$

Mérite attention le fait que la poutre fictive, étant appuyée seulement à l'une de ses extrémités, doit être en équilibre sous l'action de la charge fictive, c'est-à-dire que le moment de la charge fictive par rapport à l'extrémité gauche de la poutre fictive doit être égal à zéro.

Comme inconnues hyperstatiques peuvent être considérées non seulement les composantes des réactions dans les liaisons de la poutre donnée, mais aussi les efforts intérieurs Q et M dans la section droite, suivant laquelle la poutre se décompose en poutres dont les caractéristiques sont données sous forme de tables.

Exemple 55. Etant donnés : q, a (fig. 101) ;
calculer A, B, M_A, M_B.

S o l u t i o n. On décompose la poutre donnée hyperstatique du deuxième ordre en deux poutres (*I* et *II*) suivant la section droite *C*.

On prend comme inconnues hyperstatiques l'effort tranchant Q_C et le moment fléchissant M_C dans cette section.

La comparaison des déplacements des poutres *I* et *II* donne le système suivant de deux équations :

$$\left.\begin{aligned} \theta_{C_1} &= \theta_{C_2}, \\ f_{C_1} &= f_{C_2}. \end{aligned}\right\}$$

D'après les poutres 1) et 2) représentées fig. 99, pour la poutre *I* on a :

$$\theta_{C_1} = \frac{M_C a}{EI} - \frac{Q_C a^2}{2EI} \quad \text{et} \quad f_{C_1} = \frac{M_C a^2}{2EI} - \frac{Q_C a^3}{3EI}.$$

D'après les poutres 1), 2) et 3) représentées fig. 99, pour la poutre *II* on a :

$$\theta_{C_2} = -\frac{M_C 2a}{EI} - \frac{Q_C (2a)^2}{2EI} + \frac{q (2a)^3}{6EI}$$

et

$$f_{C_2} = \frac{M_C (2a)^2}{2EI} + \frac{Q_C (2a)^3}{3EI} - \frac{q (2a)^4}{8EI}.$$

Portant ces valeurs dans les équations de comparaison des déplace-

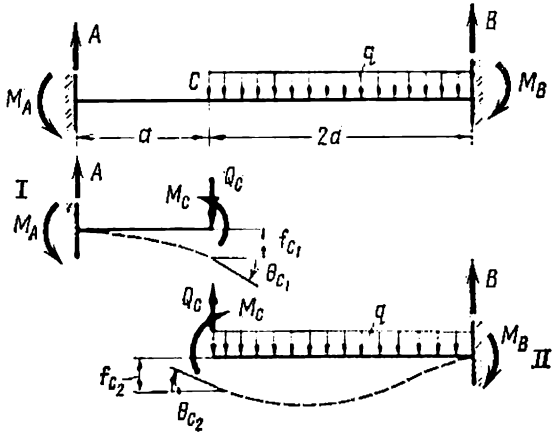


Fig. 101

ments, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} 3M_C + 1{,}5Q_C a &= \frac{4}{3} qa^2, \\ 1{,}5M_C + 3Q_C a &= 2qa^2, \end{aligned}\right\}$$

d'où

$$Q_C = \frac{16}{27} qa \quad \text{et} \quad M_C = \frac{4}{27} qa^2.$$

La réaction $A = Q_C = \frac{16}{27} qa$, le moment réactif est :

$$M_A = Q_C a - M_C = \frac{4qa^2}{9}.$$

La réaction $B = 2qa - Q_C = \frac{38}{27} qa$, le moment réactif est :

$$M_B = Q_C 2a - M_C - 2qa^2 = \frac{3}{2} qa^2.$$

La méthode de comparaison des déplacements peut aussi être utilisée pour le calcul des systèmes hyperstatiques composés de poutres et de barres articulées à celles-ci, pour le calcul des portiques (c'est-à-dire des systèmes de poutres aux nœuds rigides, dans lesquels les angles formés par les poutres restent invariables pendant la déformation).

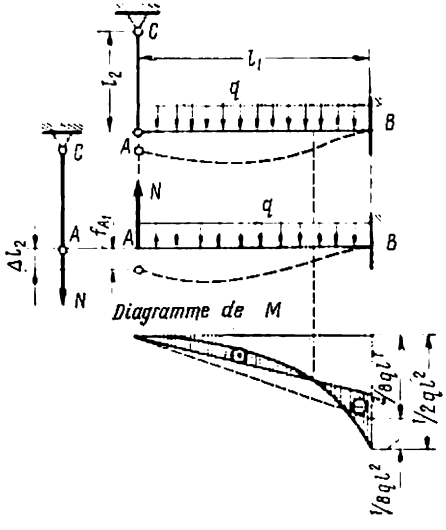


Fig. 102

Dans le calcul des portiques, on néglige, en général, les déformations de traction ou de compression des poutres.

Exemple 56. Etant donnés : la console AB supportant une charge uniformément répartie q et l, E_1, I_1, le tirant élastique AC et ses caractéristiques l_2, E_2, F_2 (fig. 102) ; déterminer l'effort longitudinal N dans le tirant.

Solution. On décompose le système donné à l'articulation A en la poutre AB et le tirant élastique AC. La poutre supporte une charge uniformément répartie de coefficient de charge linéique q et est soumise à un effort inconnu N. Le tirant est soumis seulement à l'effort N.

En comparant les déplacements des extrémités A de la poutre et du tirant, on obtient $|f_{A_1}| = \Delta l_2$.

D'après les poutres 2) et 3) représentées fig. 99, on a :

$$|f_{A_1}| = \frac{ql_1^4}{8E_1I_1} - \frac{Nl_1^3}{3E_1I_1}.$$

Selon la loi de Hooke :

$$\Delta l_2 = \frac{Nl_2}{E_2F_2}.$$

Portant les valeurs de f_{A_1} et de Δl_2 dans la condition de comparaison des déplacements, on obtient :

$$\frac{ql_1^4}{8E_1I_1} - \frac{Nl_1^3}{3E_1I_1} = \frac{Nl_2}{E_2F_2},$$

d'où :

$$N = \frac{3}{8} ql_1 \frac{1}{1 + 3\dfrac{l_2}{l_1^3}\dfrac{E_1I_1}{E_2F_2}}.$$

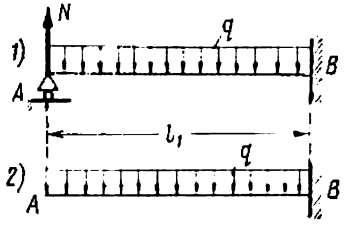


Fig. 103

Les cas particuliers sont (fig. 103) :

1) $E_2F_2 = \infty$; $\quad N = \dfrac{3}{8} ql_1$,

2) $E_2F_2 = 0$; $\quad N = 0$.

Donc, suivant la rigidité du tirant élastique l'effort N peut varier dans l'intervalle $0 \leqslant N \leqslant \dfrac{3}{8} ql_1$ et le moment fléchissant M_B à l'encastrement de la poutre, dans l'intervalle :

$$\frac{ql_1^2}{8} \leqslant M_B \leqslant \frac{ql_1^2}{2}.$$

Le diagramme du moment fléchissant dans la poutre, pour une valeur arbitraire de M_B dans l'intervalle mentionné ci-haut, est représenté fig. 102.

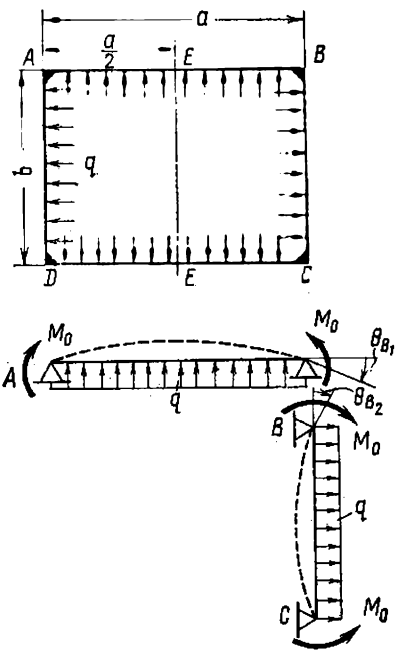


Fig. 104

Exemple 57. Etant donné le portique rectangulaire de côtés a et b ayant une rigidité EI en flexion, sous l'action d'une pression intérieure constante q normale aux parois (fig. 104) ;

déterminer la variation δ de la distance entre les sections médianes $E - E$.

Solution. On décompose le portique en poutres par des sections aux nœuds. Puisque le portique est symétrique, il suffit

d'étudier les deux poutres AB et BC. En négligeant les extensions des poutres du portique, on peut supposer que chaque poutre est appuyée aux extrémités et est soumise à une charge uniformément répartie de coefficient de charge linéique q, et à des moments inconnus M_0 dans les sections au droit des appuis, traduisant la rigidité des nœuds du portique.

Puisque les angles du portique doivent rester droits, la condition de comparaison des déplacements sera : $\theta_{B_1} = \theta_{B_2}$.

D'après les poutres 4) et 5) (cf. fig. 99), on a :

$$\theta_{B_1} = \frac{qa^3}{24EI} - \frac{M_0 a}{2EI} \quad \text{et} \quad \theta_{B_2} = \frac{M_0 b}{2EI} - \frac{qb^3}{24EI}.$$

Selon la condition de comparaison des déplacements, on a :

$$\frac{qa^3}{12} + \frac{qb^3}{12} = M_0 (a + b),$$

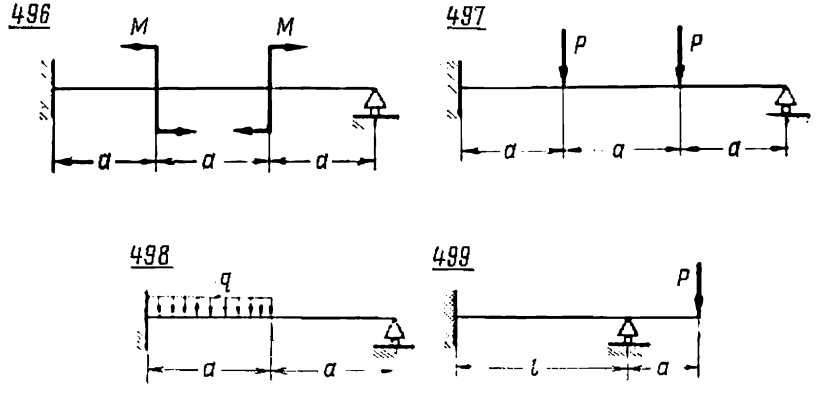
d'où :

$$M_0 = \frac{q}{12}(a^2 - ab + b^2).$$

D'après les poutres représentées fig. 99 l'éloignement des sections médianes des côtés a sera :

$$\delta = \frac{2}{EI}\left(\frac{5}{384} qa^4 - \frac{M_0 a^2}{16}\right) = \frac{qa^2}{192EI}(a^2 + 4ab - 4b^2).$$

Problèmes 496-499. Calculer les poutres hyperstatiques et construire les diagrammes de M et de Q.



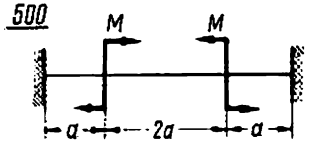
Problèmes 500-505. Calculer les poutres hyperstatiques et déterminer les valeurs des charges admissibles.

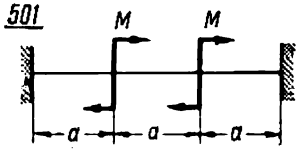
Pour toutes les poutres la longueur est 3 m ; $[\sigma] = 1\ 600$ kgf/cm^2.

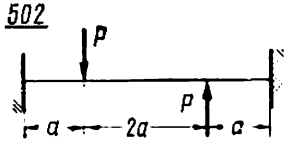
Dans les problèmes 500, 501 la section des poutres est circulaire ($d = 10$ cm) ;

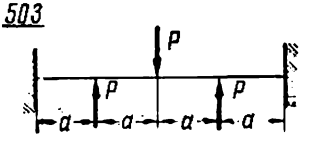
dans les problèmes 502, 503 la section des poutres est annulaire ($D = 12$ cm, $d = 8$ cm);

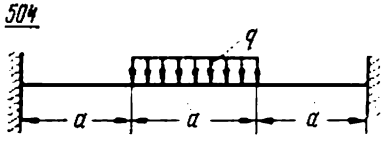
dans les problèmes 504, 505 la section des poutres est rectangulaire (10×10 cm).

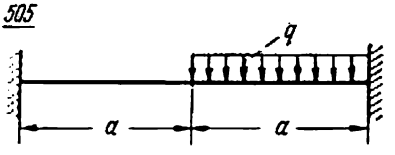






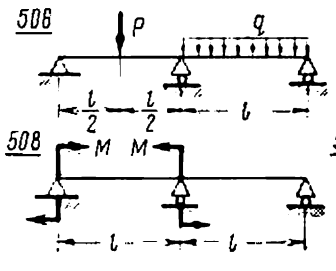


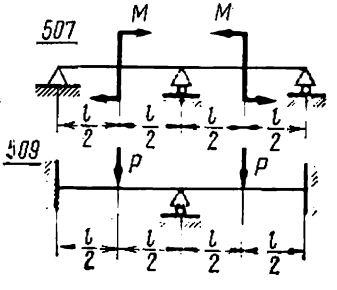




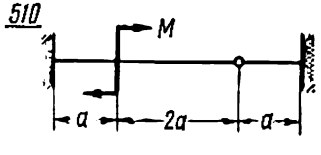
Problèmes 506-509. Choisir les numéros des poutres de section en double té.

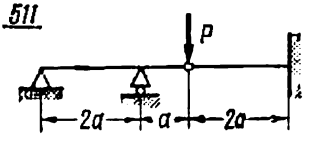
On prendra: $P = 2$ t, $q = 2$ t/m, $M = 3$ t·m, $l = 2$ m, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2.

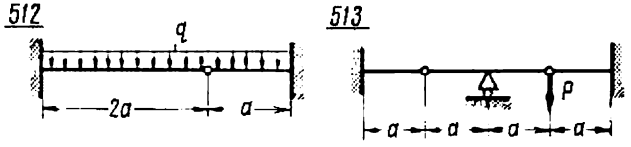




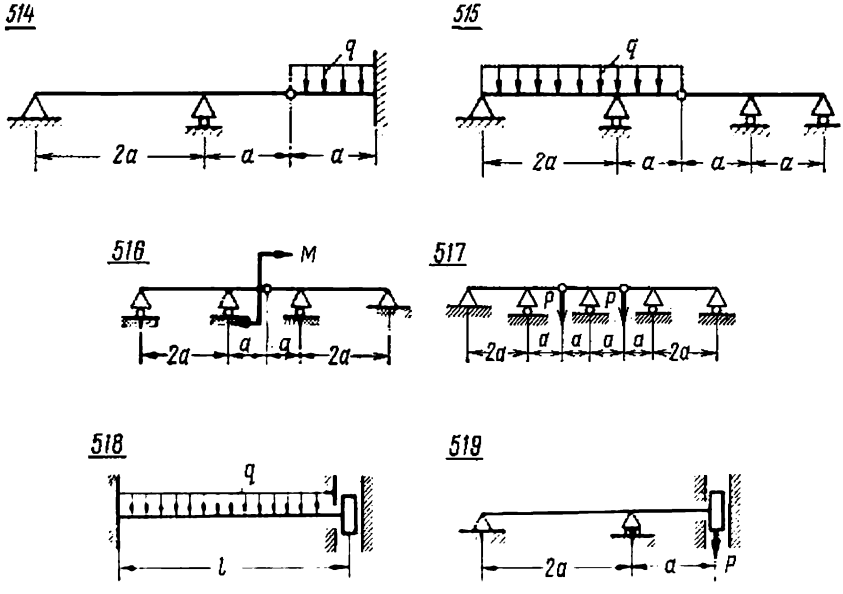
Problèmes 510-513. Calculer le moment fléchissant maximal M_{max}.



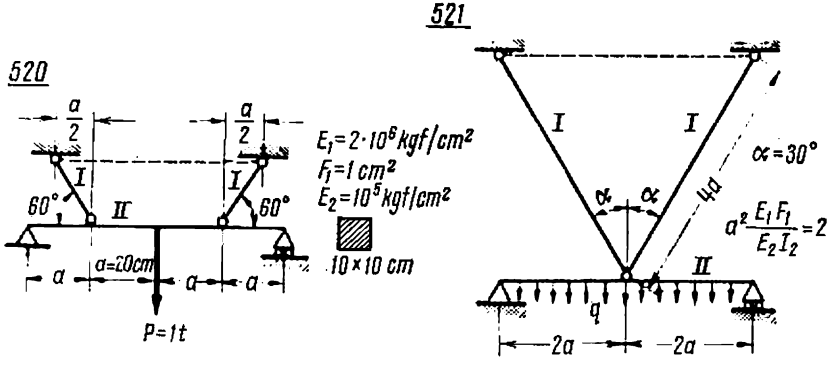


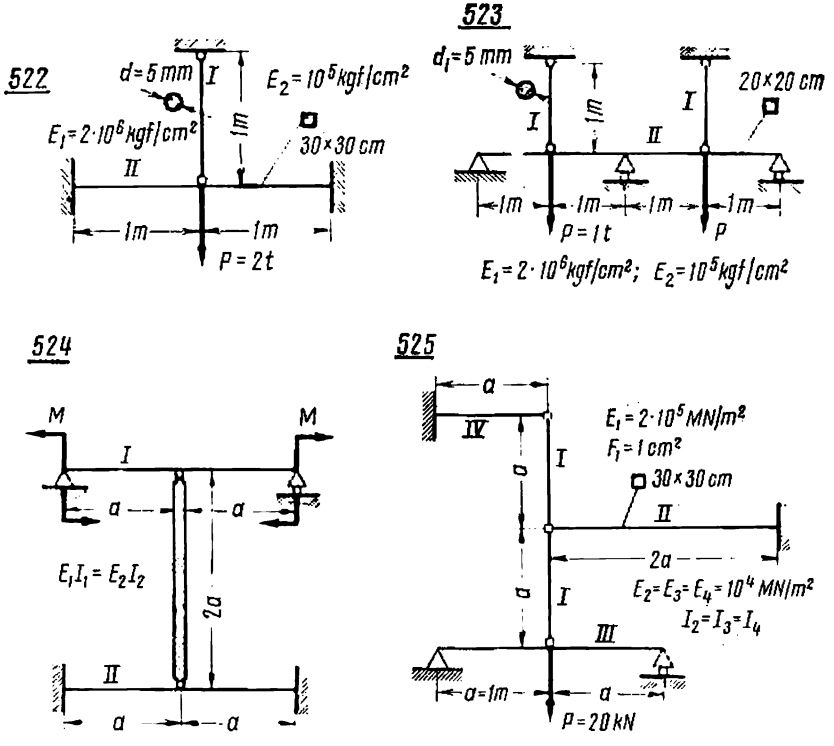


Problèmes 514-519. Déterminer l'abaissement y de l'articulation intermédiaire ou du glissoir.



Problèmes 520-525. Calculer les efforts longitudinaux N dans les tirants.



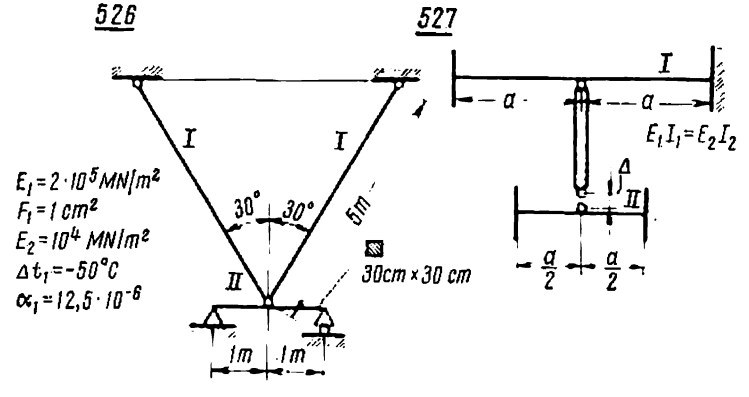


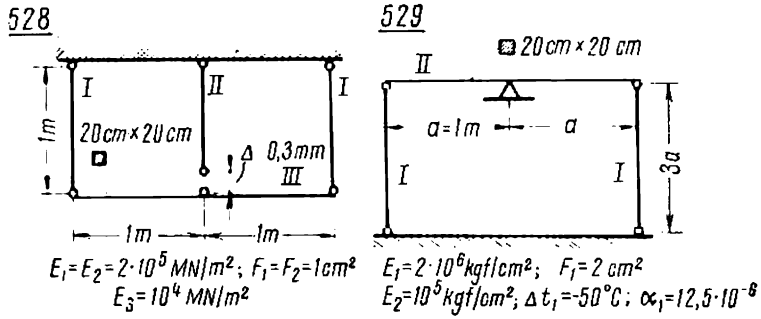
Problèmes 526-529. Déterminer :

1) les contraintes thermiques (problèmes 526 et 529) ;

2) les contraintes dues aux défauts de montage (problèmes 527 et 528);

dans les éléments des systèmes de poutres et de barres.

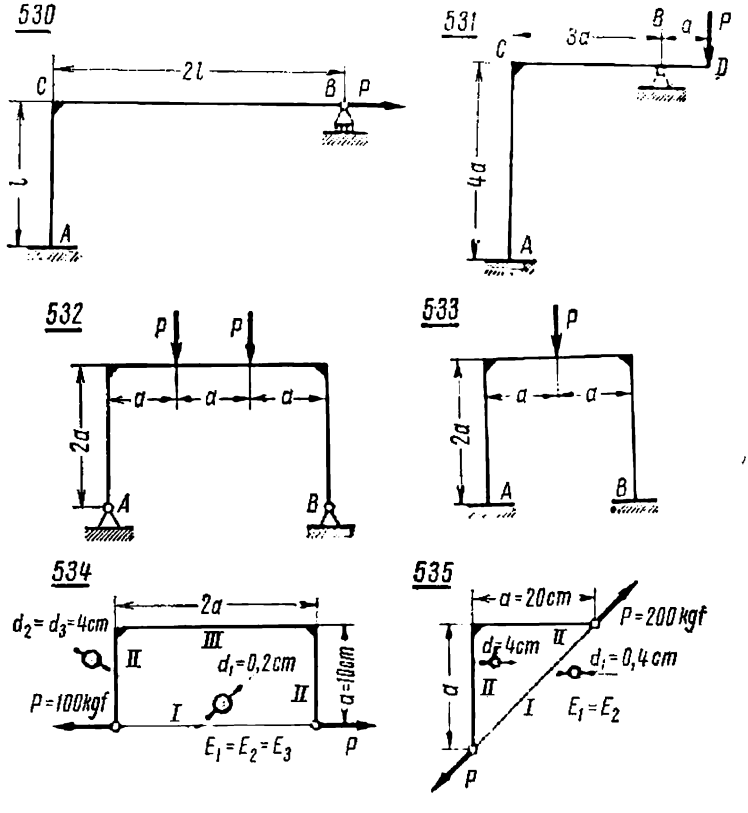


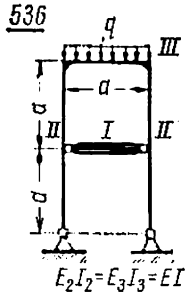


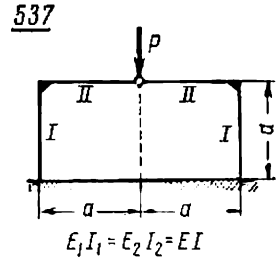
Problèmes 530-537. Calculer le système de poutres hyperstatique et déterminer les valeurs des moments fléchissants maximaux M_{max}.

Négliger l'allongement ou le raccourcissement des barres des systèmes. Les rigidités en flexion des sections de toutes les barres de chaque système sont les mêmes.

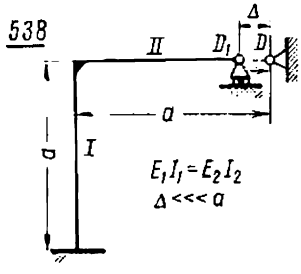
Dans les problèmes 534, 535 prendre en considération l'allongement et le raccourcissement des barres.

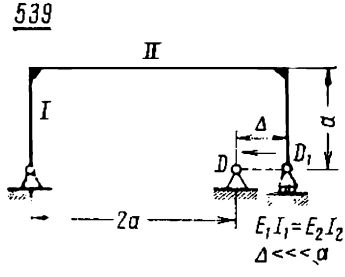


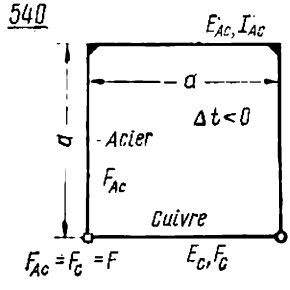


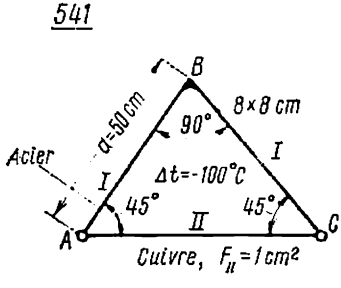


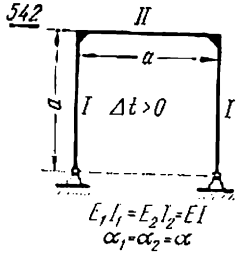
Problèmes 538-543. Calculer les réactions des appuis ou les efforts N dans les tirants des systèmes de poutres dus au montage (538, 539) ou dus à la variation de température (540-543). On prendra : $E_{Ac} = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $E_c = 10^6$ kgf/cm², $\alpha_{Ac} = 12 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_c = 16 \cdot 10^{-6}$.

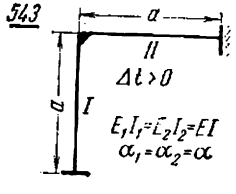












La *méthode des équations des trois moments.* Cette méthode est commode pour le calcul des poutres continues, c'est-à-dire des poutres comportant plusieurs travées sans articulations.

Supposons qu'on calcule une poutre continue à n travées (fig. 105) de section constante de rigidité EI, reposant sur des appuis de niveau. Une pareille poutre est hyperstatique d'ordre $n - 1$.

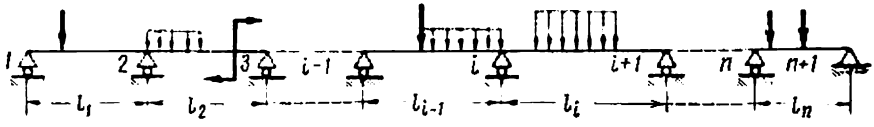


Fig. 105

La décomposition de la poutre se fait suivant les sections au droit des appuis. On obtient n poutres appuyées aux extrémités. On prend pour inconnues hyperstatiques les valeurs des moments fléchissants dans ces mêmes sections. Pour chaque paire de poutres adjacentes de travées l_{i-1} et l_i (fig. 106,*a*), on établit la condition de

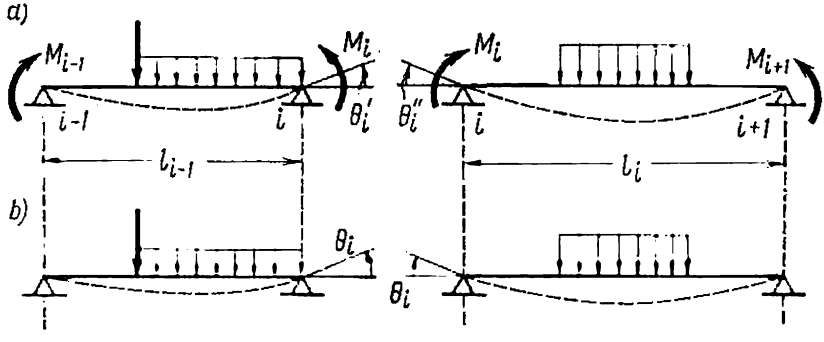


Fig. 106

raccordement continu des déformées, exprimant l'égalité des rotations des sections ($\theta'_i = \theta''_i$) au droit de l'appui intermédiaire i. On obtient ainsi un système de $n - 1$ équations des trois moments sous la forme canonique suivante :

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2M_i(l_{i-1} + l_i) + M_{i+1}l_i = -6EI(\theta_i^g + \theta_i^d). \qquad (131)$$

Dans cette expression les quantités M_{i-1}, M_i et M_{i+1} sont les trois moments inconnus dans les sections au droit des appuis $i-1$, i et $i+1$; θ_i^g et θ_i^d les rotations des sections au droit de l'appui i des poutres gauche et droite, dues seulement aux charges, agissant dans les travées respectives (fig. 106,*b*). Les valeurs de θ_i^g et θ_i^d peuvent être déterminées par n'importe quelle méthode s'avérant

rationnelle pour ce cas ou à l'aide des poutres représentées fig. 99 si cela est possible.

En donnant à i, dans l'équation (131), les valeurs 2, 3, 4, . . ., n, on obtient un système de $n-1$ équations. La solution de ce système donnera les valeurs de tous les moments inconnus surabondants dans les sections au droit des appuis de la poutre continue.

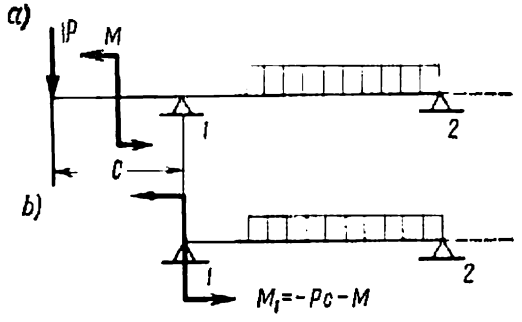


Fig. 107

Dans l'application pratique de la méthode des équations des trois moments, il est utile d'avoir en vue les remarques suivantes.

1. Les angles θ_i^g et θ_i^d sont portés dans les équations avec des signes positifs si les sections des poutres tournent dans le sens indiqué fig. 106,*b*.

2. Si la poutre continue comporte une console extrême chargée (fig. 107,*a*), cette partie, comme travée, n'est pas incluse dans les

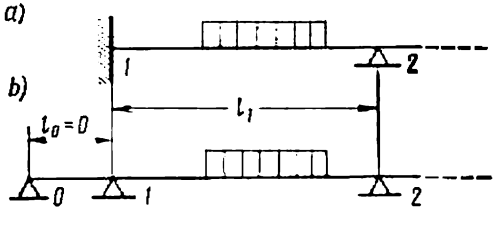


Fig. 108

équations des trois moments. La console est remplacée par le moment de la charge qui lui est appliquée par rapport à l'appui immédiat et agissant sur cette partie avec le signe correspondant (fig. 107,*b*). Ce couple doit être inclu dans la partie gauche de l'équation des trois moments.

3. Si la section extrême de la poutre continue est encastrée (fig. 108,*a*), sa rotation est nulle ($\theta_1 = 0$). Explicitement cette condition peut être exprimée à l'aide de l'équation des trois moments,

si on remplace l'encastrement par une travée fictive de portée $l_0=0$ (fig. 108,*b*). En considérant les deux travées adjacentes l_0 et l_1, on peut exprimer la condition $\theta_1 = 0$ d'après l'équation des trois moments de la façon suivante:

$$2M_1l_1 + M_2l_1 = -6EI\theta_1^0. \qquad (132)$$

4. Si le couple concentré extérieur est appliqué dans la section au droit de l'appui intermédiaire de la poutre continue (fig. 109,*a*), il est rationnel de rapporter le moment M de ce couple à la charge appliquée dans la travée.

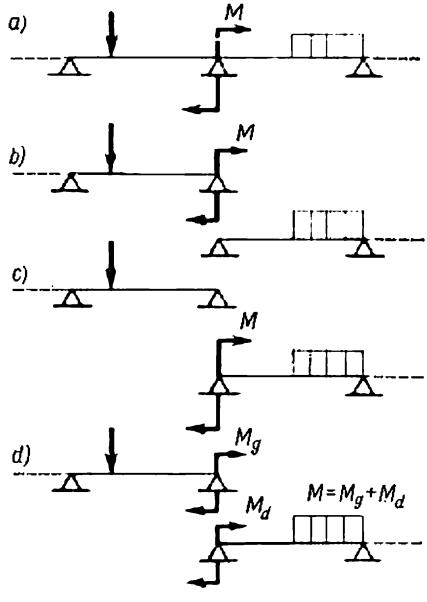


Fig. 109

Le moment du couple peut être rapporté ou à la travée gauche (fig. 109,*b*), ou à la travée droite (fig. 109,*c*), ou simultanément aux travées gauche et droite en le décomposant arbitrairement (fig. 109,*d*). Il est rationnel de rapporter le moment du couple à la travée la moins chargée.

Après avoir déterminé, à l'aide des équations des trois moments, tous les moments fléchissants dans les sections au droit des appuis de la poutre continue, on étudie chaque poutre isolée sur appuis sous l'action de la charge appliquée dans la travée et des moments appliqués en ses extrémités. Par exemple, on peut obtenir la réaction exercée par l'appui i de la poutre continue comme la somme des réactions exercées par les appuis i de deux poutres adjacentes. Chacune de ces réactions est déterminée par l'équation de la statique. La formule générale pour la réaction à l'appui i est de la forme:

$$A_i = A_i^0 + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}, \qquad (133)$$

où A_i^0 est la somme des réactions exercées sur les i-ièmes appuis de deux poutres adjacentes, dues seulement aux charges données dans les travées;

$\frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}}$ la réaction sur le i-ième appui de la poutre gauche, due seulement aux moments M_{i-1} et M_i; $\frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}$ la réaction sur le

i-ième appui de la poutre droite, due seulement aux moments M_{i+1} et M_i.

Quand on calcule la réaction de l'encastrement, on ne tient pas compte de la travée fictive d'ordre zéro.

Quand on calcule la réaction de l'appui précédant la console chargée, on inclut dans la quantité A_i^0 la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur la console.

On peut construire les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants pour la poutre continue séparément pour chaque travée comme pour une poutre appuyée aux extrémités et soumise à des forces données et à des moments aux appuis. On peut les construire aussi par superposition des diagrammes, obtenus pour chaque travée sous l'action des moments aux appuis et des forces données.

Il est rationnel de déterminer la rotation et le déplacement vertical d'une section arbitraire de la poutre continue en considérant seulement une travée comme une poutre appuyée aux extrémités, soumise à une charge donnée dans la travée et à des moments dans les sections au droit des appuis. On peut appliquer ici toutes les méthodes utilisées pour le calcul des poutres isostatiques.

Exemple 58. Déterminer le numéro de la poutre en double té et calculer f_c. On prendra : $P = 2$ t, $M = 4$ t·m, $q = 6$ t/m, $c = 1$ m, $l_1 = 3$m, $l_2 = 2$m, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2 (fig. 110,*a*).

Solution. On décompose la poutre donnée en deux avec des travées de portée l_1 et l_2 (fig. 110,*b*). On applique à la poutre de travée l_1 : à l'appui gauche le moment M_1 de la force P, agissant sur la console, à l'appui droit le couple de moment M et le moment fléchissant inconnu M_2.

On applique à la poutre de travée l_2 : la charge uniformément répartie de coefficient de charge linéique q, à l'appui gauche le moment fléchissant inconnu M_2 et à l'appui droit le moment fléchissant inconnu M_3.

On remplace l'encastrement par une travée fictive $l_3 = 0$.

Les deux équations des trois moments pour la poutre hyperstatique du deuxième ordre donnée sont :

$$\left.\begin{aligned} M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 &= -6EI(\theta_1^g - \theta_1^d), \\ M_2 l_2 + 2M_3 l_2 &= -6EI\theta_2^g. \end{aligned}\right\}$$

Puisque $M_1 = -P_c = -2 \cdot 1 = -2$t·m et que d'après les poutres 4) et 5) de la fig. 99, en tenant compte de la règle des signes,

$$EI\theta_1^g = \frac{Ml_1}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4 \text{ t} \cdot \text{m}^2,$$

$$EI\theta_1^d = EI\theta_2^g = \frac{ql_2^3}{24} = \frac{6 \cdot 2^3}{24} = 2 \text{t} \cdot \text{m}^2,$$

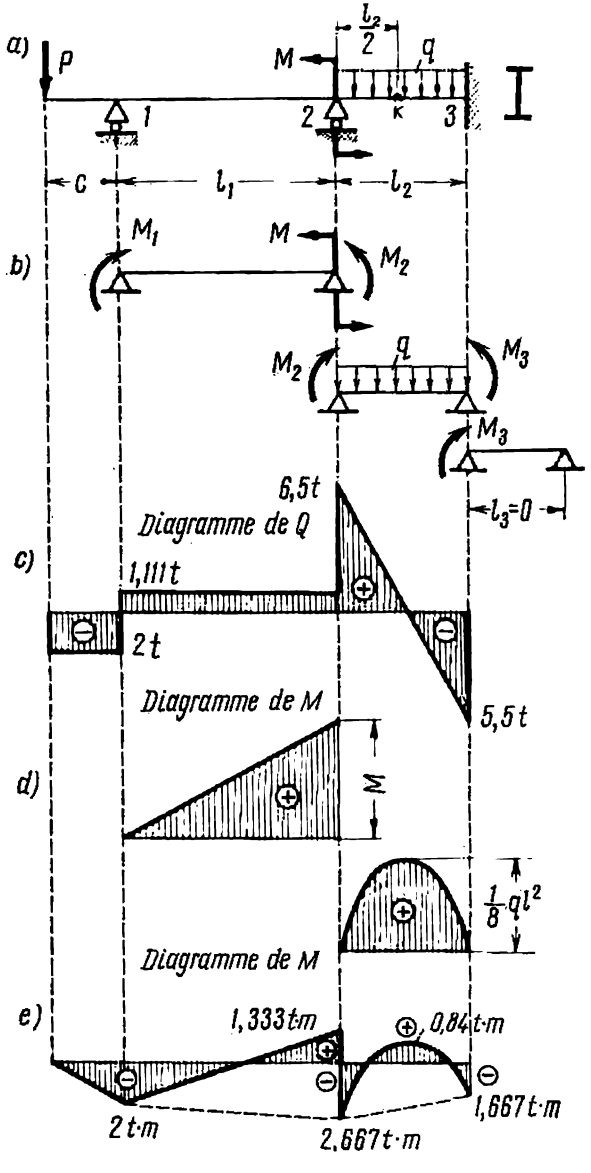

a)
P
M
q
1
2
K
3
I
c
l_1
l_2
$\frac{l_2}{2}$
b)
M_1
M
M_2
q
M_3
$l_3=0$
c)
6,5t
Diagramme de Q
1,111t
2t
5,5t
d)
Diagramme de M
M
$\frac{1}{8}ql^2$
e)
Diagramme de M
1,333t·m
0,84t·m
2t·m
2,667t·m
1,667t·m

Fig. 110

les équations des trois moments prendront la forme:

$$\left.\begin{aligned} 10M_2 + 2M_3 &= -30, \\ M_2 + 2M_3 &= -6, \end{aligned}\right\}$$

d'où $M_2 = -\frac{8}{3} \approx -2{,}667$ t·m, $M_3 = -\frac{5}{3} \approx -1{,}667$ t·m.

A l'aide de la formule (133), on détermine les réactions A_1, A_2 et A_3 dans les liaisons:

$$A_1 = A_1^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} = P + \frac{M}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_1} =$$

$$= 2 + \frac{4}{3} + \frac{-\frac{8}{3} + 2}{3} = \frac{28}{9} \approx 3{,}111\text{t};$$

$$A_2 = A_2^0 + \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{M_3 - M_2}{l_2} = -\frac{M}{l_1} + \frac{ql_2}{2} +$$

$$+ \frac{M_1 - M_2}{l_2} + \frac{M_3 - M_2}{l_2} = -\frac{4}{3} + 6 + \frac{-2 + \frac{8}{3}}{3} +$$

$$+ \frac{-\frac{5}{3} + \frac{8}{3}}{2} = \frac{97}{18} \approx 5{,}389\text{t};$$

$$A_3 = A_3^0 + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = \frac{ql_2}{2} + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = 6 +$$

$$+ \frac{-\frac{8}{3} + \frac{5}{3}}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5\text{t}.$$

On vérifie les valeurs des réactions ainsi obtenues en prenant la somme des projections sur l'axe vertical:

$$A_1 + A_2 + A_3 - P - ql_2 = 0; \quad \frac{1}{18}(56 + 97 + 99) - 2 - 12 = 0.$$

On construit le diagramme des efforts tranchants, représenté fig. 110,*c*.

On construit le diagramme des moments fléchissants par la méthode de superposition. Le diagramme des moments fléchissants pour la poutre gauche, provoqués par la charge appliquée dans la travée, est triangulaire, pour la poutre droite, parabolique (fig. 110,*d*).

Le diagramme des moments fléchissants, provoqués par les moments M_1, M_2 et M_3 est une ligne droite brisée représentée en pointillés (fig. 110,*e*). On ajoute à ce diagramme le diagramme linéaire des moments fléchissants dans la console, provoqués par la force P. A partir des lignes pointillées dans la travée, on rapporte les ordonnées des diagrammes des moments fléchissants dans les travées, provoqués par les forces données. En tenant compte des signes des diagrammes des moments fléchissants, provoqués par les moments et la charge, on obtient le diagramme résultant du moment fléchissant.

Déterminons l'abscisse x pour laquelle dans la travée droite le moment fléchissant est maximal ($M_{\max_d}$):

$$x = \frac{Q}{q} = \frac{117}{18 \cdot 6} \approx 1{,}08\text{m}.$$

Puisque:

$$\Delta M = \frac{Qx}{2} = \frac{117}{18} \cdot \frac{1{,}08}{2} = 3{,}51\ \text{t} \cdot \text{m},$$

on a:

$$M_{\max_d} = 3{,}51 - \frac{8}{3} \approx 0{,}84\ \text{t} \cdot \text{m}.$$

Le diagramme montre que:

$$M_{\max} = \frac{8}{3}\ \text{t} \cdot \text{m}.$$

Selon la formule:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8 \cdot 10^5}{3 \cdot 16 \cdot 10^2} \approx 167\ \text{cm}^3.$$

D'après le catalogue de l'assortiment, pour la poutre en double té N°18a, on a:

$$W = 159\ \text{cm}^3 \text{ et } \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{167 - 159}{159} \cdot 100 = 4{,}8\%$$

(surtension $\leqslant 5$ %, ce qui est admissible).

On choisit la poutre en double té N°18a, ce qui donne:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{8 \cdot 10^5}{3 \cdot 159} = 1\,667\ \text{kgf/cm}^2 \text{ et } I = 1\,430\ \text{cm}^4.$$

Pour déterminer le déplacement vertical f_c, on utilise la méthode de superposition et les valeurs des déplacements verticaux des

poutres 4) et 5) de la fig. 99:

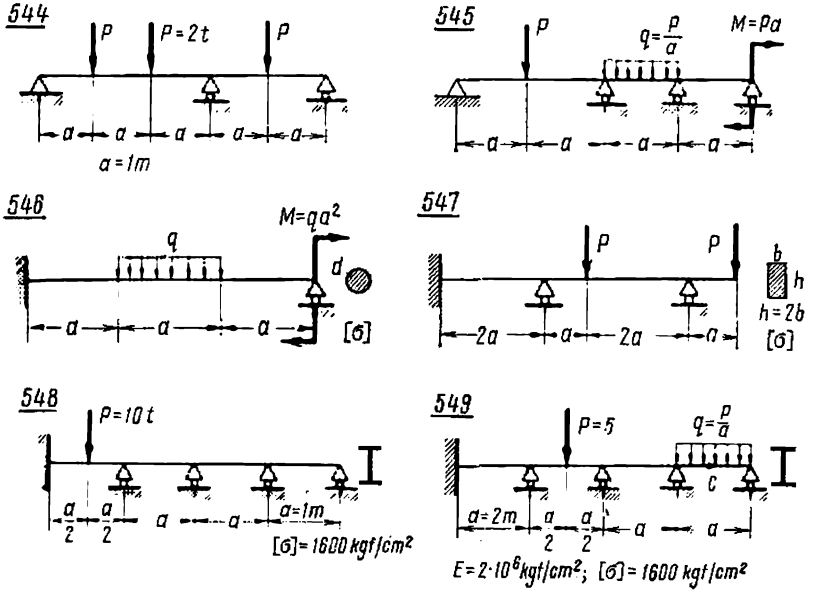
$$f_c = -\frac{5}{384}\frac{ql_2^4}{EI} - \frac{M_2 l_2^2}{16EI} - \frac{M_3 l_2^2}{16EI} =$$

$$= \frac{10^9}{16 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}43 \cdot 10^3}\left(-\frac{5}{24} \cdot 6 \cdot 16 + \frac{8}{3} \cdot 4 + \frac{5}{3} \cdot 4\right) \approx$$

$$\approx 0{,}058\,\text{cm} \approx 0{,}58\,\text{mm}.$$

Problèmes 544-549. Calculer les poutres hyperstatiques (544, 545), choisir les dimensions nécessaires des sections droites des poutres (546-549).

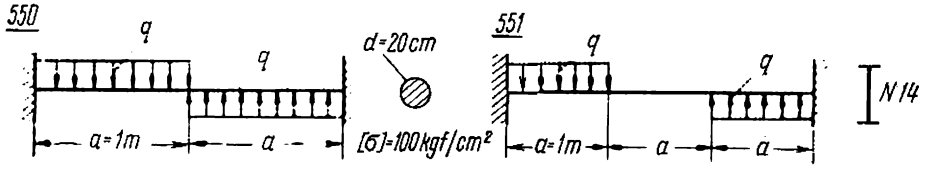
Dans le problème 549 déterminer aussi le déplacement vertical de la section C.

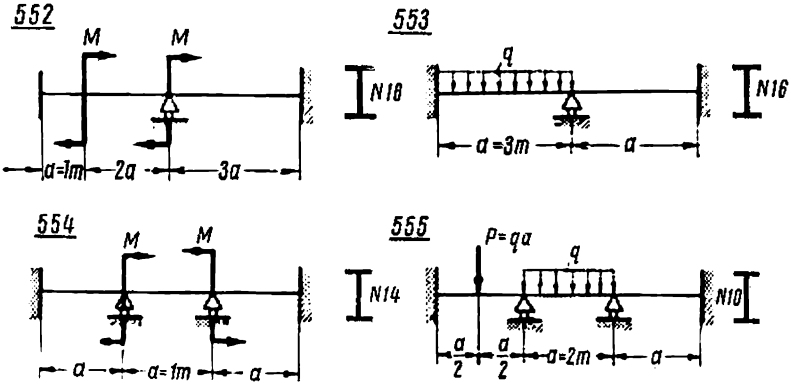


Problèmes 550-555. Calculer les valeurs des charges admissibles appliquées aux poutres.

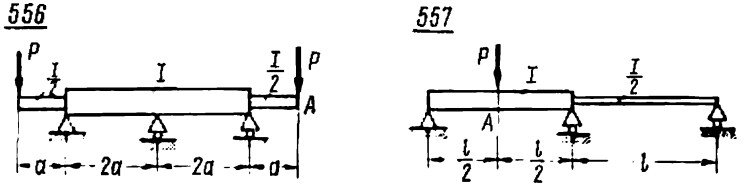
Dans les problèmes 551-553 on prendra $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm².

Dans les problèmes 554 et 555 on prendra $[\sigma] = 160$ MN/m².

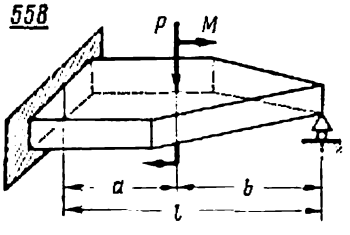




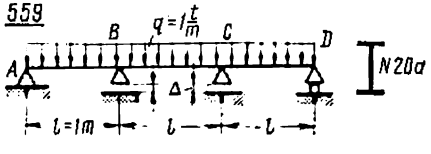
Problèmes 556-557. Calculer les déplacements verticaux des sections A des poutres à gradins.



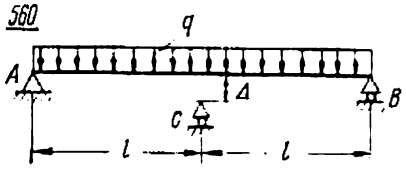
Problème 558. Calculer les valeurs de M, a et b pour lesquelles la poutre de section droite donnée sera une poutre d'égale résistance.

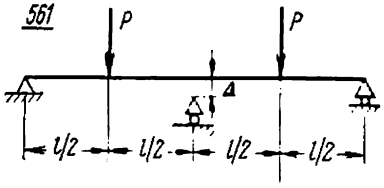


Problème 559. Déterminer le moment fléchissant maximal de la poutre pour une dénivellation de $\Delta = 1$ mm des appuis intermédiaires ($E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2).



Problèmes 560-561. Calculer les valeurs Δ des dénivellations des appuis pour lesquelles les contraintes normales maximales dans les poutres de rigidité donnée EI prennent des valeurs minimales.





Eléments de calcul des poutres hyperstatiques d'après la capacité portante

On suppose que le matériau de la poutre hyperstatique est plastique avec un diagramme simplifié efforts — allongements ou raccourcissements.

Puisque la capacité portante de chaque travée est épuisée quand il se forme trois rotules plastiques dans la travée (une rotule dans la travée et les deux autres dans les sections sur appuis), toutes les travées peuvent être considérées séparément et indépendamment l'une de l'autre. Il est commode d'effectuer le calcul de la poutre par la méthode de nivellation des moments fléchissants.

Si la poutre a une section droite constante, la valeur du moment fléchissant admissible est aussi constante et est déterminée par la formule (114):

$$M_{\max} = 2[\sigma]S,$$

où S est le moment statique de la moitié de l'aire de la section droite par rapport à son axe central.

On construit le diagramme du moment fléchissant définitif (nivellé) pour chaque travée de manière que ses ordonnées soient égales aux valeurs $M'_{\max}$ dans les sections sur appuis et dans la travée. D'après la géométrie des diagrammes nivellés ainsi obtenus on exprime $M'_{\max}$ en fonction des charges appliquées dans les travées. A l'aide de la formule (114) on détermine les charges maximales admissibles pour chaque travée.

Si l'extrémité de la poutre est articulée, la dernière travée devient géométriquement déformable, quand il se forme seulement deux rotules plastiques (dans la travée et dans la section sur l'appui intermédiaire). Dans ce cas le moment fléchissant à l'extrémité de la poutre est nul, tandis que dans la travée et dans la section sur l'appui intermédiaire, il est égal à $-M'_{\max}$.

La construction du diagramme des moments fléchissants nivellés pour une poutre continue est donnée fig. 111. Pour une poutre à gradins avec des valeurs données de S, on construit le diagramme nivellé des moments fléchissants pour chaque gradin selon sa valeur $M'_{\max}$. Le calcul ensuite s'effectue de la même manière que pour les poutres à section constante.

Si la charge est donnée et que l'on demande de choisir la section droite de la poutre, on détermine d'après la charge donnée les

moments fléchissants admissibles M'_{max} dans les sections de chaque travée où des rotules plastiques doivent se former. D'après la valeur maximale de ces moments on établit la valeur de $S = \frac{M'_{max}}{2[\sigma]}$ et les dimensions de la section droite.

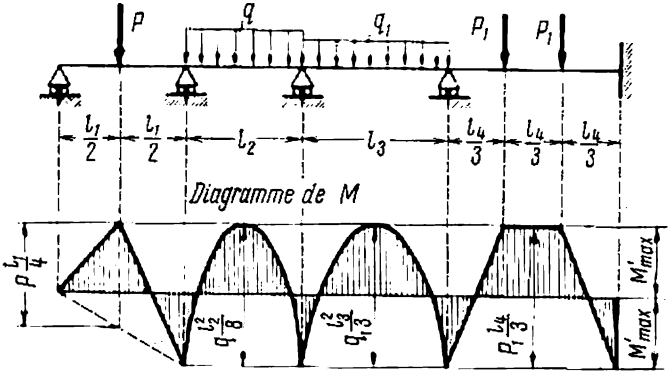


Fig. 111

Les dimensions d'une poutre à section variable pour chaque travée sont établies d'une manière analogue.

Exemple 59. Etant données: S, l_1, l_2, $[\sigma]$ (fig. 112); calculer P'_{max} et q'_{max}.

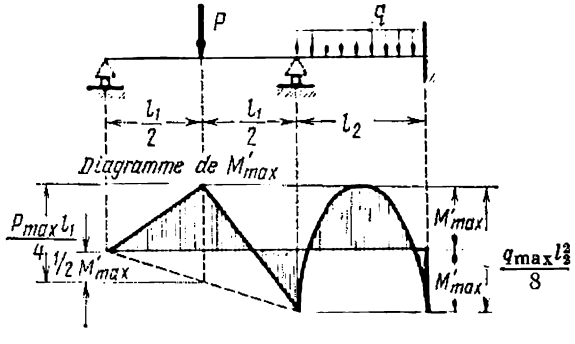


Fig. 112

Solution. On construit le diagramme du moment fléchissant admissible « nivellé »:

$$M'_{max} = 2[\sigma]S.$$

Puisque:

$$\frac{P'_{max} l_1}{4} = \frac{3}{2} M'_{max} = 3[\sigma]S$$

et

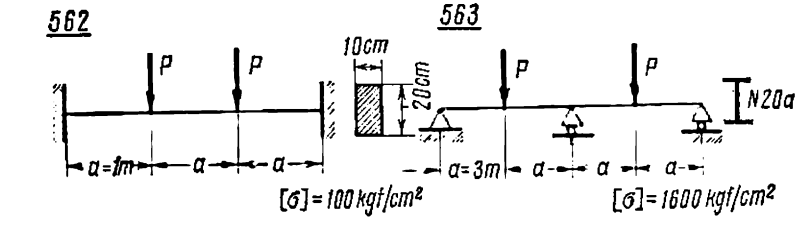
$$\frac{q'_{\max} l_2^2}{8} = 2M'_{\max} = 4[\sigma]S,$$

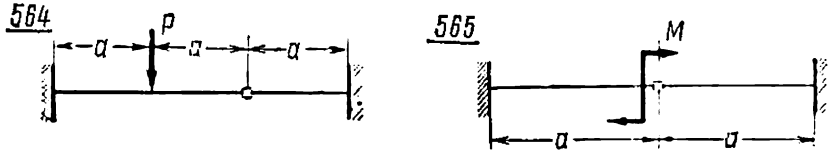
les charges maximales admissibles dans les travées de la poutre auront pour valeurs:

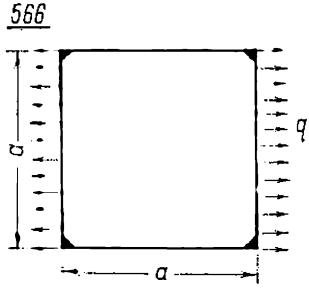
$$P'_{\max} = 12[\sigma]\frac{S}{l_1} \text{ et } q'_{\max} = 32[\sigma]\frac{S}{l_2^2}.$$

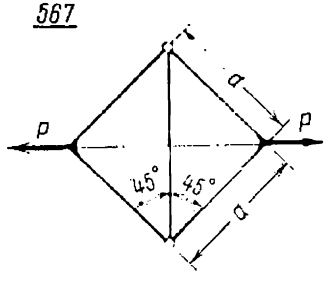
Problèmes 562-567. Déterminer les forces admissibles pour les poutres et les systèmes.

Dans les problèmes 564-567 on supposera $[\sigma]$, a, W et $\eta = \frac{2S}{W}$ connus.



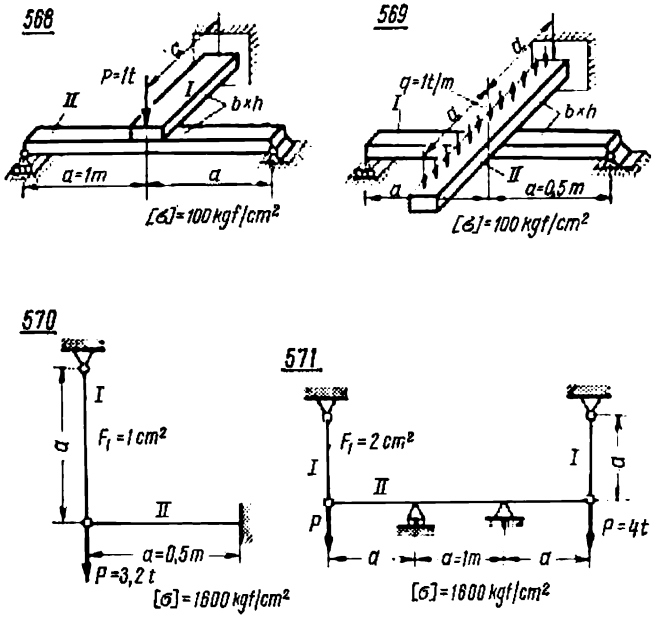






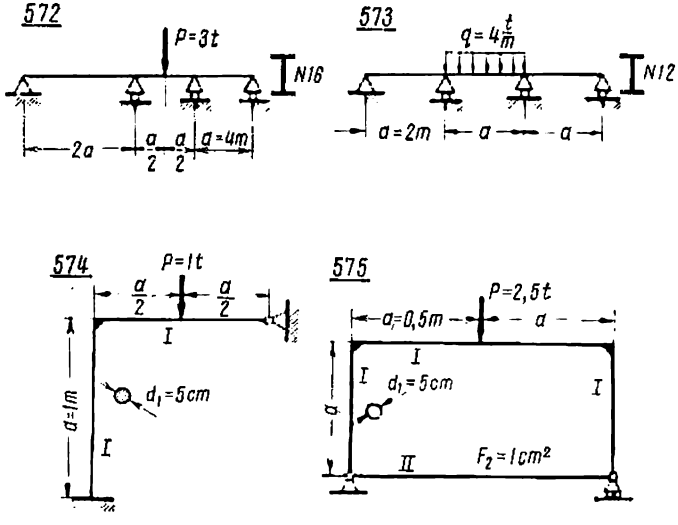
Problèmes 568-571. Déterminer les dimensions des sections droites des poutres et des systèmes.

On supposera que la section des poutres est rectangulaire ($b = 2h$) et que le matériau des poutres et des tiges est le même.



Problèmes 572-575. Déterminer les coefficients de sécurité $n_{éc}$ (d'après la charge) pour les poutres et systèmes.

Pour la limite d'écoulement on prendra $\sigma_{éc} = 2\,400$ kgf/cm².



§ 9. L'énergie potentielle de déformation élastique en flexion

La quantité d'énergie potentielle de déformation élastique, accumulée dans la poutre lors d'une flexion plane, est déterminée par la formule :

$$U = \sum \int \frac{M^2\,dx}{2EI} + \sum k \int \frac{Q^2\,dx}{2GF}, \tag{134}$$

où

$$k = F \int_F \left(\frac{S}{bI}\right)^2 dF \tag{135}$$

est un coefficient abstrait, caractérisant la non-uniformité de la répartition des contraintes tangentielles dans la section droite de la poutre et qui dépend de la forme de la section.

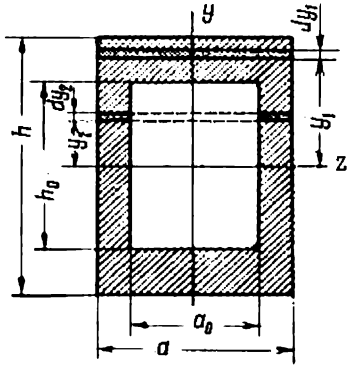


Fig. 113

Dans la formule (134) l'intégration s'effectue suivant la longueur de chaque tronçon de la poutre et la sommation suivant tous les tronçons. Dans la formule (135) l'intégration s'effectue suivant l'aire F de la section droite ; les quantités S, b et I ont le même sens que dans la formule (99) pour la contrainte tangentielle ; E et G sont les modules d'élasticité longitudinale et transversale du matériau de la poutre.

Exemple 60. Etant données : a, a_0, h, h_0 (fig. 113) ; calculer $k = F \int_F \left(\frac{S}{bI}\right)^2 dF$.

Solution. L'aire de la section donnée est :

$$F = ah - a_0 h_0.$$

Le moment d'inertie équatorial de l'aire de la section par rapport à l'axe z est :

$$I = \frac{1}{12}(ah^3 - a_0h_0^3).$$

Pour les semelles, on a :

$$S_1 = \frac{a}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right);\ dF_1 = a\,dy;\ b = a.$$

Pour l'âme, on a :

$$S_2 = \frac{ah^2 - a_0h_0^2}{8} - \frac{a - a_0}{2}y_2^2;\ dF_2 = (a - a_0)\,dy_2;$$

$$b = a - a_0.$$

Le coefficient de non-uniformité des contraintes tangentielles sera :

$$k = \frac{2F}{I^2}\left[\int\limits_{F_1}\left(\frac{S_1}{a}\right)^2 dF_1 + \int\limits_{F_2}\left(\frac{S_2}{a - a_0}\right)^2 dF_2\right] =$$

$$= \frac{F}{2I^2}\left\{a\int\limits_{h_0/2}^{h/2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)^2 dy_1 + (a - a_0)\int\limits_0^{h/2}\left[\frac{ah^2 - a_0h_0^2}{4(a - a_0)} - y_2^2\right]^2 dy_2\right\} =$$

$$= \frac{F}{2I^2}\left\{a\left[\frac{h^4}{16}\left(\frac{h}{2} - \frac{h_0}{2}\right) - \frac{h^2}{2}\left(\frac{h^3}{3\cdot 8} - \frac{h_0^3}{3\cdot 8}\right) + \frac{h^5 - h_0^5}{5\cdot 32}\right] + \right.$$

$$\left. + (a - a_0)\left[\frac{ah^2 - a_0h_0^2}{16(a - a_0)^2}\cdot\frac{h_0}{2} - \frac{ah^2 - a_0h_0^2}{2(a - a_0)}\cdot\frac{h_0^3}{3\cdot 8} + \frac{h_0^5}{5\cdot 32}\right]\right\}.$$

En substituant les valeurs de F et I et effectuant certaines transformations, on obtient :

$$k = \frac{6}{5}\,\frac{1 - \dfrac{a_0h_0}{ah}}{\left(1 - \dfrac{a_0}{a}\right)\left(1 - \dfrac{a_0h_0^3}{ah^3}\right)^2}\left\{1 - \frac{a_0}{a}\left[1 - \frac{1}{8}\left(15\frac{h_0}{h} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - 30\frac{h_0^3}{h^3} + 7\frac{h_0^5}{h^5} + 8\frac{a_0}{a}\cdot\frac{h_0^5}{h^5}\right]\right\}.$$

Les cas particuliers sont :

1) $a_0 = a$; $\quad k = \frac{6}{5}$.

2) $a = h$ et $a_0 = h_0$; $\quad k = \frac{6}{5} \cdot \frac{1 + \frac{a_0}{a}}{\left(1 + \frac{a_0^4}{a^4}\right)^2} \left\{1 - \frac{a_0}{a}\left[1 - \right.\right.$

$$\left. \left. - \frac{1}{8}\frac{a_0}{a}\left(15 - 30\frac{a_0^2}{a^2} + 7\frac{a_0^4}{a^4} + 8\frac{a_0^5}{a^5}\right)\right]\right\}.$$

Si, par exemple, $a_0 = \frac{a}{2}$, alors $k = \frac{387}{250} = 1{,}548$.

3) Poutre en double té N°20.

D'après le catalogue, on a : $a = b = 10$ cm ; $h = 20$ cm ; $a - a_0 = d = 0{,}52$ cm ; $a_0 = 9{,}48$ cm ; $h_0 = h - 2t = 20 - 2 \cdot 0{,}84 = 18{,}32$ cm.

Puisque $\frac{a_0}{a} \approx 0{,}948$; $\frac{h_0}{h} = 0{,}916$; $\frac{a_0 h_0}{ah} \approx 0{,}868$;

$$\frac{h_0^3}{h^3} \approx 0{,}769; \quad \frac{a_0 h_0^3}{ah^3} \approx 0{,}729; \quad \frac{h_0^5}{h^5} \approx 0{,}645 \qquad \text{et}$$

$$\frac{a_0 h_0^5}{ah^5} \approx 0{,}611,$$

alors :

$$k = \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - 0{,}868}{(1 - 0{,}948)(1 - 0{,}729)^2} \left\{1 - 0{,}948\left[1 - \frac{1}{8}(15 \cdot 0{,}916 - \right.\right.$$

$$\left. \left. - 30 \cdot 0{,}769 + 7 \cdot 0{,}645 + 8 \cdot 0{,}611)\right]\right\} \approx 2{,}51.$$

Pour une poutre en double té laminé le coefficient de non-uniformité des contraintes tangentielles en flexion peut être déterminé approximativement par la formule :

$$k = \left(1 - \frac{a_0 h_0}{ah}\right) \Big/ \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) = \frac{F}{F_a},$$

où F est l'aire de la section ;

F_a l'aire de l'âme de hauteur h, c'est-à-dire $F_a = hd$.

A l'aide de cette formule, on trouve, par exemple, pour la poutre en double té N° 20: $F = 26{,}8$ cm², $F_a = 20 \cdot 0{,}52 = 10{,}4$ cm²; $k = \frac{26{,}8}{10{,}4} \approx 2{,}58$.

Exemple 61. Déterminer le numéro de la poutre en double té et la valeur de U. On prendra: $P = 60$ kN, $q = 30$ kN/m, $a = 2$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m², $G = 8 \cdot 10^4$ MN/m²; $[\sigma] = 160$ MN/m² (fig. 114).

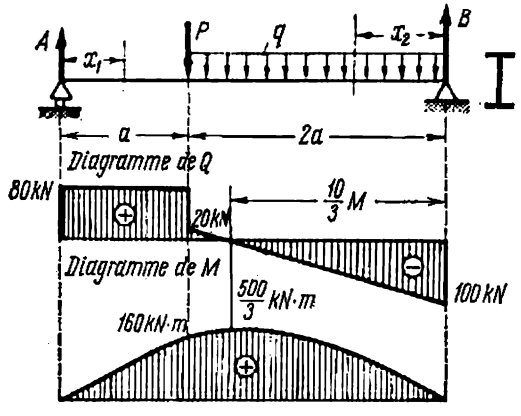


Fig. 114

Solution. On détermine les réactions des appuis d'après les conditions de la statique:

$$A = \frac{2P + 2qa}{3} = 80 \text{ kN}; \quad B = P + 2qa - A = 100 \text{ kN}.$$

On établit les équations pour Q et M:

$$Q_{x_1} = A = 80 \text{ kN}; \qquad M_x = Ax_1 = 80x_1 \text{ kN·m};$$

$$M_{x_1=0} = 0; \qquad M_{x_1=a} = 160 \text{ kN·m};$$

$$Q_{x_2} = -B + qx_2 = -100 + 30x_2; \qquad Q_{x_2=0} = -100 \text{ kN};$$

$$Q_{x_2=2a} = -100 + 30 \cdot 4 = 20 \text{ kN};$$

$$M_{x_2} = Bx_2 - \frac{qx_2^2}{2} = 100x_2 - \frac{30x_2^2}{2}; \quad M_{x_2=0} = 0;$$

$$M_{x_2=2a} = 100 \cdot 4 - \frac{30}{2} \cdot 16 = 160 \text{ kN·m}.$$

On détermine $M_{\max}$. Selon la condition :

$$Q_{x_2} = -100 + 30x_2 = 0, \qquad x_2 = \frac{10}{3}\,\text{m}.$$

Par conséquent :

$$M_{\max}{}_{x_2=\frac{10}{3}} = 100 \cdot \frac{10}{3} - \frac{30}{2} \cdot \frac{10^2}{9} = \frac{500}{3}\,\text{kN} \cdot \text{m}.$$

D'après la formule :

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{500 \cdot 10^3}{3 \cdot 160 \cdot 10^6} \approx 1\,042 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^3 \approx 1\,042\,\text{cm}^3.$$

On choisit, dans le catalogue, la poutre en double té N° 45 pour laquelle :

$$W = 1\,220\,\text{cm}^3; \quad I = 27\,450\,\text{cm}^4; \quad F = 83{,}0\,\text{cm}^2;$$

$$h = 45\,\text{cm}; \quad d = 0{,}86\,\text{cm} \text{ et } k = \frac{F}{F_0} = \frac{83}{45 \cdot 0{,}86} \approx 2{,}14.$$

On détermine l'énergie potentielle de déformation élastique comme la somme des énergies dues au moment fléchissant (U_M) et à l'effort tranchant (U_Q).

D'après la formule (134) on a :

$$U_M = \sum \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\left(\int_0^a M_{x_1}^2\,dx_1 + \int_0^{2a} M_{x_2}^2\,dx_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[64\int_0^a x_1^2\,dx_1 + \frac{1}{4}\int_0^{2a}(20x_2 - 3x_2^2)^2\,dx_2\right] \cdot 10^8 =$$

$$= \frac{10^8}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 27\,450 \cdot 10^{-8}}\left(\frac{64}{3} \cdot 8 + \frac{800}{3} \cdot 8 - 120 \cdot 16 + \frac{72}{5} \cdot 32\right) \approx$$

$$\approx 769{,}4\,\text{J};$$

$$U_Q = \sum k \int \frac{Q^2\,dx}{2GF} = \frac{k}{2GF}\left(Q_{x_1}^2 a + \int_0^{2a} Q_{x_2}^2\,dx_2\right) =$$

$$= \frac{k \cdot 10^8}{2GF}\left[64a + \int_0^{2a}(-10 + 3x_2)^2\,dx_2\right] = \frac{k \cdot 10^8}{2GF}(64a +$$

$$+ 200a - 120a^2 + 24a^3 = \frac{2{,}14 \cdot 10^8}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 83{,}0 \cdot 10^{-4}}(128 + 400 -$$

$$- 480 + 192) \approx 38{,}7\,\text{J};$$

$$U = U_M + U_Q = 769{,}4 + 38{,}7 = 808{,}1\,\text{J}.$$

Pour les poutres ordinaires l'énergie potentielle due à l'effort tranchant étant petite devant celle due au moment fléchissant, on n'en tient pas compte, en général.

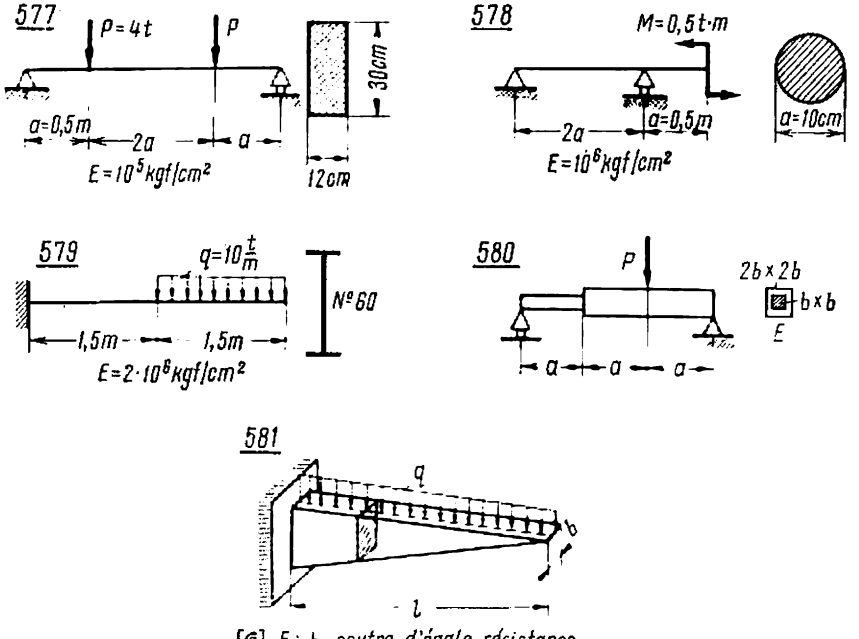
Dans cet exemple :

$$\frac{U_Q}{U_M} \cdot 100 = \frac{38{,}7}{769{,}4} \cdot 100 \approx 5\%.$$

L'énergie potentielle due à l'effort tranchant ne peut être négligée dans les poutres courtes, car dans ces poutres elle peut atteindre une valeur considérable.

Problèmes 576-581. Calculer l'énergie potentielle U de déformation élastique des poutres en tenant compte seulement des moments fléchissants.

Pour le problème 576, les poutres sont représentées aux problèmes 222-231. On supposera connues pour ces poutres les charges, les longueurs l et les rigidités des sections EI.



[σ], E ; b, *poutre d'égale résistance*

Problème 582. Déterminer l'effet des types de liaison d'une poutre soumise à une force dans la section médiane, sur la valeur de l'énergie potentielle due au moment fléchissant :

a) poutre sur appuis simples aux extrémités,

b) poutre avec encastrement à l'une de ses extrémités et appui simple à l'autre,

c) poutre avec encastrements aux extrémités.

Problème 583. Déterminer comment varie l'énergie potentielle due au moment fléchissant, d'une poutre de section rectangulaire sur appuis simples et soumise à une force P dans la section médiane, si on la remplace par une poutre d'égale résistance de hauteur constante.

Problème 584. Calculer les coefficients de forme k des sections: 1) rectangulaire, 2) circulaire, 3) triangulaire équilatérale, 4) circulaire annulaire, 5) carrée à âme vide, 6) en double té N° 60. Dans ce dernier cas montrer que le coefficient k pour la section en double té peut être considéré égal au rapport de l'aire de la section à l'aire de l'âme de même hauteur que le profil.

Problème 585. Calculer l'énergie potentielle due à l'effort tranchant pour les poutres étudiées dans les problèmes 577, 578 et 579. Evaluer en pour-cent l'effet de l'effort tranchant sur l'énergie potentielle en flexion.

IX. POUTRE DROITE DE GRANDE RIGIDITÉ SOUMISE À DES SOLLICITATIONS COMPOSÉES

§ 1. Flexion déviée

En flexion déviée d'une poutre, qui est une combinaison de deux flexions planes, la contrainte normale σ en un point arbitraire dans la section droite de coordonnées y et z (fig. 115) est définie par la formule :

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = M\left(\frac{y\cos\alpha}{I_z} + \frac{z\sin\alpha}{I_y}\right), \qquad (136)$$

où I_y et I_z sont les moments d'inertie principaux centraux de la section droite de la poutre ;

M_y et M_z les moments fléchissants par rapport aux axes y et z et qui sont les composantes du moment fléchissant résultant $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, appliqué dans le plan xp, incliné suivant un angle α par rapport au plan principal d'inertie xy de la poutre.

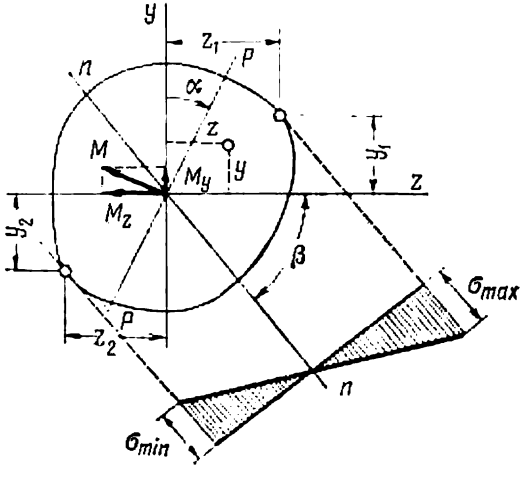


Fig. 115

Ici et dans ce qui suit on suppose M_y et M_z positifs s'ils engendrent des contraintes de traction en tous les points du premier quadrant de la section.

L'équation de l'axe neutre nn est :

$$y = -\frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} z = -\frac{I_z}{I_y} z \operatorname{tg} \alpha = z \operatorname{tg} \beta, \tag{137}$$

ou

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \tag{138}$$

est la tangente de l'angle formé par l'axe neutre nn avec l'axe z.

L'axe neutre nn dévie toujours de l'axe z d'un angle β de même sens que la déviation α de la trace pp du plan d'application des forces de l'axe y.

On détermine les contraintes normales maximales et minimales à l'aide de la formule (136) en y portant les coordonnées (y_1, z_1 et y_2, z_2) des points de tangence du contour de la section avec des droites parallèles à l'axe neutre.

Si la contrainte normale maximale ou minimale est développée au point le plus éloigné des deux axes principaux centraux d'inertie de la section, on a :

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \tag{139}$$

et

$$\sigma_{min} = -\left(\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}\right), \tag{140}$$

où W_y et W_z sont les modules de résistance équatoriaux de la section par rapport aux axes y et z.

Les sections des poutres en flexion déviée sont choisies selon les contraintes normales par essais, suivis de vérifications.

Le premier essai peut se faire à l'aide de la formule de flexion plane, d'après la composante du moment fléchissant qui exige de grandes dimensions.

Pour des sections s'inscrivant dans un rectangle le premier essai se fait à l'aide de la formule :

$$W_z \geqslant \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]}, \tag{141}$$

où :

$$c = \frac{W_z}{W_y}.$$

Pour une section rectangulaire de hauteur h et de largeur b, $c = \frac{h}{b}$; pour une poutre en double té laminée, on peut prendre $c = 8$, et pour une section en U, $c = 6$.

Le déplacement vertical f et la rotation θ d'une section quelconque de la poutre en flexion déviée sont définis comme les sommes géométriques des déplacements verticaux et des rotations dus aux composantes du moment fléchissant, agissant dans les plans principaux d'inertie de la poutre, c'est-à-dire :

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \text{ et } \theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2},$$

où f_y et f_z sont les déplacements verticaux dans les directions y et z ; θ_y et θ_z les rotations de la section autour des axes y et z.

La rotation résultante s'effectue autour de l'axe neutre, le déplacement vertical résultant dans un plan perpendiculaire à l'axe neutre.

Si la flexion déviée est provoquée par deux systèmes de forces extérieures différentes, situées dans les plans principaux d'inertie, la position de l'axe neutre dans une section droite quelconque doit être déterminée par la formule :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}.$$

et la position de la déformée par la formule :

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{f_z}{f_y},$$

puisque l'angle β', formé par la direction du déplacement vertical résultant et l'axe y, n'est pas égal à l'angle β, formé par l'axe neutre et l'axe z.

Dans ce cas la déformée est une courbe gauche.

Le cas de la poutre soumise à des charges, situées dans plusieurs plans passant par l'axe géométrique de la poutre, se ramène au cas étudié si l'on projette toutes les forces sur les plans principaux d'inertie.

Exemple 62. Etant données : P, q, l, b, h, E, α (fig. 116) ; déterminer la position de l'axe neutre ; $\sigma_{\substack{\max \\ \min}}$; $f_{\max}$.

S o l u t i o n. On décompose la force P et l'intensité q de la charge uniformément répartie suivant les axes principaux centraux d'inertie y et z de la section droite :

$$P_y = P \cos \alpha, \; q_y = q \cos \alpha; \; P_z = P \sin \alpha, \; q_z = q \sin \alpha.$$

Les composantes du moment fléchissant maximal dans la section au droit de la force seront :

$$M_{z_{\max}} = \frac{P_y l}{4} + \frac{q_y l^2}{8} = \frac{l}{4}\left(P + \frac{ql}{2}\right)\cos \alpha;$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{P_z l}{4} + \frac{q_z l^2}{8} = \frac{l}{4}\left(P + \frac{ql}{2}\right)\sin \alpha.$$

Sous l'action du moment fléchissant M_y, agissant dans le plan principal d'inertie zx de la poutre, les fibres situées à gauche de l'axe y seront tendues et celles à droite de cet axe comprimées (fig. 116,*a*). Sous l'action du moment fléchissant M_z, agissant dans le plan principal d'inertie yx de la poutre, les fibres situées au-dessous de l'axe z seront tendues et celles au-dessus de cet axe comprimées.

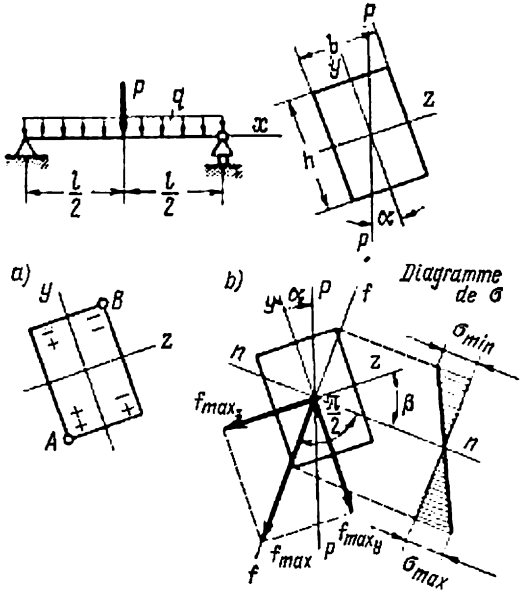


Fig. 116

Donc, les contraintes de traction maximales σ_{max} se développent au point A dans la section médiane de la poutre et les contraintes de compression maximales σ_{min} au point B. Elles sont égales à:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm\left(\frac{M_{z\,max}}{W_z} + \frac{M_{y\,max}}{W_y}\right) =$$

$$= \pm\frac{3}{2}\frac{l}{bh}\left(P + \frac{ql}{2}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{\sin\alpha}{b}\right).$$

De l'équation:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\alpha = \frac{h^2}{b^2}\operatorname{tg}\alpha,$$

on détermine la position de l'axe neutre nn.

On constate que plus le rapport h/b est grand, plus l'angle β diffère de l'angle α.

Si, par exemple, le plan d'action des forces px est le plan diagonal de la poutre, on a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{h}$ et $\operatorname{tg}\beta = \frac{h^2 b}{b^2 h} = \frac{h}{b}$, c'est-à-dire que le plan neutre nx de la poutre sera son autre plan diagonal.

Dans le cas étudié $h > b$, et, par conséquent, $\beta > \alpha$, comme indiqué fig. 116,*b*. Le diagramme de σ est représenté sur cette même figure.

D'après les poutres 5) et 6) (cf. fig. 99), on a pour le déplacement vertical maximal dû à M_y :

$$f_{z_{\max}} = \frac{5}{384}\frac{q_z l^4}{EI_y} + \frac{P_z l^3}{48EI_y} = \frac{l^3}{4Ehb^3}\left(\frac{5}{8}ql + P\right)\sin\alpha,$$

et pour le deplacement vertical maximal dû à M_z :

$$f_{y_{\max}} = \frac{5}{384}\frac{q_y l^4}{EI_z} + \frac{P_y l^3}{48EI_z} = \frac{l^3}{4Eh^3 b}\left(\frac{5}{8}ql + P\right)\cos\alpha.$$

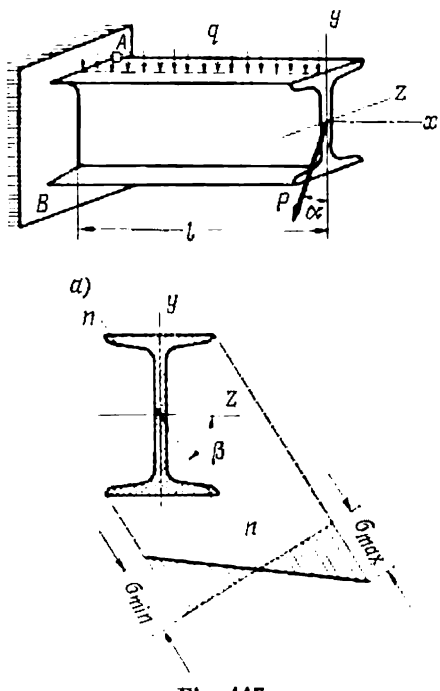


Fig. 117

La flèche résultante dans la section médiane de la poutre sera :

$$f_{\max} = \sqrt{f_{z_{\max}}^2 + f_{y_{\max}}^2} = \frac{\left(\frac{5}{8}ql + P\right)l^3}{4Ehb}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{b^4} + \frac{\cos^2\alpha}{h^4}}.$$

Les directions des déplacements verticaux sont indiquées fig. 116,*b*.

Exemple 63. Déterminer le numéro de la poutre en double té ; la position de l'axe neutre et $f_{\max}$. On prendra : $P = 240$ kgf, $q = 400$ kgf/m, $l = 2$ m, $\alpha = 30°$, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm² (fig. 117).

Solution. Les moments fléchissants maximaux à l'encastrement seront :

$$M_{y_{\max}} = Pl\sin\alpha = 240 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 240 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

$$M_{z_{\max}} = \frac{ql^2}{2} + Pl\cos\alpha = \frac{400 \cdot 4}{2} + 240 \cdot 2 \cdot 0{,}866 \approx 1\,216 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

Pour un premier essai on prend $c = 8$.
D'après la formule (141):

$$W_z = \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]} = \frac{1\,216 + 8 \cdot 240}{1\,600} \cdot 100 = 196\,\text{cm}^3.$$

On vérifie la poutre en double té N° 20 la plus proche à cette valeur et pour laquelle:

$$W_z = 184\,\text{cm}^3 \text{ et } W_y = 23{,}1\,\text{cm}^3.$$

Aux points A et B de la section encastrée on obtient respectivement $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$ et, par conséquent:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z_{max}}}{W_z} + \frac{M_{y_{max}}}{W_y} = \frac{121\,600}{184} + \frac{24\,000}{23{,}1} \approx 1\,700\,\text{kgf/cm}^2.$$

Puisque $\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{1\,700 - 1\,600}{1\,600} \cdot 100 \approx 6{,}2\ \% > 5\ \%$, on prend la poutre en double té N° 20a, pour laquelle $W_z = 203$ cm^3, $W_y = 28{,}2$ cm^3 et

$$\sigma_{max} = \frac{121\,600}{203} + \frac{24\,000}{28{,}2} \approx 1\,450\,\text{kgf/cm}^2.$$

La sous-tension est de $\frac{1\,600 - 1\,450}{1\,600} \cdot 100 \approx 9{,}4\ \%$.

Pour la poutre en double té N° 20a, $I_y = 155$ cm^4 et $I_z = 2\,030$ cm^4, et par conséquent, dans la section encastrée:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_{y_{max}}}{M_{z_{max}}} = \frac{2\,030}{155} \cdot \frac{240}{1\,216} \approx 2{,}58 \text{ et } \beta = 68°50'.$$

L'axe neutre nn et le diagramme de la contrainte normale σ dans la section encastrée sont représentés fig. 117,*a*.

Le déplacement vertical maximal aura lieu à l'extrémité libre de la poutre. D'après les poutres 2) et 3) (cf. fig. 99) on a:

$$f_{y_{max}} = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{ql^4}{8} + \frac{Pl^3 \cos\alpha}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 2\,030}\left(\frac{4 \cdot 16 \cdot 10^8}{8} + \frac{240 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}866}{3}\right) \approx 0{,}33\,\text{cm},$$

$$f_{z_{max}} = \frac{Pl^3 \sin\alpha}{3EI_y} = \frac{240 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 155} \approx 1{,}03\,\text{cm}.$$

Le déplacement vertical maximal résultant sera :

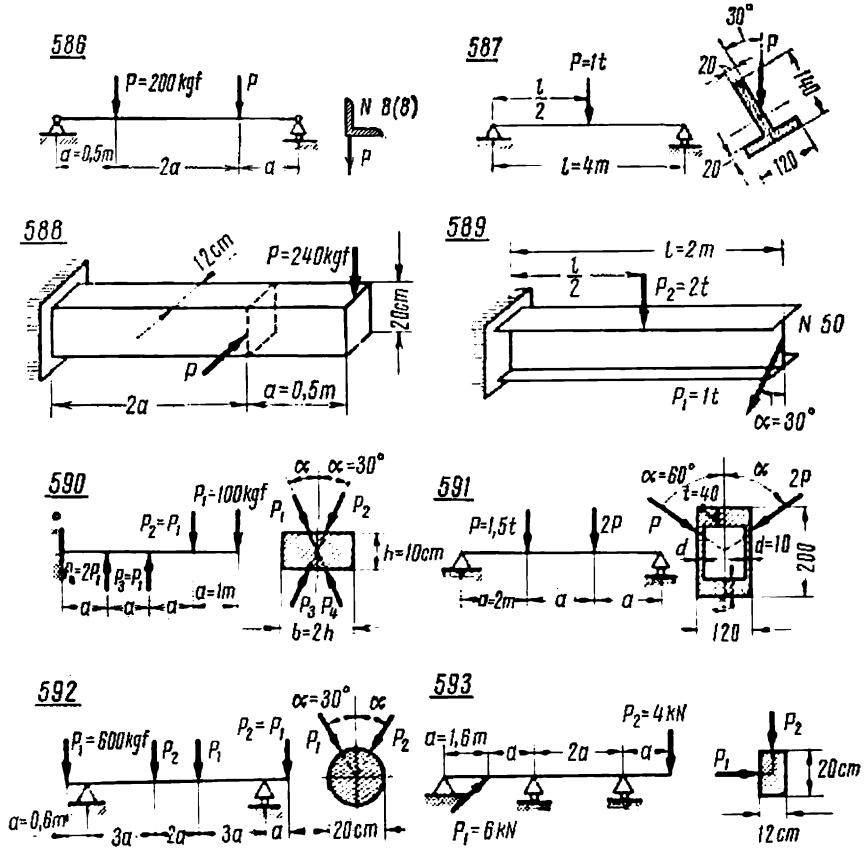
$$f_{max} = \sqrt{f_{y_{max}}^2 + f_{z_{max}}^2} = \sqrt{0{,}33^2 + 1{,}03^2} \approx 1{,}08\,\text{cm}.$$

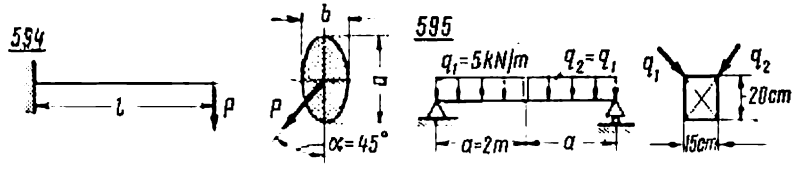
Sa direction fait un angle β' avec l'axe y et :

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{f_{z_{max}}}{f_{y_{max}}} = \frac{1{,}03}{0{,}33} \approx 3{,}12, \text{ c.à.d. } \beta' = 72°14'.$$

Problèmes 586-595. Déterminer les valeurs absolues maximales de la contrainte normale et la position de l'axe neutre dans les sections dangereuses des poutres.

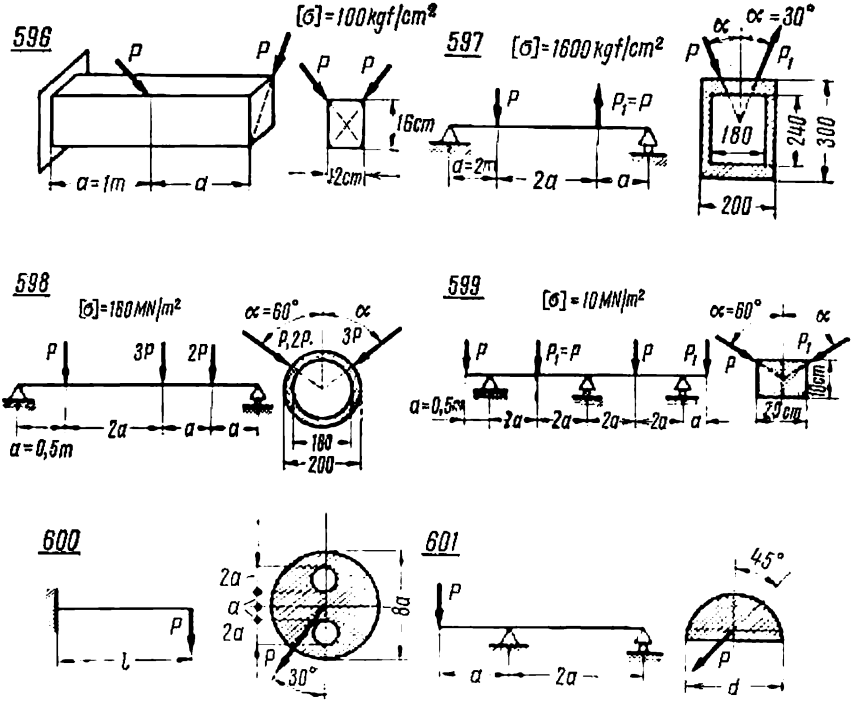
Calculer en outre, dans le problème 587, le déplacement vertical f_v et le déplacement horizontal f_h de la section située sous la force (prendre $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm²) et dans le problème 593 la valeur et la direction du déplacement vertical f au droit de la force P_1 (prendre $E = 10^4$ MN/m²).





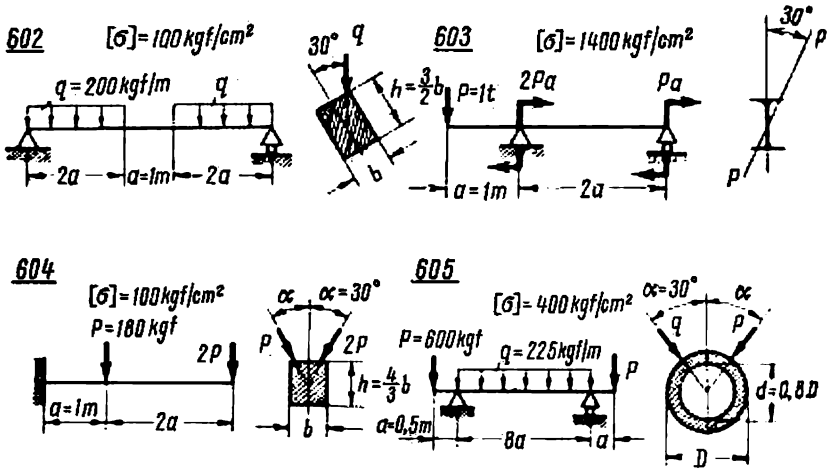
Problèmes 596-601. Déterminer les valeurs des forces admissibles P et la position de l'axe neutre dans les sections dangereuses des poutres.

Déterminer en outre la valeur et la direction du déplacement vertical: dans le problème 596 de l'extrémité libre de la poutre ($E = 10^5$ kgf/cm^2), dans le problème 599 de la section médiane de la travée gauche de la poutre ($E = 10^4$ MN/m^2).



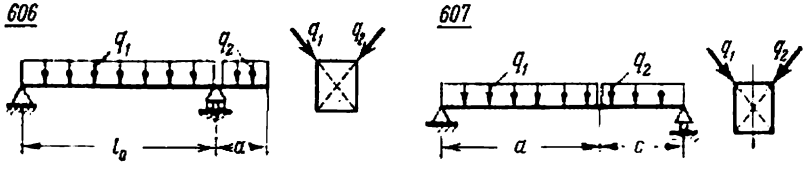
Problèmes 602-605. Choisir les dimensions des sections et déterminer la position de l'axe neutre dans les sections dangereuses des poutres.

Dans le problème 604 calculer en outre la valeur et la direction du déplacement vertical de l'extrémité libre de la poutre ($E = 10^5$ kgf/cm^2).



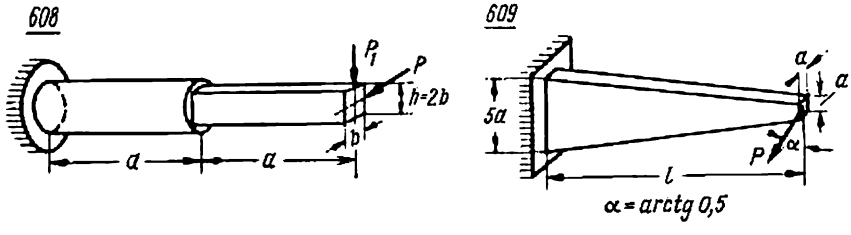
Problème 606. Démontrer que quand $a \leqslant \frac{l_0}{2}$ et $q_2 \leqslant q_1$, σ_{max} ne dépend pas des valeurs de a et q_2.

Problème 607. Démontrer que quand $c \leqslant a$ et $q_2 \leqslant q_1$, σ_{max} ne dépend pas de la valeur de q_2.

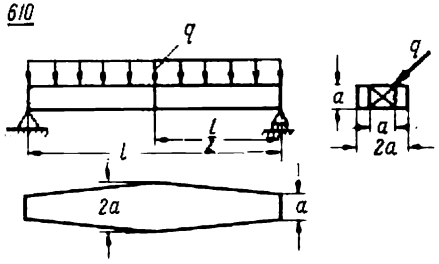


Problème 608. Etant données: $P_1 = 1{,}63\,P$, E, a, $h = 2b$; déterminer la valeur et la direction de f_{max}.

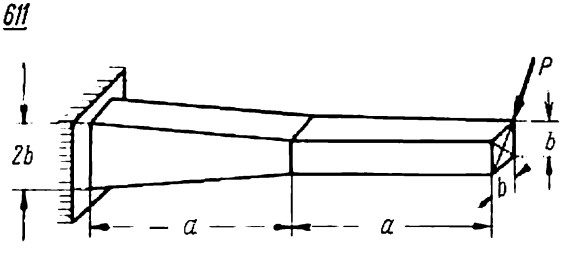
Problème 609. Etant données P, l, a, $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}5$; calculer σ_{max}.



Problème 610. Soient q, l, a. Calculer σ_{max}.



Problème 611. Soient P, a, b et E. Déterminer f_{max} et son angle de déviation de la ligne d'action de la force P.



§ 2. Flexion composée

Dans le cas général de traction ou compression et flexion simultanées dans une section droite arbitraire d'une barre prismatique les efforts intérieurs se réduisent à l'effort longitudinal N_x, porté par l'axe géométrique x de la barre, aux moments fléchissants M_y et M_z, situés dans les plans principaux centraux d'inertie xz et xy de la barre et aux efforts tranchants Q_y et Q_z, portés par les axes y et z (fig. 118).

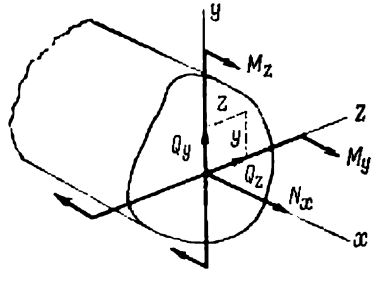


Fig. 118

La contrainte normale dans la section droite de la barre est déterminée à l'aide de l'équation suivante d'un plan ne passant pas par l'origine des coordonnées:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = \frac{N_x}{F}\left(1 + \frac{M_y z}{N_x i_y^2} + \frac{M_z y}{N_x i_z^2}\right), \quad (142)$$

où F est l'aire de la section droite;

I_y et I_z ses moments principaux centraux d'inertie;

i_y et i_z ses rayons principaux d'inertie;
y et z les coordonnées d'un point dans le plan de la section.
L'équation de l'axe neutre est:

$$1 + \frac{M_y z}{N_x i_y^2} + \frac{M_z y}{N_x i_z^2} = 0. \qquad (143)$$

La contrainte normale prend les valeurs maximale et minimale aux points de tangence du contour de la section et des droites parallèles à l'axe neutre.

Les contraintes de cisaillement résultantes peuvent être calculées approximativement en prenant la somme géométrique des contraintes de cisaillement au point considéré dues aux efforts Q_y et Q_z.

En règle générale ces contraintes sont petites et n'ont pas une valeur appréciable dans les calculs pratiques.

Les dimensions de la section droite d'une barre sont choisies selon les contraintes normales par essais suivis de vérification. Le premier essai peut se faire à l'aide de la formule de flexion plane seule, d'après la composante du moment fléchissant qui exige de grandes dimensions. Cet essai doit être vérifié compte tenu de la seconde composante du moment fléchissant et de l'effort longitudinal. Dans la section ainsi choisie la surtension ne doit pas dépasser 5 %.

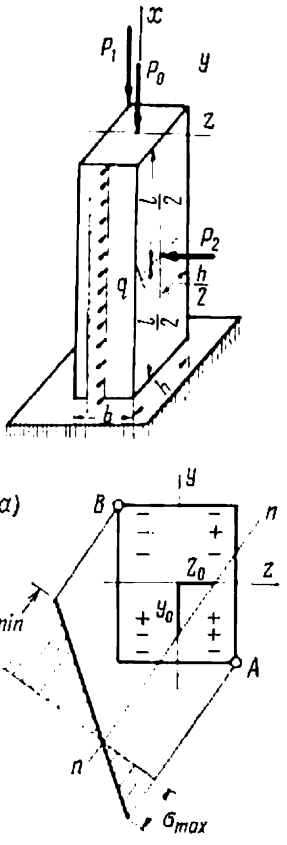


Fig. 119

Exemple 64. Déterminer σ_{max}, σ_{min} et la position de l'axe neutre. On prendra: $q = 200$ kgf/m, $P_0 = 24$ t, $P_1 = 16$ t, $P_2 = 400$ kgf, $b = 12$ cm, $h = 16$ cm, $l = 2$ m (fig. 119).

Solution. Dans la section dangereuse encastrée de la barre:

$$N_x = -P_0 - P_1 = -24 \cdot 10^3 - 16 \cdot 10^3 = -40 \cdot 10^3 \text{ kgf};$$

$$M_y = P_1 \frac{b}{2} + P_2 \frac{l}{2} = 16 \cdot 10^3 \cdot 6 + 4 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 136 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm};$$

$$M_z = -P_1 \frac{h}{2} - \frac{ql^2}{2} = -16 \cdot 10^3 \cdot 8 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^4}{2} = -168 \cdot 10^3 \text{ kgf/cm}.$$

Les signes des contraintes aux points de la section dangereuse de la barre dues à l'effort N_x et aux moments M_y et M_z sont indiqués

fig. 119,*a*. Par conséquent :

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{N_x}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z} = -\frac{40 \cdot 10^3}{12 \cdot 16} \pm$$

$$\pm \frac{136 \cdot 10^3}{16 \cdot 12^2} \cdot 6 \pm \frac{168 \cdot 10^3}{12 \cdot 16^2} \cdot 6 \approx \begin{cases} 475 \\ -891 \end{cases} \text{kgf/cm}^2.$$

Dans la formule (143) on admet que $N_x > 0$ et que les contraintes normales σ dues aux moments M_y et M_z soient positives dans le premier quadrant. Dans le problème considéré :

$$N_x < 0, \quad M_y > 0, \quad M_z < 0,$$

$$i_y^2 = \frac{b^2}{12} = 12\,\text{cm}^2 \text{ et } i_z^2 = \frac{h^2}{12} \approx 21{,}3\,\text{cm}^2.$$

Par conséquent, les segments coupés par l'axe *nn* sur les axes *z* et *y* seront :

$$z_0 = -\frac{N_x i_y^2}{M_y} = \frac{40 \cdot 10^3}{136 \cdot 10^3} \cdot 12 \approx 3{,}53\,\text{cm}.$$

$$y_0 = -\frac{N_x i_z^2}{M_z} = -\frac{40 \cdot 10^3}{168 \cdot 10^3} \cdot 21{,}3 \approx -5{,}07\,\text{cm}.$$

Par les extrémités de ces segments on mène (fig. 119,*a*) l'axe neutre *nn* et on construit le diagramme des contraintes normales.

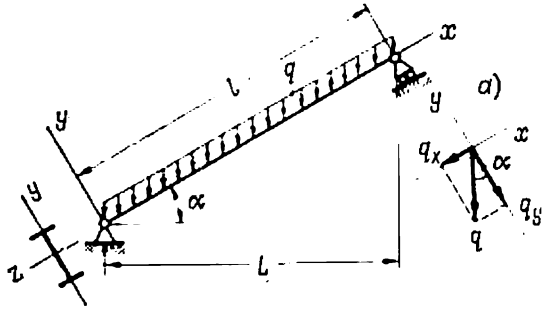


Fig. 120

Exemple 65. Déterminer le numéro de la poutre en double té. On prendra : $q = 6$ kN/m, $L = 6$ m, $\alpha = 30°$, $[\sigma] = 140$ MN/m² (fig. 120).

S o l u t i o n. Les projections de la charge q sur les axes x et y (fig. 120,*a*) sont :

$$q_x = q \sin \alpha; \qquad q_y = q \cos \alpha.$$

La composante q_x est uniformément répartie sur la longueur l vers la gauche et provoque la compression de la poutre. La composante q_y provoque sa flexion plane.

Le moment fléchissant maximal dans la section médiane de la poutre est :

$$M_{\max} = \frac{q_y l^2}{8} = \frac{qL^2}{8\cos\alpha}.$$

Le premier essai de détermination des dimensions de la section est effectué d'après cette valeur du moment fléchissant. Alors :

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{qL^2}{8[\sigma]\cos\alpha} = \frac{6\,000 \cdot 36}{8 \cdot 14 \cdot 10^7 \cdot 0{,}866} =$$

$$= 2{,}23 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 223\ \text{cm}^3.$$

D'après l'assortiment la valeur du module de résistance de la poutre en double té N°22 se rapproche le plus de celle-ci. Pour cette poutre $W_z = 232$ cm², $F = 30{,}6$ cm².

Dans la section soumise à $M_{\max}$ la valeur de l'effort longitudinal de compression est :

$$N_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{q_x l}{2} = -\frac{qL}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

On vérifie la section choisie en tenant compte de l'effort longitudinal :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N_x|}{F} + \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6\,000 \cdot 6}{2 \cdot 30{,}6 \cdot 10^{-4}\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{6\,000 \cdot 36}{8 \cdot 232 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}866} = 137{,}8 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2 = 137{,}8\ \text{MN/m}^2$$

La sous-tension est :

$$\frac{[\sigma] - [\sigma]_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{2{,}02}{140} \cdot 100 \approx 1{,}6\,\%.$$

En réalité la section où a lieu la contrainte maximale est située légèrement à gauche de la section médiane de la poutre, mais elle est si proche de celle-ci, que cela n'a aucune répercussion sur le calcul. En effet, pour une section droite arbitraire :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{W}\left(\frac{qlx}{2}\cos\alpha - \frac{qx^2}{2}\cos\alpha\right) + \frac{q(l-x)}{F}\sin\alpha.$$

Puisque :

$$\frac{d|\sigma|_{\max}}{dx} = \frac{ql}{2W}\cos\alpha - \frac{qx}{W}\cos\alpha - \frac{q}{F}\sin\alpha = 0,$$

la section dangereuse est située à une distance de :

$$x = \frac{l}{2} - \frac{W}{F}\operatorname{tg}\alpha = \frac{6\cdot 2}{2\sqrt{3}} - \frac{232\cdot 10^{-6}}{30{,}6\cdot 10^{-4}\sqrt{3}} = 3{,}420\text{ m}$$

de l'appui gauche, c'est-à-dire à 4,4 cm du milieu de la poutre. Dans cette section (pour $x = 3{,}420$ m) pour la poutre choisie on a :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{232\cdot 10^{-6}}\left(\frac{6\,000\cdot 6}{2}\cdot 3{,}420 - \frac{6\,000}{2}3{,}420^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{6\,000\cdot 3{,}508}{30{,}6\cdot 10^{-4}\cdot 2} \approx 137{,}85\cdot 10^6\ \text{N/m}^2 = 137{,}85\ \text{MN/m}^2,$$

c'est-à-dire 0,05 % de plus que dans la section médiane.

Exemple 66. Déterminer le numéro de la poutre en U et calculer y_0, z_0. On prendra : $P_1 = 4$ t (situé dans le plan xy), $P_2 = 1$ t, $P_3 = 0{,}8$ t, $M = 2$ t·m, $l = 2$ m, $\alpha = 15°$, $\beta = 30°$, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm² (fig. 121).

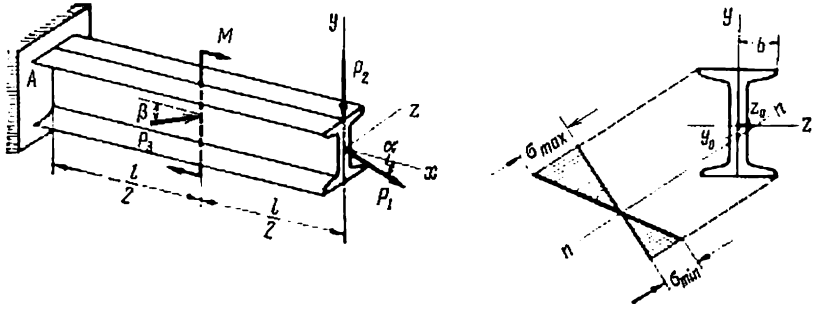


Fig. 121

Solution. Dans la section dangereuse (à l'encastrement) :

$$N_x = P_1\cos\alpha + P_3\cos\beta = 4\cdot 0{,}966 + 0{,}8\cdot 0{,}866 \approx 4{,}557\text{ t};$$

$$M_y = -P_3\frac{l}{2}\sin\beta = -0{,}8\cdot 0{,}5\cdot 100 = -40\text{ t·cm};$$

$$M_z = P_1 l\sin\alpha + P_2 l + M = 4\cdot 200\cdot 0{,}259 + 1\cdot 200 + 200 = 607{,}2\text{ t·cm}.$$

Comme premier essai de détermination des dimensions de la section, on calcule la poutre en flexion simple plane provoquée par le moment M_z:

$$W_z = \frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{607{,}2 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2} \approx 380\,\text{cm}^3.$$

D'après le catalogue d'assortiment la poutre en U N°22, pour laquelle $W_z' = 192$ cm³ a une valeur du module de résistance qui se rapproche le plus de celle-ci. Pour les deux poutres en U, on aura $W_z = 384$ cm³.

Tenant compte du fait qu'outre le moment M_z, la poutre est sollicitée encore par un moment M_y de grande valeur et par un effort longitudinal N_x on prend pour vérification la poutre en U N°24 pour laquelle $W_z' = 242$ cm³;

$$W_z = 2 \cdot 242 = 484\,\text{cm}^3, \quad F = 2F' = 2 \cdot 30{,}6 = 61{,}2\,\text{cm}^2,$$

$$I_y = 2I_y' = 2 \cdot 387{,}2 = 774{,}4\,\text{cm}^4, \quad W_y = \frac{I_y}{b} = \frac{774{,}4}{9{,}0} = 86{,}0\,\text{cm}^3.$$

On vérifie la résistance des poutres en U N°24 au point de contrainte maximale A dans la section encastrée:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4\,557}{61{,}2} + \frac{40 \cdot 10^3}{86{,}0} + \frac{607{,}2 \cdot 10^3}{484} \approx$$

$$\approx 1\,794\ \text{kgf/cm}^2.$$

Puisque la surtension est de:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{194}{16} \approx 12{,}1\,\%,$$

la poutre en U N°24 ne convient pas.

Pour second essai on prend la poutre en U N°24a. Pour celle-ci on a:

$$W_z' = 265\,\text{cm}^3, \quad W_z = 2 \cdot 265 = 530\,\text{cm}^3, \quad F = 2 \cdot 32{,}9 = 65{,}8\,\text{cm}^2,$$

$$I_y = 2I_y' = 2 \cdot 488{,}5 = 977\,\text{cm}^4 \text{ et } W_y = \frac{977}{9{,}6} \approx 102{,}8\,\text{cm}^3.$$

On vérifie la section composée par ces poutres en U:

$$\sigma_{\max} = \frac{4\,557}{65{,}8} + \frac{40 \cdot 10^3}{102{,}8} + \frac{607{,}2 \cdot 10^3}{530} \approx 1\,604\ \text{kgf/cm}^2.$$

La surtension est de $^4/_{16} = 0{,}25$ %, ce qui correspond aux normes admissibles. On choisit donc les poutres en U N°24a.

Passons à la détermination de l'axe neutre dans la section dangereuse.

Pour la poutre en U N°24a: $i_z = 9{,}84$ cm, $i_z^2 \approx 96{,}8$ cm^2:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{977}{65{,}8} \approx 14{,}8\,\text{cm}^2.$$

Selon la formule (143), les longueurs des segments sur les axes y et z coupés par l'axe neutre sont les suivantes:

$$y_0 = -\frac{4{,}557}{607{,}2} \cdot 96{,}8 \approx -0{,}73\,\text{cm};$$

$$z_0 = -\frac{4{,}557}{-40} \cdot 14{,}8 \approx 1{,}69\,\text{cm}.$$

Charge excentrique. Dans le cas général d'une charge excentrique une barre prismatique subit simultanément des déformations dues à une traction ou compression et à une flexion déviée pure.

Les efforts intérieurs dans chaque section droite de la barre se réduisent à un effort axial longitudinal $N_x = P$ et à deux moments fléchissants $M_y = Pz_p$ et $M_z = Py_p$ dans les plans principaux centraux d'inertie xz et xy de la barre. P est la force de traction ou de compression appliquée non au centre de gravité des sections extrêmes de la barre, mais en un point de coordonnées y_p et z_p (fig. 122).

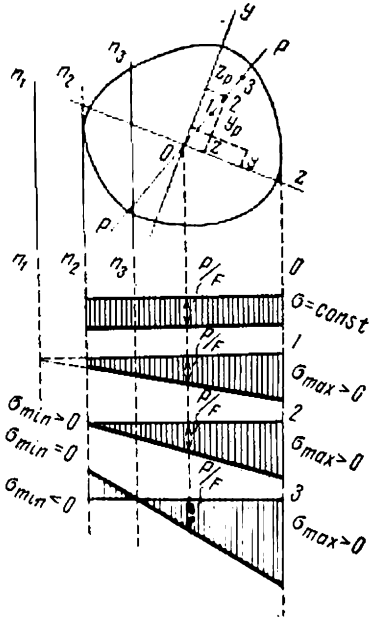


Fig. 122

La valeur des contraintes normales dans la section droite de la barre est déterminée par l'équation suivante d'un plan ne passant pas par l'origine des coordonnées:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{z \cdot z_p}{i_y^2} + \frac{y \cdot y_p}{i_z^2}\right), \qquad (144)$$

où F est l'aire de la section droite;

I_y et I_z ses moments d'inertie principaux centraux;

i_y et i_z ses rayons de giration principaux;

y et z les coordonnées d'un point arbitraire du plan de la section.

L'équation de l'axe neutre nn est:

$$1 + \frac{z \cdot z_p}{i_y^2} + \frac{y \cdot y_p}{i_z^2} = 0 \text{ ou } \frac{z}{-\frac{i_y^2}{z_p}} + \frac{y}{-\frac{i_z^2}{y_p}} = 1, \qquad (145)$$

où

$$-\frac{i_y^2}{z_p}, \quad -\frac{i_z^2}{y_p} \qquad (146)$$

sont les segments coupés par l'axe neutre sur les axes d'inertie principaux centraux z et y de la section droite de la barre.

Pour les points d'une droite parallèle à l'axe neutre et passant par le centre de gravité de la section les contraintes normales sont $\sigma = \frac{P}{F}$.

Les contraintes maximale et minimale sont développées aux points de tangence du contour de la section et des droites parallèles à l'axe neutre.

Pour des sections symétriques les contraintes maximales sont développées aux points qui sont les plus éloignés des deux axes d'inertie principaux centraux.

Aussi pour ces sections a-t-on

$$|\sigma|_{\max} = P\left(\frac{1}{F} + \frac{y_p}{W_z} + \frac{z_p}{W_y}\right) \qquad (147)$$

Quand le point d'application de la force se déplace suivant une ligne droite pp passant par le centre de gravité O de la section l'axe neutre nn se rapproche ou s'éloigne sans rotation de O, selon que le point d'application de la force s'éloigne ou se rapproche du centre de gravité.

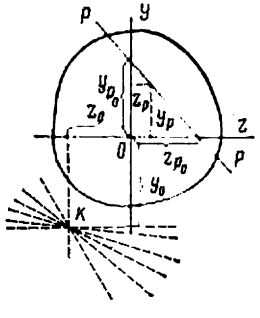


Fig. 123

Les positions des axes neutres (n_1n_1; n_2n_2 et n_3n_3; n_0n_0 est à l'infini) et les diagrammes correspondants de σ pour une force de traction P appliquée aux points 0, 1, 2 et 3 de la ligne droite pp, sont représentés fig. 122.

Quand le point d'application de la force se déplace suivant une ligne droite pp (fig. 123), ne passant pas par le centre de gravité de la section, l'axe neutre subit une rotation autour d'un point fixe K de coordonnées:

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_{p_0}} \quad \text{et} \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_{p_0}}.$$

La réciproque est aussi vraie: si l'axe neutre tourne autour d'un point fixe de coordonnées y_0 et z_0, le point d'application de la force

se déplace suivant une ligne droite pp, ne passant pas par le centre de gravité de la section et dont l'équation est :

$$\frac{y_p}{-\frac{i_z^2}{y_0}} + \frac{z_p}{-\frac{i_y^2}{z_0}} = 1.$$

Si le point d'application de la force est situé sur l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section, la barre subit simultanément des déformations, dues à une traction ou compression et à une flexion plane pure. Les formules indiquées ci-dessus restent valables à condition qu'on prenne $z_p = 0$ (quand le point d'application de la force est situé sur l'axe y) et $y_0 = 0$ (quand le point d'application de la force est situé sur l'axe z).

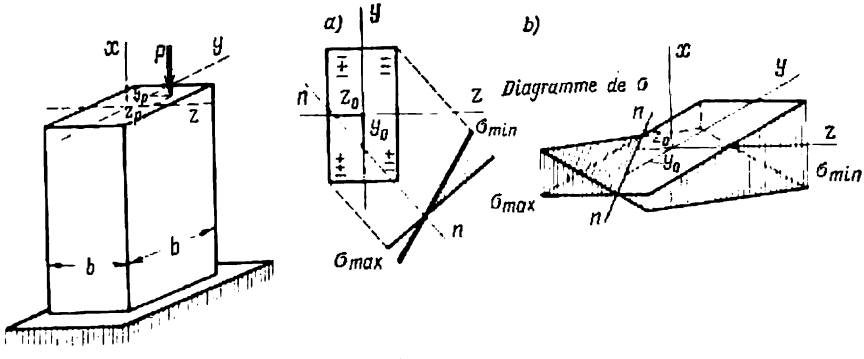


Fig. 124

Pour assurer la résistance des barres en matériau fragile, il faut éviter dans la section droite le développement des contraintes de traction dues à la force compressive excentrique.

La partie du plan de la section droite contenant le centre de gravité et limitée par un contour fermé, dans lequel la force appliquée provoque des contraintes de même signe en tous les points de la section droite, s'appelle *noyau de la section*.

Le contour du noyau de la section est le lieu géométrique des points d'application de la force excentrique pour lesquels les axes neutres, étant tangents au contour de la section droite, ne le coupent nulle part.

Exemple 67. Calculer σ_{max}, σ_{min}, y_0, z_0. On prendra : $P = 6{,}4$ t, $b = 4$ cm, $h = 8$ cm, $y_p = 2$ cm, $z_p = 1$ cm (fig. 124).

Solution. Les efforts développés dans la section droite sont : $N_x = -P = -6{,}4$ t, $M_y = -Pz_p = -6{,}4 \cdot 1 = -6{,}4$ t·cm, $M_z = -Py_p = -6{,}4 \cdot 2 = -12{,}8$ t·cm.

Puisque dans le premier quadrant de la section les contraintes dues aux efforts sont compressives, σ_{min} a lieu au coin supérieur droit de la section et σ_{max} en son coin inférieur gauche (fig. 124,*a*). On a :

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{N}{F} \mp \frac{M_y}{W_y} \mp \frac{M_z}{W_z}.$$

Comme

$$F = bh = 4 \cdot 8 = 32\,\text{cm}^2,\ W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{8 \cdot 16}{6} = \frac{64}{3}\,\text{cm}^3 \text{ et}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{4 \cdot 64}{3} = \frac{128}{3}\,\text{cm}^3,$$

on obtient :

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = -\frac{6{,}4 \cdot 10^3}{32} \pm \frac{6{,}4 \cdot 10^3 \cdot 3}{64} \pm \frac{12{,}8 \cdot 10^3 \cdot 3}{128}$$

ou

$$\sigma_{max} = 400\ \text{kgf/cm}^2,\ \sigma_{min} = -800\ \text{kgf/cm}^2.$$

On détermine, selon les formules (146), les segments coupés par l' axe neutre *nn* sur les axes principaux centraux d'inertie y et z de la section :

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{h^2}{12y_p} = -\frac{64}{12 \cdot 2} = -\frac{8}{3} \approx -2{,}67\,\text{cm},$$

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{b^2}{12z_p} = -\frac{16}{12 \cdot 1} = -\frac{4}{3} \approx -1{,}33\,\text{cm}.$$

La position de l'axe neutre et le diagramme de σ sont représentés fig. 124,*a* et *b*.

Exemple 68. Etant donnés une section arbitraire symétrique par rapport à l'axe z, pouvant s'inscrire dans un rectangle $ABCD$ de côtés $b < h$ (fig. 125) , les rayons principaux centraux d'inertie de la section $i_y < i_z$ et la position du centre de gravité de la section déterminée par la quantité z_0, construire le noyau de la section.

Solution. Si les axes neutres sont tangents aux petits côtés AB et CD du réctangle, les points d'application correspondants de la force excentrique (les points k et l du contour du noyau de la section) doivent se trouver sur l'axe y et avoir pour ordonnées $y_n = \mp \frac{2\,i_z^2}{h}$.

Si les axes neutres sont tangents aux grands côtés du rectangle BC et DA, les points d'application correspondants de la force excentrique (les points m et n du contour du noyau de la section) doivent se trouver sur l'axe z et avoir pour abscisses :

$$z'_n = -\frac{i_y^2}{b - z_0}; \qquad z''_n = \frac{i_y^2}{z_0}.$$

Puisque l'axe neutre passe de la position horizontale à la position verticale (et vice-versa) par suite d'une rotation autour des

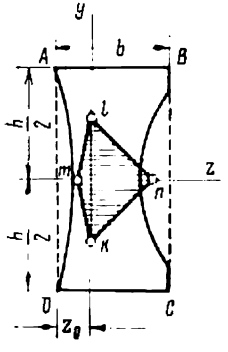


Fig. 125

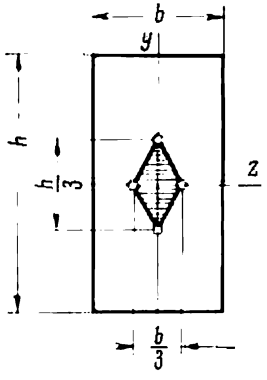


Fig. 126

points fixes coïncidants avec les sommets du rectangle, lors de ces rotations de l'axe neutre le point d'application de la force excentrique doit se déplacer suivant des lignes droites.

En joignant les points k, l, m et n par des lignes droites, on obtient le noyau de la section (sur la fig. 125 le noyau de la section est hachuré par des lignes horizontales).

Cas particuliers : a) section rectangulaire de côtés b et h (fig. 126). Pour une section rectangulaire : $i_z^2 = \frac{h^2}{12}$, $i_y^2 = \frac{b^2}{12}$, $z_0 = \frac{b}{2}$ et, par conséquent,

$$y_n = \mp\frac{h}{6}; \quad z_n = \mp\frac{b}{6};$$

b) section en double té (N° 20a, fig. 127). D'après le catalogue de l'assortiment, pour la poutre en double té N° 20a, on a : $i_z = 8{,}37$ cm, $i_y = 2{,}32$ cm, $h = 20$ cm, $b = 11$ cm, $z_0 = \frac{b}{2}$, et

$$y_n = \mp\frac{2 \cdot 8{,}37^2}{20} \approx \mp 7{,}01, \quad z_n = \mp\frac{2 \cdot 2{,}32^2}{11} \approx \mp 0{,}979 \text{ cm};$$

c) section en U (N° 22a, fig. 128). D'après le catalogue de l'assortiment, pour la poutre en U N° 22a on a : $i_z = 8{,}99$ cm, $i_y = 2{,}55$ cm,

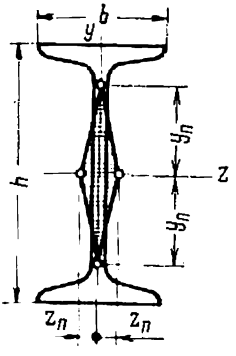


Fig. 127

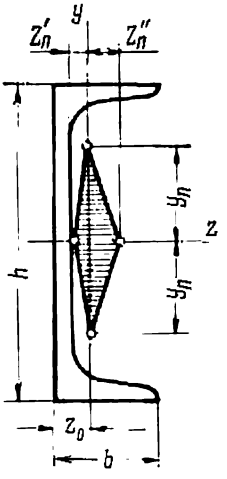


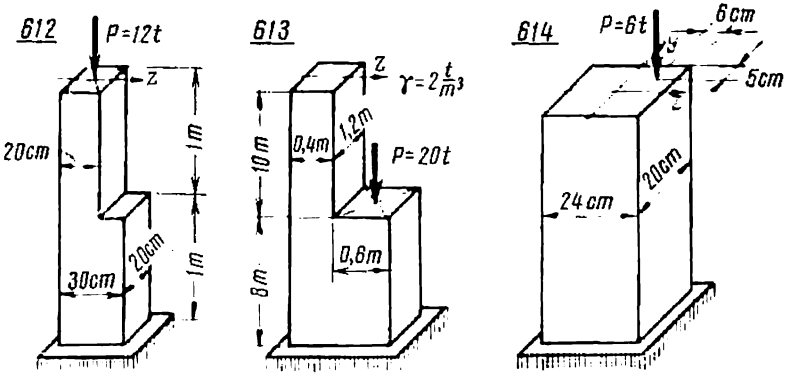
Fig. 128

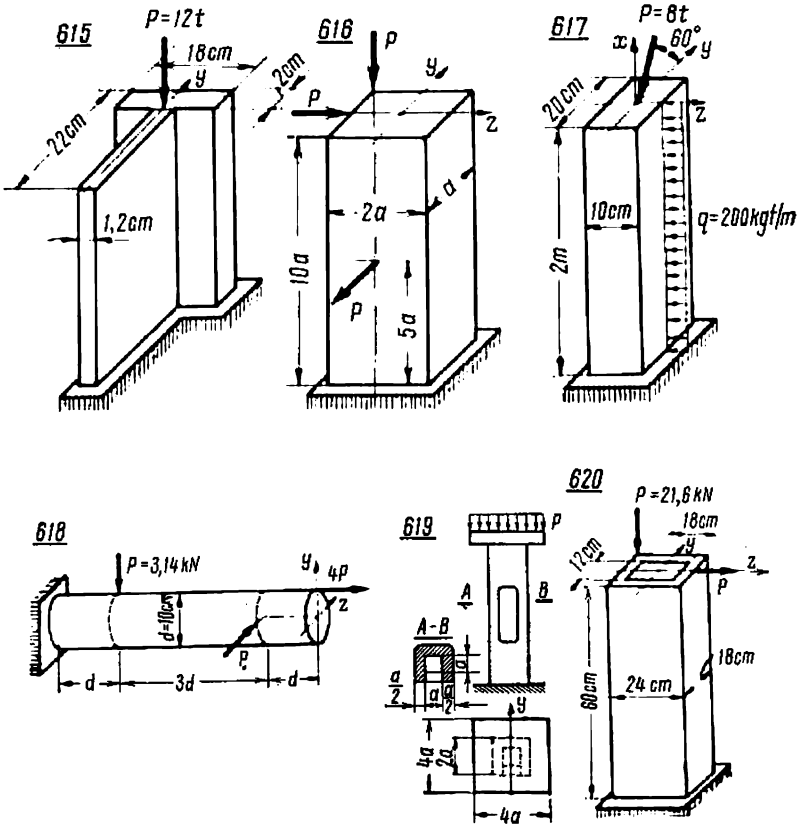
$h = 22$ cm, $b = 8{,}7$ cm, $z_0 = 2{,}46$ cm, et :

$$y_n = \mp\frac{2 \cdot 8{,}99^2}{22} \approx \mp 7{,}35\,\text{cm}, \quad z'_n = -\frac{2{,}55^2}{8{,}7 - 2{,}46} \approx -1{,}04\,\text{cm},$$

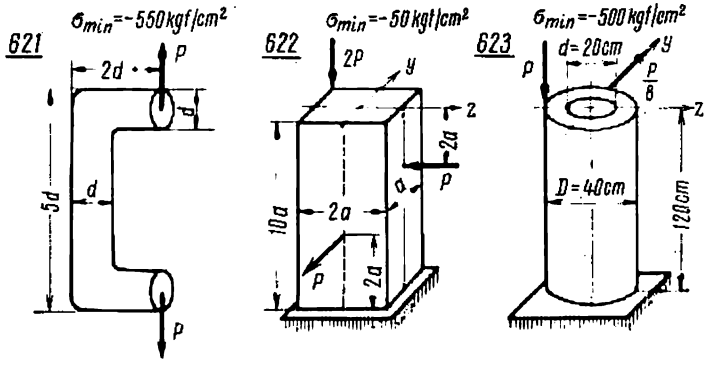
$$z''_n = \frac{2{,}55^2}{2{,}46} \approx 2{,}64\,\text{cm}.$$

Problèmes 612-620. Déterminer les contraintes normales maximale σ_{max} et minimale σ_{min} et la position de l'axe neutre dans les sections dangereuses des barres droites.

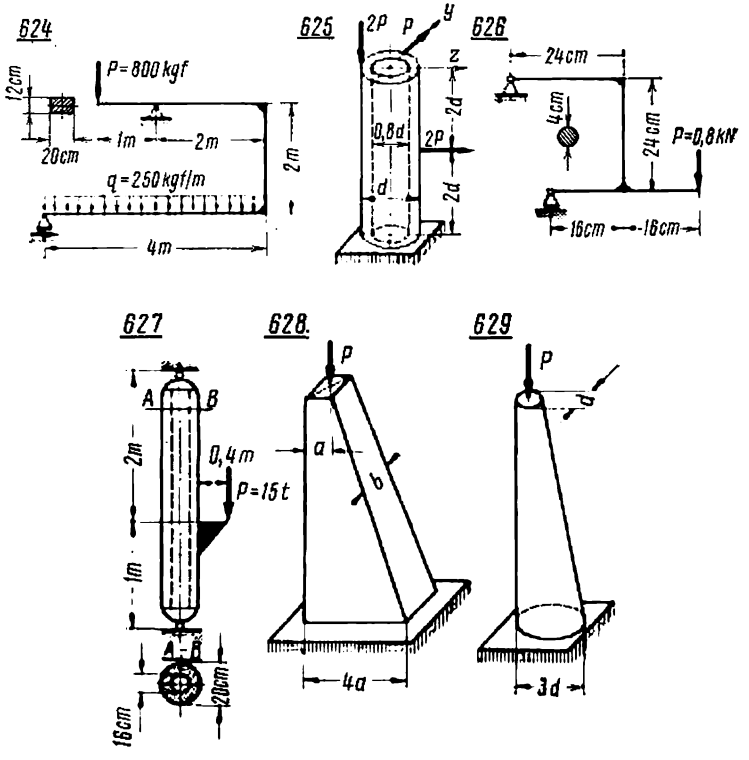




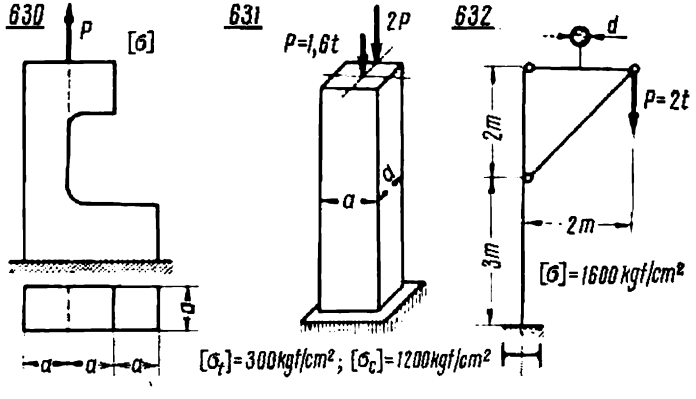
Problèmes 621-623. Déterminer la contrainte normale maximale et la position de l'axe neutre dans les sections dangereuses des barres.

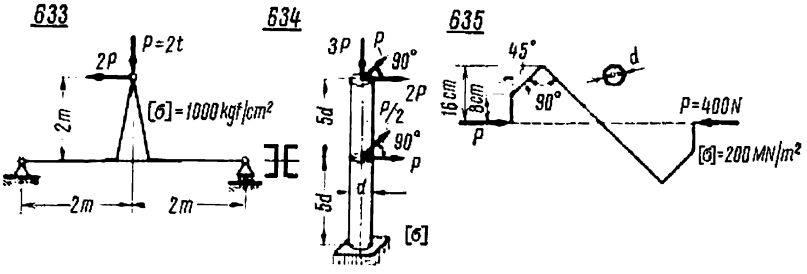


Problèmes 624-629. Déterminer les contraintes normales maximale σ_{max} et minimale σ_{min} dans les sections dangereuses des barres et dans les barres des systèmes soumises à des sollicitations composées.



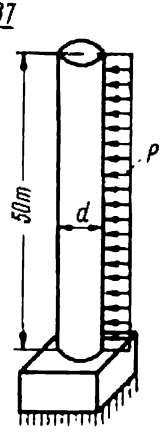
Problèmes 630-635. Déterminer les dimensions nécessaires des sections droites des barres, des poutres et des éléments des systèmes.

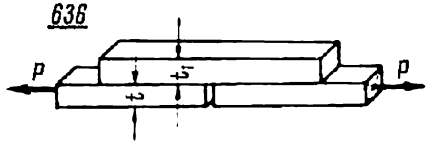




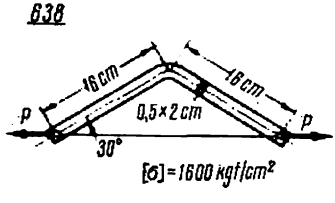
Problème 636. Déterminer la dimension t_1, pour laquelle les contraintes normales maximales dans les barres et l'applique seront les mêmes.

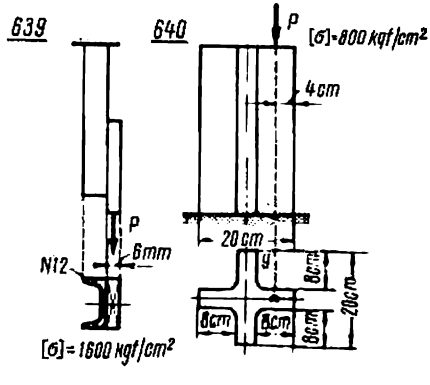
Problème 637. Soient $\gamma = 2{,}5$ t/m³ le poids spécifique du matériau du poteau et $p = 90$ kgf/m² la pression latérale dans sa section diamétrale. Calculer le diamètre d de la section droite du poteau, en admettant que les contraintes de traction y sont absentes.



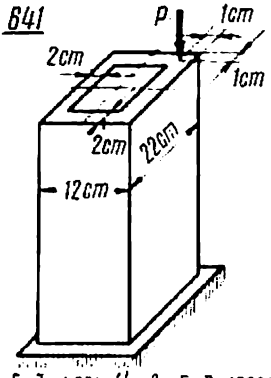


Problèmes 638-647. Calculer les valeurs maximales des charges de sécurité P.



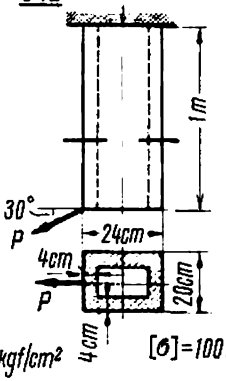


641



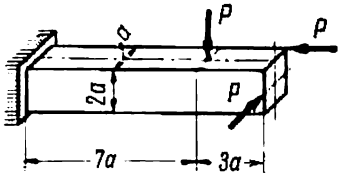
$[\sigma_t]=400\,kgf/cm^2$; $[\sigma_c]=1000\,kgf/cm^2$

642



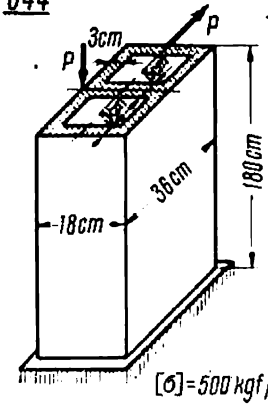
$[\sigma]=100\,kgf/cm^2$

643



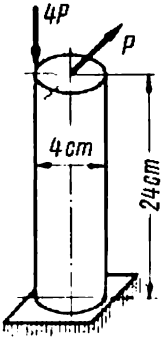
$a=12cm$; $[\sigma_t]=100\,kgf/cm^2$; $[\sigma_c]=120\,kgf/cm^2$

644



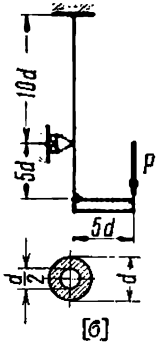
$[\sigma]=500\,kgf/cm^2$

645



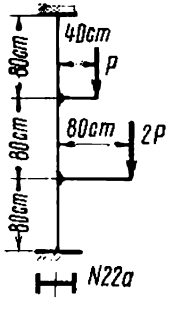
$[\sigma]=1600\,kgf/cm^2$

646



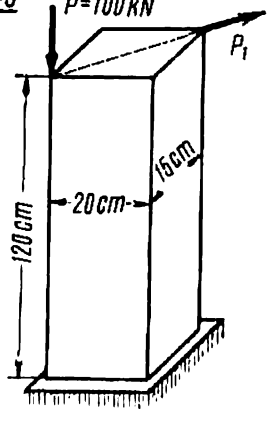
$[\sigma]$

647

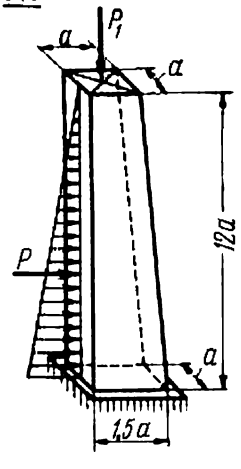


$[\sigma]=1600\,kgf/cm^2$

648



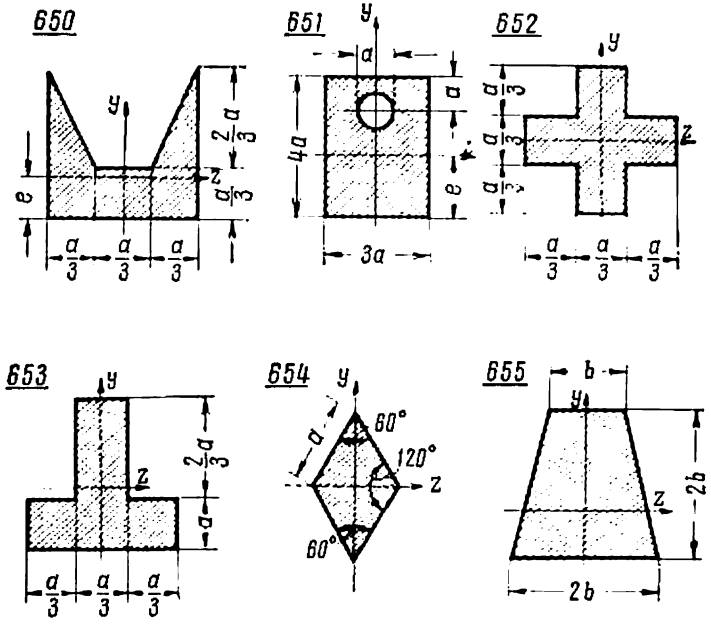
649



Problème 648. Déterminer pour quelles valeurs de la force P_1 les contraintes de traction seront absentes dans la section inférieure de la barre.

Problème 649. Calculer les valeurs de la force P_1 et de σ_{min} d'après la condition $\sigma_{max} = 0$ dans la barre.

Problèmes 650-655. Construire le noyau des sections.



§ 3. Traction ou compression et torsion

Si par suite de l'action des forces extérieures dans les sections droites de la barre se développent un effort longitudinal N_x et un moment de torsion M_t, la barre subit simultanément des déformations dues à une traction ou compression et à une torsion.

x est l'axe géométrique de la barre, y et z les axes principaux centraux d'inertie de sa section droite.

Au point dangereux (y, z) de la section droite considérée de la barre, les contraintes normales dues à l'effort longitudinal N_x, sont égales à :

$$\sigma = \frac{N_x}{F},$$

où F est l'aire de la section ; et les contraintes de cisaillement dues au moment de torsion :

$$\tau = \frac{M_t}{W_t},$$

où W_t est le module de résistance de la section en torsion.

Les contraintes normales principales en ce point sont déterminées d'après la formule (107) :

$$\sigma_{\substack{1\\3}} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Le calcul de résistance s'effectue selon les hypothèses de résistance.

Pour les matériaux plastiques, on utilise la troisième ou la quatrième hypothèse de résistance, selon lesquelles :

$$\sigma_{éq\ III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma] \qquad (148)$$

et

$$\sigma_{éq\ IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant [\sigma]. \qquad (149)$$

Pour les matériaux dont les résistances en traction et en compression sont différentes, $\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \nu$, on utilise la cinquième hypothèse de résistance. Selon cette hypothèse :

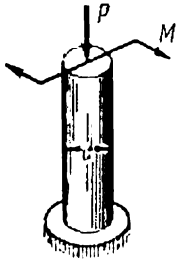


Fig. 129

$$\sigma_{éq\ V} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad (150)$$

Si la section droite de la barre est circulaire de diamètre d, on a :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \text{ et } W_t = W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Exemple 69. Etant données $P = 2$ t, $M = 4$t.cm, $d = 4$ cm, $[\sigma_t] = 350$ kgf/cm², $[\sigma_c] = 1\,400$ kgf/cm² (fig. 129) ; vérifier la résistance de la barre.

Solution. L'effort longitudinal est :

$$N_x = -P = -2 \cdot 10^3 \text{ kgf};$$

le moment de torsion :

$$M_t = M = 4 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

Les contraintes normales dans toutes les sections sont :

$$\sigma = \frac{N_x}{F} = -\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 4^2} \approx 159 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes de cisaillement maximales aux points du contour de la section :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 4^3} \approx 318 \text{ kgf/cm}^2.$$

Puisque :

$$\nu = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{350}{1\,400} = 0{,}25,$$

la contrainte équivalente, selon la formule (150), sera :

$$\sigma_{éq\,V} = -\frac{1-0{,}25}{2} 159 + \frac{1+0{,}25}{2} \sqrt{159^2 + 4 \cdot 318^2} \approx$$

$$\approx 350 \text{ kgf/cm}^2 = [\sigma_t].$$

Donc, la barre est résistante.

Exemple 70. Calculer le coefficient de sécurité $n_{éc}$. On prendra : $P = 160$ kN, $M = 4$ kN·m, $h = 8$ cm, $b = 4$ cm, $\sigma_{éc} = 360$ MN/m² (fig. 130).

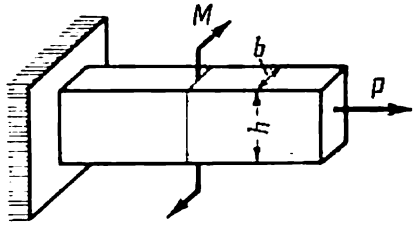


Fig. 130

Solution. Puisque $N_x = P = 16 \cdot 10^4$ N, $M_t = M = 4 \times$ $\times 10^3$ N·m et $\frac{h}{b} = \frac{8}{4} = 2$, en tous les points des sections droites $\sigma = \frac{N_x}{F} = \frac{16 \cdot 10^4}{0{,}04 \cdot 0{,}08} = 50 \cdot 10^6$ N/m² = 50 MN/m², et aux points de contrainte maximale due à la torsion, au milieu des grands côtés de la section rectangulaire de la moitié gauche de la barre :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\beta b^3} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{0{,}493 \cdot 64} \approx 127 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 127 \text{ MN/m}^2.$$

Aux points dangereux de la barre la valeur de la contrainte équivalente d'après la troisième hypothèse de résistance, selon la

formule (148), est :

$$\sigma_{\text{éq } III} = \sqrt{50^2 + 4 \cdot 127^2} \approx 259 \text{ MN/m}^2.$$

Le coefficient de sécurité est :

$$n_{\text{éc}} = \frac{\sigma_{\text{éc}}}{\sigma_{\text{éq } III}} = \frac{360}{259} \approx 1{,}39.$$

§ 4. Torsion et flexion

Pour une déformation simultanée en flexion et en torsion les efforts intérieurs dans la section droite de la barre se réduisent à cinq composantes : un moment de torsion $M_x = M_t$ par rapport à l'axe géométrique x de la barre (fig. 131), des moments fléchissants

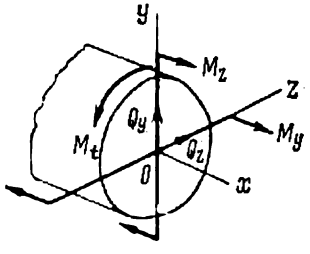


Fig. 131

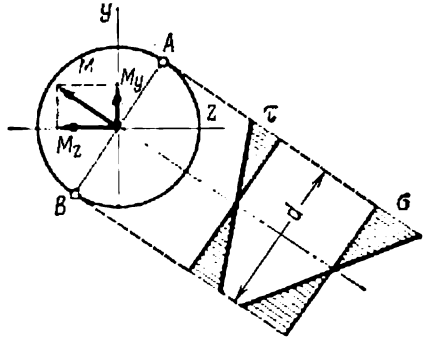


Fig. 132

M_y et M_z par rapport aux axes principaux centraux d'inertie y et z de la section, et des efforts tranchants Q_y et Q_z, portés par ces axes.

Si la section droite de la barre est circulaire de diamètre d, les contraintes de cisaillement, déterminant Q_y et Q_z, ont une valeur secondaire, et généralement sont négligées dans les calculs.

Les contraintes de cisaillement, déterminant le moment de torsion, atteignent une même valeur maximale :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$

en tous les points du contour de la section (fig. 132) ; les contraintes normales maximales, déterminant les moments fléchissants M_y et M_z, sont développées en deux points (A et B) du contour de la section, situés aux extrémités du diamètre perpendiculaire au vecteur du moment résultant $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$; elles sont égales à :

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{32M}{\pi d^3}.$$

Aux points dangereux A et B les contraintes normales principales σ_1 et σ_3 sont déterminées par la formule (107) et les conditions de résistance s'écrivent sous forme d'inégalités (148), (149) et (150).

Compte tenu des valeurs de σ et de τ, et aussi du fait que $W_p = 2W$, les formules de calcul se réduisent à :

$$W \geqslant \frac{M_{éq}}{[\sigma]}, \tag{151}$$

où $M_{éq}$ moment fléchissant équivalent est égal, selon la troisième hypothèse de résistance, à :

$$M_{éq\ III} = \sqrt{M^2 + M_t^2}, \tag{152}$$

selon la quatrième hypothèse à :

$$M_{éq\ IV} = \sqrt{M^2 + 0{,}75M_t^2}, \tag{153}$$

et selon la cinquième à :

$$M_{éq\ V} = \frac{1-\nu}{2} M + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{M^2 + M_t^2}, \tag{154}$$

où $\nu = \dfrac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$.

Si la barre soumise à une torsion avec flexion est de section non circulaire, les points dangereux seront aussi les points situés sur le contour de la section. Mais puisque les points, où ont lieu les contraintes de cisaillement maximales dues à la torsion, peuvent ne pas coïncider avec ceux où ont lieu les contraintes normales maximales dues à la flexion, les points dangereux peuvent être les points où ont lieu les contraintes de cisaillement maximales, les points où ont lieu les contraintes normales maximales et quelques points intermédiaires du contour de la section.

Ces points dangereux (y, z) seront les points où la contrainte équivalente, calculée d'après l'hypothèse de résistance choisie, atteint une valeur maximale.

Les valeurs de σ et de τ, figurant dans l'expression de la contrainte, doivent être calculées d'après les formules :

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \text{ et } \tau = \gamma \frac{M_t}{W_t},$$

où γ est un coefficient abstrait, dépendant de la forme et des dimensions de la section et des coordonnées (y, z) du point considéré du contour de la section.

Pour préciser les calculs, on peut tenir compte aussi des contraintes de cisaillement, dues à la flexion τ_{Q_y} et τ_{Q_z}. La contrainte de cisaillement totale doit alors être déterminée par leur somme géométrique.

Exemple 71. Etant donnés les diamètres des poulies $D' = 20$ cm; $D'' = 60$ cm; leurs poids $P'_0 = 200$ kgf; $P''_0 = 400$ kgf; les tensions des courroies $P'_1 = 800$ kgf; $P'_2 = 400$ kgf; $P''_1 = 1\,000$ kgf; $P''_2 = 600$ kgf; la longueur de l'arbre $l = 2$ m, l'angle d'inclinaison des courroies de la seconde poulie à l'axe z, $\alpha = 45°$; la contrainte admissible du matériau de l'arbre $[\sigma] = 1\,000$ kgf/cm² (fig. 133); calculer le diamètre d de l'arbre.

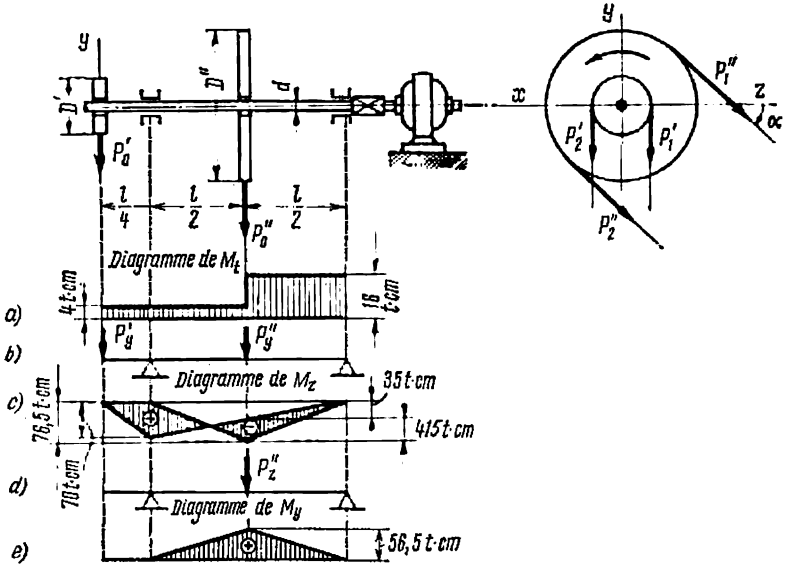


Fig. 133

Solution. La réduction des tensions des courroies de chaque poulie, effectuée au centre de la section de l'arbre, donne les valeurs des moments par rapport à l'axe x dans les sections de la première et seconde poulie:

$$M'_x = (P'_1 - P'_2)\frac{D'}{2} = 400 \cdot 10 = 4 \cdot 10^3 \text{ kgf·cm},$$

$$M''_x = (P''_1 - P''_2)\frac{D''}{2} = 400 \cdot 30 = 12 \cdot 10^3 \text{ kgf·cm}.$$

La projection des forces appliquées dans les sections de chaque poulie sur les axes y et z donne les valeurs des efforts tranchants

résultants suivant les directions de ces axes :

$$P'_y = (P'_1 + P'_2) + P'_0 = 1\,200 + 200 = 1\,400 \text{ kgf}, \quad P'_z = 0,$$

$$P''_y = (P''_1 + P''_2)\cos 45° + P''_0 \approx 1\,600 \cdot 0{,}707 + 400 = 1\,530 \text{ kgf},$$

$$P''_z = (P''_1 + P''_2)\sin 45° \approx 1\,600 \cdot 0{,}707 = 1\,130 \text{ kgf}.$$

Les moments M'_x et M''_x provoquent une torsion. Le diagramme du moment de torsion M_t est donné fig. 133,*a*.

Sous l'action des forces P'_y et P''_y l'arbre fléchit dans le plan xy comme une console (fig. 133,*b*). Par superposition des diagrammes, on construit le diagramme du moment fléchissant M_z par rapport à l'axe z (fig. 133,*c*).

Sous l'action de la force P''_z l'arbre fléchit dans le plan xz suivant le schéma de la fig. 133,*d*. Le diagramme du moment fléchissant M_y par rapport à l'axe y est représenté fig. 133,*e*.

La section dangereuse de l'arbre sera la section au droit de la seconde poulie.

On effectue le calcul d'après la troisième hypothèse de résistance. On détermine la valeur du moment fléchissant équivalent par la formule (152) :

$$M_{\text{éq } III} = \sqrt{M^2 + M_t^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_t^2} =$$

$$= \sqrt{56{,}5^2 + 41{,}5^2 + 16^2} \approx 71{,}9 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Selon la formule (151) on a :

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3 \geqslant \frac{M_{\text{éq } III}}{[\sigma]} = \frac{71\,900}{1\,000}.$$

Le diamètre de l'arbre sera :

$$d \geqslant \sqrt[3]{71{,}9} \approx 4{,}2 \text{ cm}.$$

Exemple 72. Etant donnés : P, a, $h = 2b$, $[\sigma]$ (fig. 134) ; calculer b et h.

S o l u t i o n. On construit le diagramme du moment fléchissant M et du moment de torsion M_t (fig. 134, *a*,*b*).

Au point A de la section dangereuse à l'encastrement (fig. 134,*c*) :

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{36Pa}{bh^2} = 9\frac{Pa}{b^3} \text{ et } \tau = \gamma \frac{M_t}{W_t} = 0{,}795 \frac{2Pa}{0{,}493 b^3} \approx 3{,}23 \frac{Pa}{b^3}.$$

Selon la troisième hypothèse de résistance :

$$\sigma_{\text{éq } III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{Pa}{b^3}\sqrt{81 + 4 \cdot 10{,}4} \approx 11{,}07 \frac{Pa}{b^3} \leqslant [\sigma],$$

d'où :

$$b \geqslant \sqrt[3]{11{,}07\frac{Pa}{[\sigma]}} \approx 2{,}23\sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}.$$

Au point B de la section dangereuse la contrainte normale σ, due au moment fléchissant est nulle ; la contrainte de cisaillement, due au moment de torsion, est :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{2Pa}{0{,}493b^3}.$$

Selon la troisième hypothèse de résistance, on a :

$$\tau_{max} = \frac{2Pa}{0{,}493b^3} \leqslant \frac{[\sigma]}{2},$$

d'où :

$$b \geqslant \sqrt[3]{8{,}11\frac{Pa}{[\sigma]}}.$$

Le point A s'avère plus dangereux, par conséquent, il faut prendre :

$$b \approx 2{,}23\sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$$

et $$h \approx 4{,}46\sqrt{\frac{Pa}{[\sigma]}}$$

On vérifie les dimensions b et h ainsi choisies par un calcul au point B, en tenant compte des contraintes de cisaillement provoquées par la flexion.

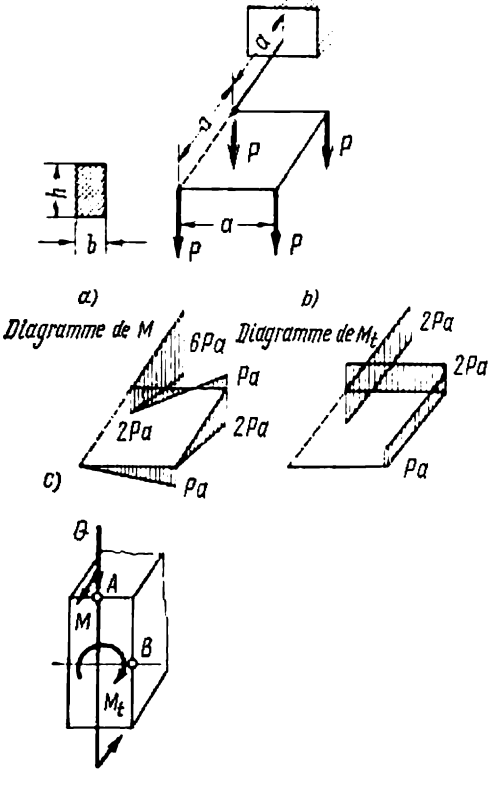


Fig. 134

Puisque dans la section dangereuse l'effort tranchant $Q = 4P$, la contrainte de cisaillement au point B sera :

$$\tau_Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{bh} = 3\frac{P}{b^2}.$$

La contrainte de cisaillement résultante au point B est :

$$\tau = \tau_Q + \tau_{max} = \frac{3P}{b^2} + \frac{2Pa}{0{,}493b^3} = \frac{Pa}{b^3}\left(4{,}06 + 3\frac{b}{a}\right)$$

D'après la troisième hypothèse de résistance, on doit vérifier la condition :

$$\tau = \frac{Pa}{b^3}\left(4{,}06 + 3\frac{b}{a}\right) \leqslant \frac{[\sigma]}{2},$$

donc :

$$\frac{Pa}{b^3} \leqslant \frac{[\sigma]}{2\left(4{,}06 + 3\dfrac{b}{a}\right)}.$$

Le calcul pour le point A avait donné : $\dfrac{Pa}{b^3} \leqslant \dfrac{[\sigma]}{11{,}07}$.

Donc, le calcul pour le point B donne de grandes dimensions pour la section droite, quand $\dfrac{[\sigma]}{2\left(4{,}06 + 3\dfrac{b}{a}\right)} \leqslant \dfrac{[\sigma]}{11{,}07}$ ou $4{,}06 + 3\dfrac{b}{a} > 5{,}54$ ou $\dfrac{b}{a} > \dfrac{1{,}48}{3} \approx 0{,}493$.

Cela veut dire que le point B sera plus dangereux que le point A seulement pour des valeurs des longueurs des tronçons de la poutre telle que $a < \dfrac{b}{0{,}493} \approx 2b$.

Exemple 73. Quatre barres prismatiques de longueur l avec des axes géométriques situés dans un même plan, sont encastrées d'un côté et liées entre elles de l'autre par une planchette parfaitement rigide (fig. 135,*a*).

Calculer la rotation φ de la planchette sous l'action du moment M_0 appliqué en son plan, si les distances entre les axes des barres sont a, b et c, les rigidités de ces barres en torsion C_1, C_2, C_3 et C_4 et leurs rigidités en flexion B_1, B_2, B_3 et B_4.

On admettra que la planchette de liaison reste verticale et que la ligne droite horizontale, passant par les centres de gravité des sections extrêmes des barres, coïncide avec la direction de l'un des axes principaux centraux d'inertie des barres.

S o l u t i o n. Puisque la planchette de liaison est parfaitement rigide, elle subit une rotation φ dans son plan autour d'un point O (fig. 135,*b*). Cet angle sera la déformation relative en torsion pour chaque barre, c'est-à-dire :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi. \qquad (a)$$

Puisque :

$$\varphi_1 = \frac{M_{t_1}}{C_1},\ \varphi_2 = \frac{M_{t_2}}{C_2},\ \varphi_3 = \frac{M_{t_3}}{C_3},\ \varphi_4 = \frac{M_{t_4}}{C_4}, \qquad (b)$$

où M_{t_i} sont les moments de torsion pour chaque barre $\left(\text{de rigidité } C_i = \frac{G_i I_{t_i}}{l}\right)$, les égalités (a) prendront la forme:

$$\frac{M_{t_1}}{C_1} = \frac{M_{t_2}}{C_2} = \frac{M_{t_3}}{C_3} = \frac{M_{t_4}}{C_4} = \varphi. \qquad (c)$$

Compte tenu de la propriété des proportions égales, on a:

$$M_{t_1} + M_{t_2} + M_{t_3} + M_{t_4} = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\,\varphi. \qquad (d)$$

Les déplacements verticaux des extrémités des barres doivent

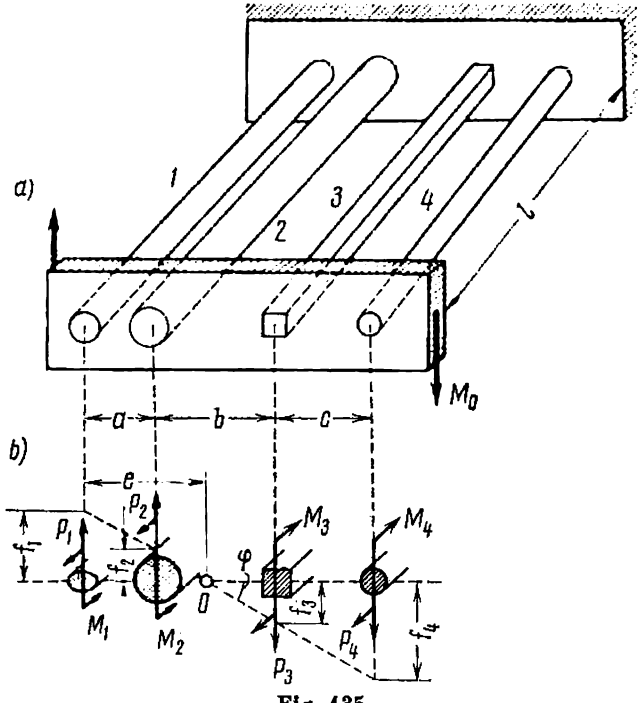


Fig. 135

être égaux et situés dans le plan de la planchette de liaison (fig. 135, *b*):

$$f_1 = e\varphi = \frac{1}{B_1}\left(P_1 - \frac{3}{2l} M_1\right);\quad f_2 = (e-a)\,\varphi = \frac{1}{B_2}\left(P_2 - \frac{3}{2l} M_2\right);$$

$$f_3 = (a+b-e)\,\varphi = \frac{1}{B_3}\left(P_3 - \frac{3}{2l} M_3\right) \text{ et}$$

$$f_4 = (a+b+c-e)\,\varphi = \frac{1}{B_4}\left(P_4 - \frac{3}{2l} M_4\right), \qquad (e)$$

où P_1, P_2, P_3, P_4 et M_1, M_2, M_3, M_4 sont les forces et les moments appliqués aux sections extrêmes des barres correspondantes. Les rigidités sont égales à :

$$B_i = \frac{3E_iI_i}{l^3}.$$

En admettant que la planchette de liaison reste verticale, les rotations des sections extrêmes des barres, dues à la flexion, doivent être nulles, c'est-à-dire que :

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{B_1}\left(\frac{3}{2l}P_1 - \frac{3}{l^2}M_1\right) = 0; \quad \theta_2 = \frac{1}{B_2}\left(\frac{3}{2l}P_2 - \frac{3}{l^2}M_2\right) = 0, \\ \theta_3 &= \frac{1}{B_3}\left(\frac{3}{2l}P_3 - \frac{3}{l^2}M_3\right) = 0, \quad \theta_4 = \frac{1}{B_4}\left(\frac{3}{2l}P_4 - \frac{3}{l^2}M_4\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

D'où :

$$M_1 = \frac{P_1 l}{2}; \quad M_2 = \frac{P_2 l}{2}; \quad M_3 = \frac{P_3 l}{2}; \quad M_4 = \frac{P_4 l}{2}. \quad (g)$$

Portant ces valeurs dans les équations (e) et résolvant ces dernières par rapport à P_1, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= 4B_1 e\varphi; \quad P_2 = 4B_2(e-a)\varphi; \\ P_3 &= 4B_3(a+b-e)\varphi; \quad P_4 = 4B_4(a+b+c-e)\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

De la condition de la statique, on a :

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad (i)$$

ou

$$B_1 e\varphi + B_2(e-a)\varphi = B_3(a+b-e)\varphi + B_4(a+b+c-e)\varphi, \quad (j)$$

d'où

$$e = \frac{B_2 a + B_3(a+b) + B_4(a+b+c)}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}. \quad (k)$$

On prend la somme des moments par rapport au point O :

$$M_{t_1} + M_{t_2} + M_{t_3} + M_{t_4} + P_1 e + P_2(e-a) + P_3(a+b-e) + P_4(a+b+c-e) = M_0. \quad (l)$$

Tenant compte de (d) et (k) on écrit l'équation (l) sous la forme suivante :

$$\varphi(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + 4\varphi B_1 e^2 + 4\varphi B_2(e-a)^2 + 4\varphi B_3(a+b-e)^2 + 4\varphi B_4(a+b+c-e)^2 = M_0, \quad (m)$$

d'où :

$$\varphi = \frac{M_0}{C_1+C_2+C_3+C_4+4[B_1e^2+B_2(e-a^2)+B_3(a+b-e)^2+B_4(a+b+c-e)]^3} \cdot \text{(n)}$$

Connaissant les valeurs de e et φ, on détermine les valeurs des M_{t_i} des expressions (b), les valeurs des P_i des expressions (h) et les valeurs des M_i des expressions (g).

Les moments fléchissants maximaux pour chaque barre sont obtenus dans les sections extrêmes, ils sont :

$$\max M_i = P_i \frac{l}{2}.$$

La résistance de chaque barre est vérifiée par un calcul de torsion avec flexion.

Cas particulier. Toutes les barres sont de section circulaire :

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d; \quad a = b = c = d, \quad l = 10\ d;$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E; \quad G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G = \frac{2}{5} E.$$

Dans ce cas :

$$I = \frac{1}{2} I_p; \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C = \frac{GI_p}{l};$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B = \frac{3EI}{l^3} = \frac{15}{4}\frac{GI_p}{l^3}.$$

A l'aide des formules (k), (n), (c) et (h) on obtient respectivement :

$$e = \frac{3}{2} d;$$

$$\varphi = \frac{M_0}{4\frac{GI_p}{l} + 15\frac{GI_p}{l^3} d^2 \left(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M_0 l}{GI_p} \cdot \frac{1}{4 + 75\frac{d^2}{l^2}} = \frac{4}{19}\frac{M_0 l}{GI_p};$$

$$M_{t_1} = M_{t_2} = M_{t_3} = M_{t_4} = M_t = \frac{4}{19} M_0;$$

$$P_1 = P_4 = \frac{4}{19} \cdot \frac{M_0 l}{GI_p} 4 \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{GI_p}{l^3} \cdot \frac{3}{2} d = \frac{90}{19} M_0 \frac{d}{l^2} =$$

$$= \frac{9}{19} \cdot \frac{M_0}{l}; \quad P_2 = P_3 = \frac{3}{19} \frac{M_0}{l}.$$

Les moments fléchissants maximaux dans les barres sont:

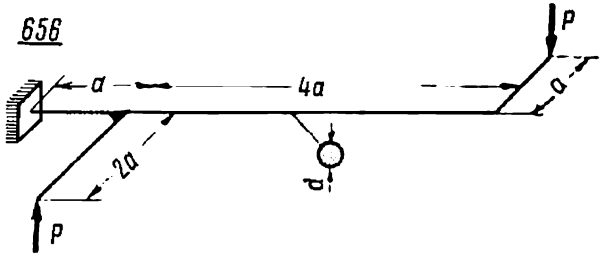
$$\max M_1 = \max M_4 = \frac{9}{38} M_0; \quad \max M_2 = \max M_3 = \frac{3}{38} M_0.$$

Pour un calcul de résistance les équations doivent être écrites pour la 1re et 4e barre. De la troisième hypothèse de résistance, on obtient:

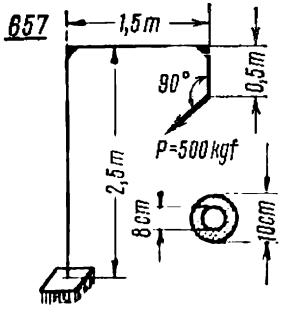
$$\frac{M_0}{38W} \sqrt{81 + 64} \approx 0{,}317 \frac{M_0}{W} \leqslant [\sigma].$$

Problèmes 656-664. Construire les diagrammes du moment de torsion M_t, du moment fléchissant M et calculer la valeur de la contrainte équivalente à l'aide de la troisième hypothèse de résistance.

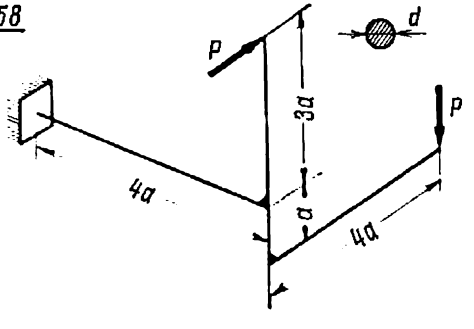
656

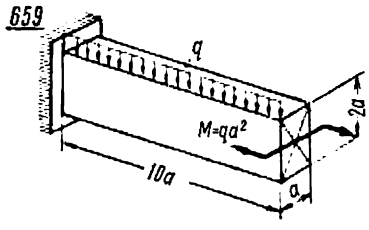


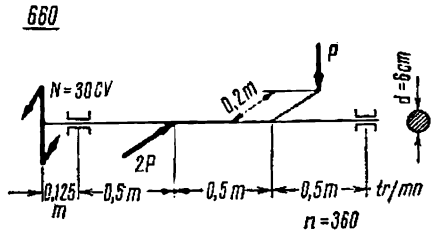
657

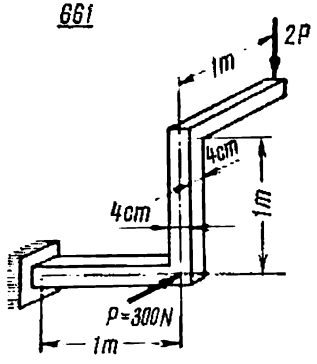


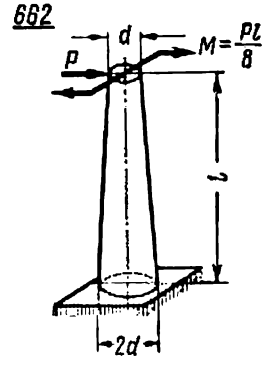
658

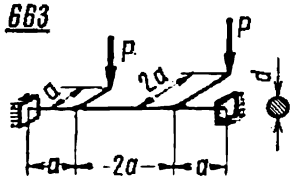


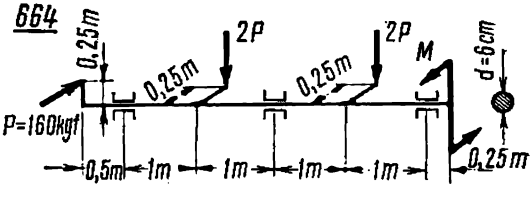




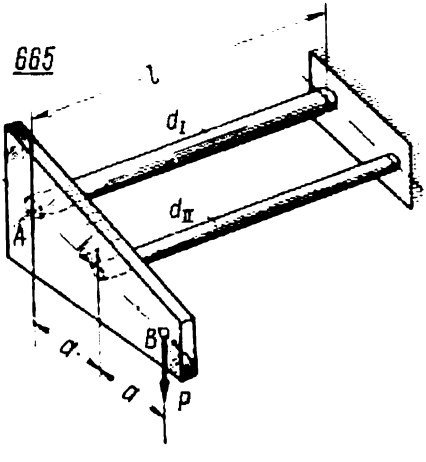








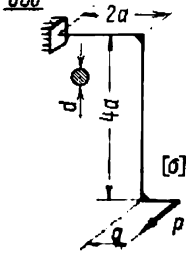
Problème 665. Soient: $P = 60$ kgf, $d_1 = 2$ cm, $d_2 = 1$ cm, $a = 8$ cm, $l = 20$ cm, $E = \frac{5}{2}G = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², la planchette AB parfaitement rigide et restant dans le plan vertical.



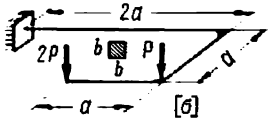
Calculer les contraintes normales principales maximale et minimale dans les barres ($\sigma_{\substack{\max \\ \min}}{}_{I,\ II}$) et le déplacement vertical δ_p du point d'application de la force P.

Problèmes 666-680. Déterminer les dimensions des sections droites des barres par calcul selon la troisième hypothèse de résistance.

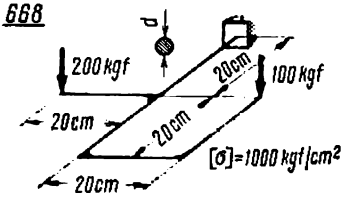
666



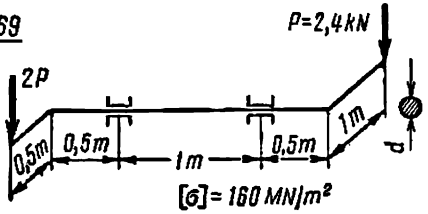
667



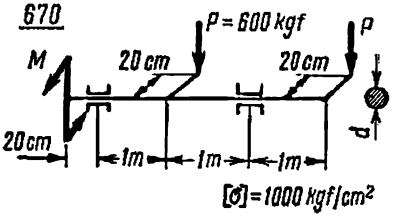
668



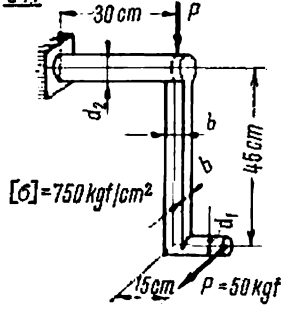
669



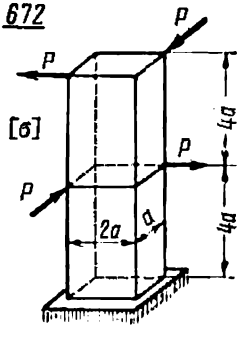
670



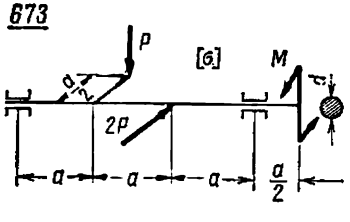
671



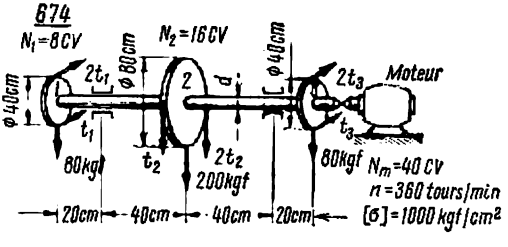
672

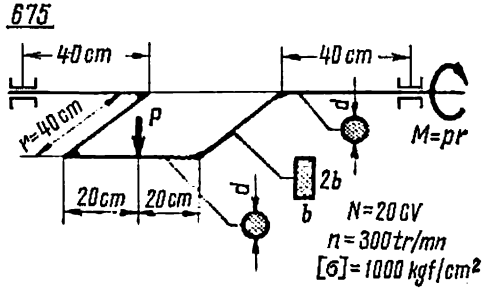


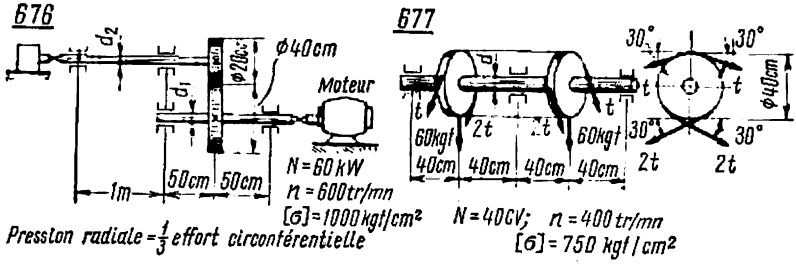
673

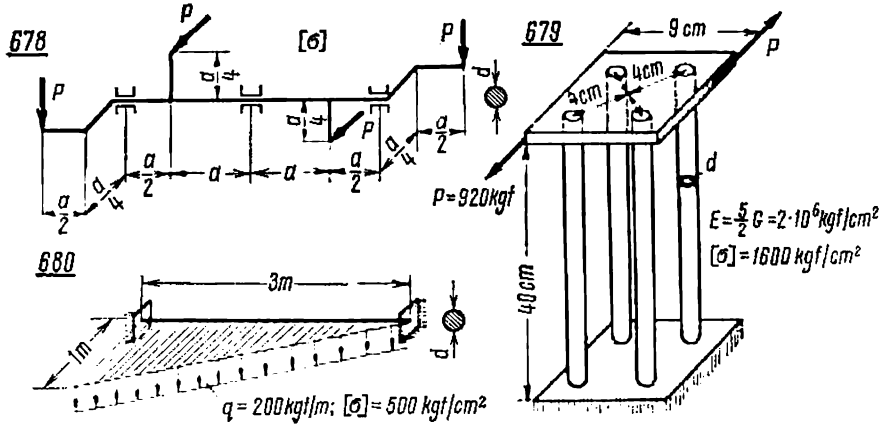


674



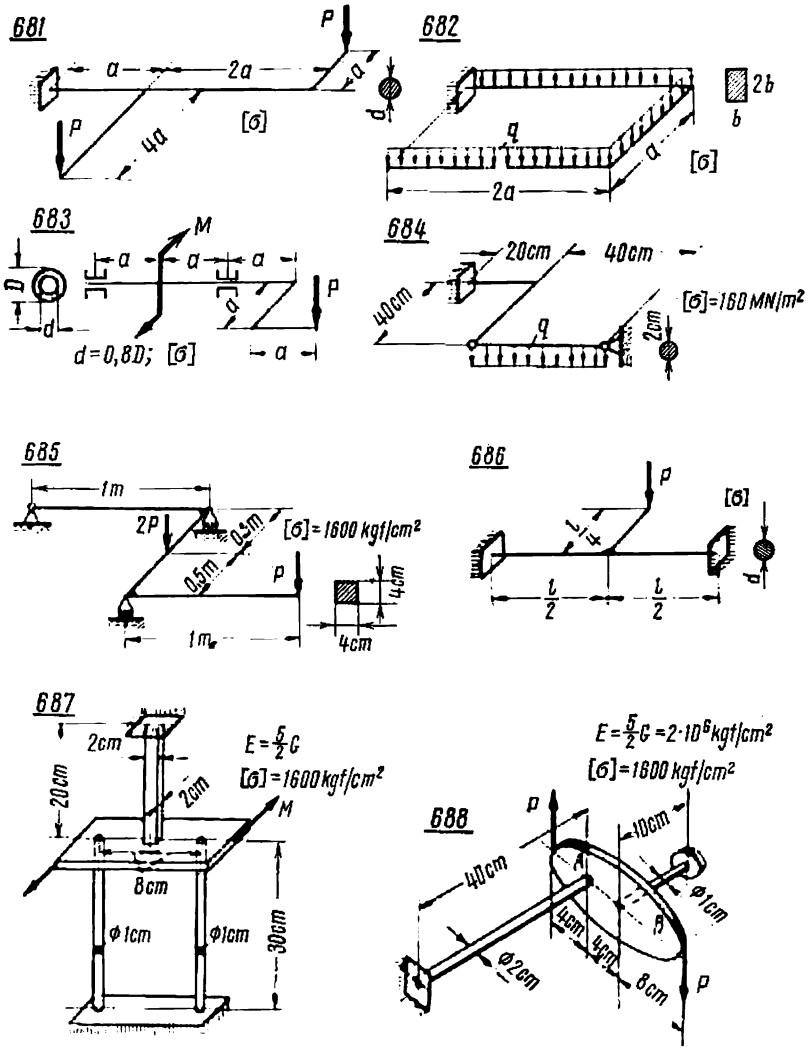






Problèmes 681-688. Construire les diagrammes du moment de torsion et du moment fléchissant et déterminer la charge de sécurité par calcul selon la troisième hypothèse de résistance.

Dans le problème 688 la planchette de liaison AB est parfaitement rigide et reste dans le plan vertical.



§ 5. Cas général de sollicitations composées

Dans le cas général où les forces appliquées à la barre prismatique sont situées dans l'espace, les efforts intérieurs dans la section droite se réduisent aux six composantes suivantes : l'effort longitudinal N_x, le moment de torsion M_t, les efforts tranchants Q_y et Q_z et les moments fléchissants M_y et M_z (fig. 136).

x étant l'axe géométrique de la barre et y et z les axes principaux centraux d'inertie de sa section droite, le centre de gravité de celle-ci

coïncidant avec le centre de flexion, Q_y et M_z produisent une flexion dans le plan xy, et Q_z et M_y une flexion dans le plan xz. La barre est donc soumise simultanément à une traction ou compression, à une torsion et à deux flexions planes.

La contrainte normale en un point arbitraire (y, z) dans la section droite de la barre est calculée à l'aide de la formule (142) ; la contrainte de cisaillement résultante est déterminée en prenant la somme géométrique des contraintes de cisaillement dues à la torsion et à la flexion.

L'équation de l'axe neutre a pour expression (143).

Il n'est pas toujours possible d'établir d'emblée la position du point dangereux ; c'est pourquoi il nous faut comparer quelques points du contour de la section et voir à quel degré ils sont

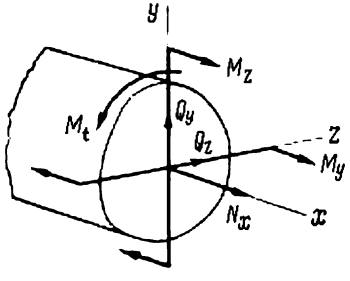


Fig. 136

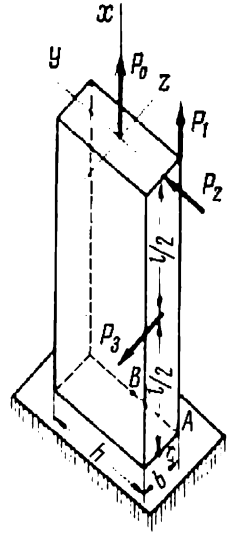


Fig. 137

dangereux. Le point dangereux sera le point du contour de la section où la contrainte équivalente, calculée d'après l'hypothèse de résistance choisie, atteint une valeur maximale.

En comparant cette valeur calculée de la contrainte avec la valeur de la contrainte admissible, on peut déterminer les dimensions de la section droite de la barre ou vérifier la résistance de la barre d'après les dimensions données de sa section droite.

Exemple 74. Etant donnés : $P_0 = 40$ t, $P_1 = 8$ t, $P_2 = 4$ t, $P_3 = 2$ t, $l = 1$ m, $h = 24$ cm, $b = 8$ cm, $[\sigma] = 1\,400$ kgf/cm^2 (fig. 137) ;

vérifier la résistance de la barre.

Solution. Dans la section inférieure dangereuse de la barre les efforts ont les valeurs suivantes :

$$N_x = P_0 + P_1 = 40 + 8 = 48 \text{ t};$$

$$M_z = P_1 \frac{h}{2} + P_2 l = 8 \cdot 12 + 4 \cdot 100 = 496 \text{ t} \cdot \text{cm};$$

$$M_y = P_1 \frac{b}{2} + P_3 \frac{l}{2} = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 50 = 132 \text{ t·cm};$$

$$M_t = P_3 \frac{h}{2} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ t·cm};$$

$$Q_y = P_2 = 4 \text{ t}; \quad Q_z = P_3 = 2 \text{ t}.$$

Les diagrammes et les valeurs des contraintes normales et tangentielles, dues aux efforts intérieurs ainsi obtenus, sont représentés fig. 138.

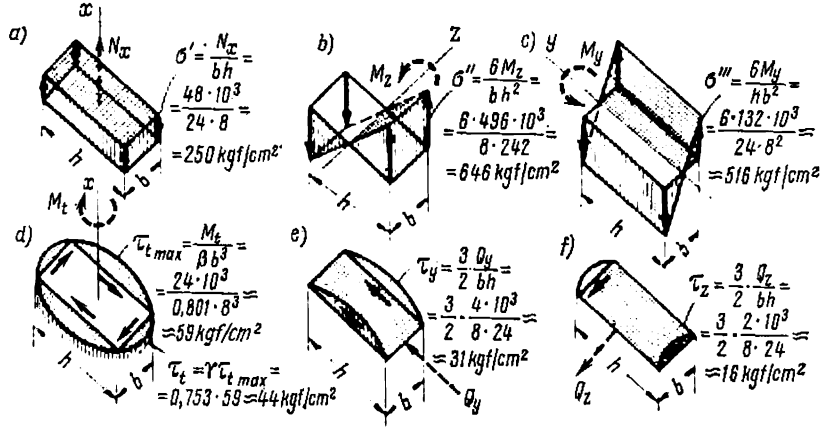


Fig. 138

Les contraintes normales maximales sont développées au point anguleux A de la section inférieure de la barre (fig. 137):

$$\sigma_{éq_A} = \sigma_{max} = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = 250 + 646 + 516 = 1\,412 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes normale et tangentielle au point médian B du grand côté droit de la section sont les suivantes:

$$\sigma = \sigma' + \sigma''' = 250 + 516 = 766 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau = \tau_{t_{max}} - \tau_y = 59 - 31 = 28 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte équivalente, selon la troisième hypothèse, est:

$$\sigma_{éq_B} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{766^2 + 4 \cdot 28^2} \approx 768 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes normale et tangentielle au point médian C du petit côté inférieur de la section sont les suivantes:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = 250 + 646 = 896 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau = \tau_t + \tau_z = 44 + 16 = 60 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte équivalente, selon la troisième hypothèse de résistance, est :

$$\sigma_{éq_C} = \sqrt{896^2 + 4 \cdot 60^2} \approx 904 \text{ kgf/cm}^2.$$

La comparaison des valeurs de $\sigma_{éq}$ aux points A, B et C montre que A est le point le plus dangereux.

Puisque $\sigma_{éq_A} = 1\,412$ kgf/cm² est plus grand que $[\sigma]$ de moins de 1 %, on peut considérer que la résistance de la barre est assurée.

Exemple 75. Calculer a, h, b, d, d_0 (fig. 139). On prendra : $P_1 = 200$ kgf ; $P_2 = 100$ kgf ; $P_3 = 240$ kgf ; $l_1 = 30$ cm ; $l_2 = 40$ cm ; $l_3 = 60$ cm ; $l_4 = 80$ cm ; $[\sigma] = 1\,000$ kgf/cm².

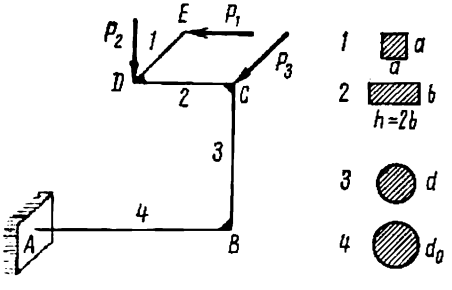


Fig. 139

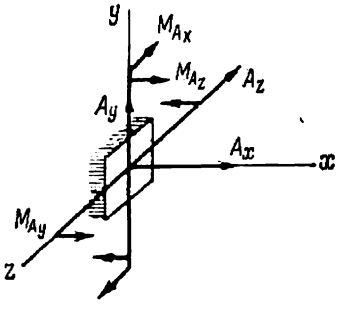


Fig. 140

Solution. 1. Calcul des composantes de la réaction à l'encastrement. Les six conditions de la statique donnent (fig. 140) :

$$\sum X = A_x - P_1 = 0; \qquad A_x = P_1 = 200 \text{ kgf};$$

$$\sum Y = A_y - P_2 = 0; \qquad A_y = P_2 = 100 \text{ kgf};$$

$$\sum Z = -A_z + P_3 = 0; \qquad A_z = P_3 = 240 \text{ kgf};$$

$$\sum M_x = M_{A_x} - P_3 l_3 = 0; \qquad M_{A_x} = P_3 l_3 = 240 \cdot 0{,}6 = 144 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$\sum M_y = M_{A_y} + P_1 l_1 - P_3 l_4 = 0;$$

$$M_{A_y} = P_3 l_4 - P_1 l_1 = 240 \cdot 0{,}8 - 200 \cdot 0{,}3 = 132 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$\sum M_z = M_{A_z} - P_1 l_3 + P_2 (l_4 - l_2) = 0;$$

$$M_{Az} = P_1 l_3 - P_2 (l_4 - l_2) = 200 \cdot 0{,}6 - 100 (0{,}8 - 0{,}4) = 80 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

2. Calcul des efforts longitudinaux N, des moments de torsion M_t et des moments fléchissants M_x, M_y, M_z dans les différents tronçons de la barre.

Tronçon 1. On admet qu'au point E, $z = 0$ et qu'au point D $z = l_1$.

Flexion dans le plan xz:

$$M_y = P_1 z; \quad M_{y_{z=0}} = 0; \quad M_{y_{z=l_1}} = P_1 l_1 = 200 \cdot 0{,}3 = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

Tronçon 2. On admet qu'au point D, $x = 0$ et qu'au point C $x = l_2$.

Traction et flexion dans les plans xz et xy:

$$N = P_1 = 200 \text{ kgf}; \quad M_y = P_1 l_1 = 200 \cdot 0{,}3 = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_z = P_2 x; \quad M_{z_{x=0}} = 0; \quad M_{z_{x=l_2}} = P_2 l_2 = 100 \cdot 0{,}4 = 40 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

Tronçon 3. On admet qu'au point C, $y = 0$ et qu'au point B $y = l_3$.

Compression, torsion et flexion dans les plans yz et xy:

$$N = -P_2 = -100 \text{ kgf}; \quad M_t = P_1 l_1 = 200 \cdot 0{,}3 = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_x = P_3 y;$$

$$M_{x_{y=0}} = 0; \quad M_{x_{y=l_3}} = P_3 l_3 = 240 \cdot 0{,}6 = 144 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_z = P_2 l_2 + P_1 y;$$

$$M_{z_{y=0}} = P_2 l_2 = 100 \cdot 0{,}4 = 40 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_{z_{y=l_3}} = P_2 l_2 + P_1 l_3 = 100 \cdot 0{,}4 + 200 \cdot 0{,}6 = 160 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

Tronçon 4. On admet qu'au point A, $x = 0$ et qu'au point B, $x = l_4$.

Compression, torsion et flexion dans les plans xz et xy:

$$N = -A_x = -200 \text{ kgf}; \quad M_t = M_{A_x} = 144 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_y = M_{A_y} - A_z x;$$

$$M_{y_{x=0}} = M_{A_y} = 132 \text{ kgf} \cdot \text{m}; \quad M_{y_{x=l_4}} = M_{A_y} - A_z l_4 =$$

$$= 132 - 240 \cdot 0{,}8 = -60 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_z = M_{A_z} + A_y x; \quad M_{z_{x=0}} = M_{A_z} = 80 \text{ kgf} \cdot \text{m};$$

$$M_{z_{x=l_4}} = M_{A_z} + A_y l_4 = 80 + 100 \cdot 0{,}8 = 160 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

3. Construction des diagrammes de N, M_t, M_x, M_y et M_z pour les tronçons.

Les diagrammes de N, M_t, M_x, M_y et M_z sont dessinés fig. 141, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* d'après les valeurs trouvées pour chaque tronçon du système.

4. Choix des sections droites des tronçons.

Tronçon 1. La section dangereuse est près du point D (fig. 141,*f* et 139):

$$M_y = 60 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

On choisit la section d'après le calcul de la flexion transversale plane:

$$W = \frac{a^3}{6} \geqslant \frac{M_y}{[\sigma]}; \quad a \geqslant \sqrt[3]{6\frac{M_y}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{6\frac{6 \cdot 10^3}{10^3}} \approx 3{,}3 \text{ cm}.$$

Tronçon 2. La section dangereuse est près du point C (fig. 141,*g* et 139). $N = 200$ kgf; $M_y = 60$ kgf·m; $M_z = 40$ kgf·m.

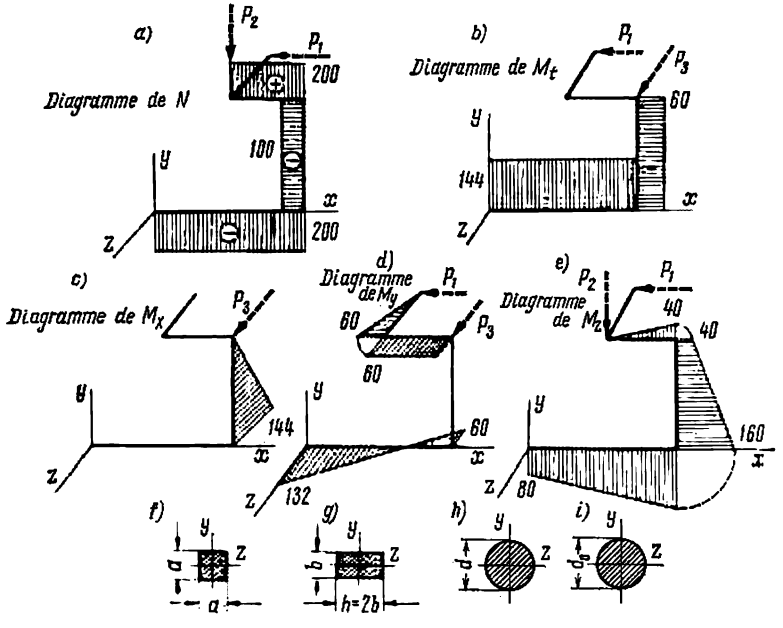


Fig. 141

On choisit la section d'après le calcul de la flexion déviée:

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12}; \quad W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{h^3}{24}; \quad c = \frac{W_z}{W_y} = 2;$$

$$W_y \geqslant \frac{M_y + cM_z}{[\sigma]};$$

$$\frac{h^3}{12} \geqslant \frac{6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 4 \cdot 10^3}{10^3} = 14; \quad h \geqslant \sqrt[3]{12 \cdot 14} \approx 5{,}52 \text{ cm}.$$

On prend $h = 5{,}6$ cm; $b = \dfrac{h}{2} = 2{,}8$ cm et on vérifie la section, compte tenu de l'effort longitudinal:

$$F = bh = 2{,}8 \cdot 5{,}6 \approx 15{,}7 \text{ cm}^2;$$

$$W_y = \frac{h^3}{12} \approx 14{,}6 \text{ cm}^3; \quad W_z = \frac{h^3}{24} \approx 7{,}3 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{200}{15{,}7} + \frac{6 \cdot 10^3}{14{,}6} + \frac{4 \cdot 10^3}{7{,}3} \approx$$

$$\approx 972 \text{ kgf/cm}^2.$$

La sous-tension est de $\dfrac{[\sigma] - \sigma_{max}}{[\sigma]} \cdot 100 = \dfrac{28 \cdot 100}{10^3} = 2{,}8$ %.

Tronçon 3. La section dangereuse est près du point B (fig. 141,*h* et 139). $N = 100$ kgf; $M_t = 60$ kgf·m; $M_x = 144$ kgf·m; $M_z = 160$ kgf·m.

On choisit le diamètre de la section d'après le calcul de torsion avec flexion. Le moment fléchissant équivalent, selon la troisième hypothèse de résistance, est:

$$M_{éq\ III} = \sqrt{M_t^2 + M_x^2 + M_z^2} = \sqrt{60^2 + 144^2 + 160^2} \approx 223 \text{ kgf·m};$$

$$W \approx 0{,}1d^3 \geqslant \frac{M_{éq\ III}}{[\sigma]} = \frac{223 \cdot 10^2}{10^3}; \quad d \geqslant \sqrt[3]{223} \approx 6{,}1 \text{ cm}.$$

On vérifie la section, compte tenu de l'effort longitudinal:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 6{,}1^3}{32} \approx 22{,}3 \text{ cm}^3; \quad W_p = 2W = 44{,}6 \text{ cm}^3;$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 6{,}1^2}{4} \approx 29{,}2 \text{ cm}^2.$$

Le moment fléchissant est:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = \sqrt{144^2 + 160^2} \approx 215 \text{ kgf·m}.$$

La contrainte normale:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{100}{29{,}2} + \frac{215 \cdot 10^2}{22{,}3} \approx 967 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte de cisaillement:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{60 \cdot 10^2}{44{,}6} \approx 135 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte équivalente, selon la troisième hypothèse de résistance, sera :

$$\sigma_{\text{éq } III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{967^2 + 4 \cdot 135^2} \approx 1\,004 \text{ kgf/cm}^2.$$

La surtension est de 0,4 %, ce qui est tout à fait admissible.

Tronçon 4. La section dangereuse est près du point B (fig. 141,*i* et 139). $N = 200$ kgf; $M_t = 144$ kgf·m; $M_y = 60$ kgf·m; $M_z = 160$ kgf·m.

On choisit le diamètre de la section d'après le calcul de torsion avec flexion.

Le moment équivalent selon la troisième hypothèse de résistance est :

$$M_{\text{éq } III} = \sqrt{M_t^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{144^2 + 60^2 + 160^2} \approx 223 \text{ kgf·m}.$$

D'après le calcul du tronçon *3*, on prend $d_0 = 6{,}1$ cm et on vérifie la section en tenant compte de l'effort longitudinal : $W = 22{,}3$ cm³; $W_p = 44{,}6$ cm³; $F = 29{,}2$ cm².

Le moment fléchissant est :

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{60^2 + 160^2} \approx 171 \text{ kgf·m}.$$

La contrainte normale est :

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{200}{29{,}2} + \frac{171 \cdot 10^2}{22{,}3} \approx 774 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte de cisaillement est :

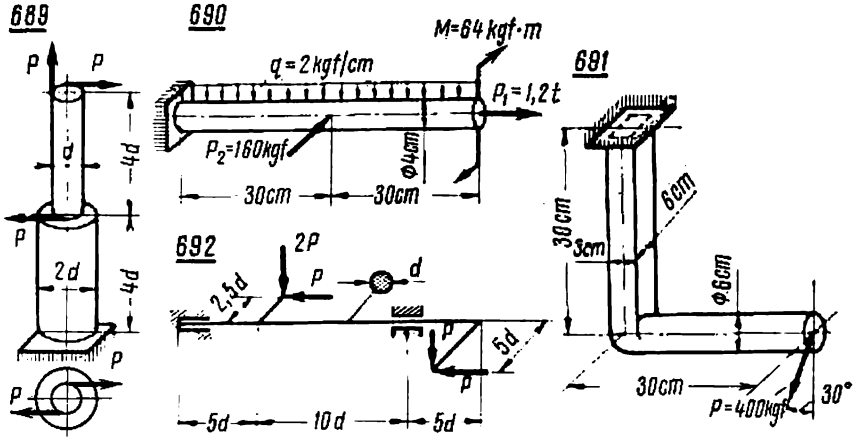
$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{144 \cdot 10^2}{44{,}6} \approx 323 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte équivalente selon la troisième hypothèse de résistance est :

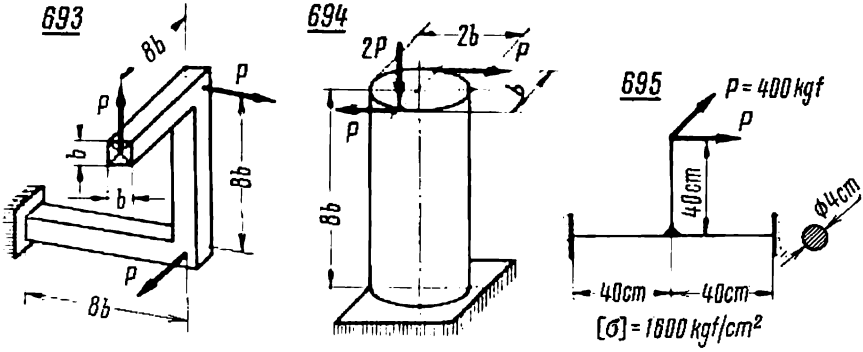
$$\sigma_{\text{éq } III} = \sqrt{774^2 + 4 \cdot 323^2} \approx 1\,008 \text{ kgf/cm}^2.$$

Puisque la surtension est de moins de 1 %, on peut prendre $d_0 = 6{,}1$ cm.

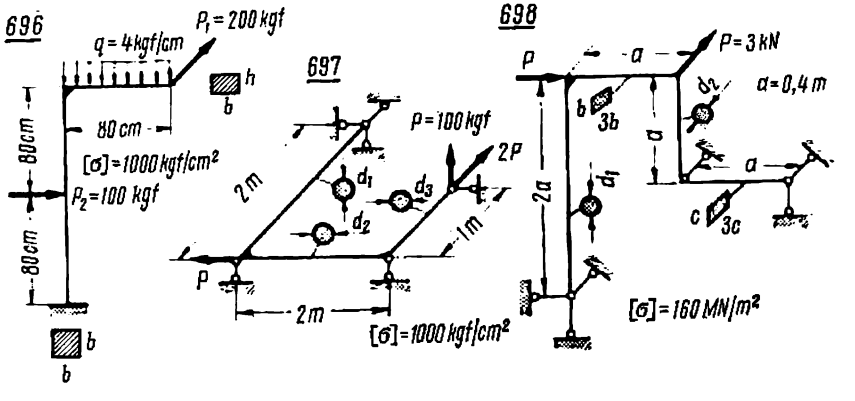
Problèmes 689-692. Calculer les contraintes équivalentes selon la troisième hypothèse de résistance.



Problèmes 693-695. Vérifier la résistance des barres d'après la troisième hypothèse de résistance.



Problèmes 696-698. Déterminer les dimensions nécessaires des sections droites des barres à l'aide de la troisième hypothèse de résistance.



§ 6. Ressort cylindrique hélicoïdal de traction ou de compression

Un *ressort cylindrique hélicoïdal* est une barre prismatique enroulée autour d'un cylindre circulaire de rayon constant (fig. 142).

Considérons un ressort, fait d'une barre de section droite circulaire, de diamètre d. Désignons par D le diamètre moyen d'une spire et par n le nombre de spires. Le pas du ressort est déterminé par l'angle d'inclinaison α du plan xz de la spire au plan horizontal.

L'axe x est tangent à la ligne moyenne de la spire, et l'axe y perpendiculaire au plan xz.

Si les extrémités de la barre sont portées aux centres des spires et sont

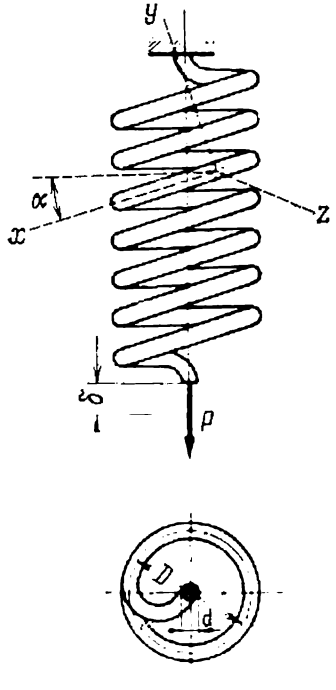


Fig. 142

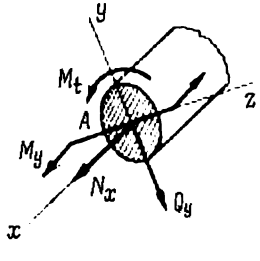


Fig. 143

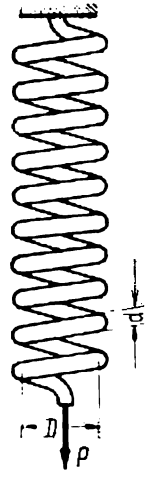


Fig. 144

soumises à une force de traction P le long de l'axe du ressort, les efforts intérieurs dans chaque section droite de la barre se réduisent à un effort constant de traction $N_x = P \sin \alpha$, à un effort tranchant transversal $Q_y = P \cos \alpha$, à un moment de torsion $M_t = PR \cos \alpha$ et à un moment fléchissant $M_y = P\,R \sin \alpha$ (fig. 143).

Le point dangereux de la section est le point A de la surface intérieure de la spire. En ce point on a:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W} = \frac{16PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4D}\right)\sin\alpha \qquad (155)$$

$$\tau = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_t}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D}\right)\cos\alpha. \qquad (156)$$

La condition de résistance selon la troisième hypothèse de résistance est :

$$= \frac{16PD}{\pi d^3}\sqrt{\left(1 + \frac{d}{4D}\right)^2 \sin^2\alpha + \left(1 + \frac{d}{2D}\right)^2 \cos^2\alpha} \leqslant [\sigma]. \qquad (157)$$

Si le pas du ressort est petit ($\alpha < 14°$) et $\frac{D}{d} > 10$, on effectue le calcul seulement pour la torsion selon la formule :

$$\frac{8PD}{\pi d^3} \leqslant [\tau]. \qquad (158)$$

Quand la courbure de la spire est grande $\left(\frac{D}{d} < 10\right)$, il est commode de tenir compte de l'effet de la courbure ainsi que des forces par un coefficient :

$$k = \frac{\frac{D}{d} - 0{,}25}{\frac{D}{d} - 1} + \frac{0{,}615}{\frac{D}{d}}, \qquad (159)$$

qui est inclus dans la condition de résistance :

$$k\frac{8PD}{\pi d^3} \leqslant [\tau]. \qquad (160)$$

Le déplacement axial δ de l'extrémité libre du ressort a pour expression générale :

$$\delta = \frac{8PD^3n}{d^4\cos\alpha}\left[2\left(1 + \frac{d^2}{4D^2}\right)\frac{\sin^2\alpha}{E} + \left(1 + \frac{d^2}{2D^2}\right)\frac{\cos^2\alpha}{G}\right], \qquad (161)$$

où E et G sont les modules d'élasticité longitudinale et transversale du matériau de la barre du ressort.

Pour un ressort de faible pas le déplacement peut être calculé, d'une façon assez exacte, en tenant seulement compte de la déformation de torsion, par la formule :

$$\delta = \frac{8PD^3n}{Gd^4}. \qquad (162)$$

Exemple 76. Etant donnés : $D = 80$ mm ; $d = 20$ mm ; $\alpha = 15°$; $n = 10$ spires ; $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, $[\sigma] = 6\,000$ kgf/cm^2 (fig. 144) ;

calculer P et δ.

Solution. Puisque $\alpha > 14°$, on utilise la formule (157), et l'on détermine la valeur de la force admissible:

$$P \leqslant \frac{\pi \cdot 2^3 \cdot 6\,000}{16 \cdot 8 \sqrt{\left(1+\frac{2}{4 \cdot 8}\right)^2 0{,}067 + \left(1+\frac{2}{2 \cdot 8}\right) 0{,}933}} \approx 1\,050 \text{ kgf}.$$

D'après la formule (161), on calcule le déplacement axial δ. de l'extrémité libre du ressort. En y reportant les valeurs numériques données, on obtient:

$$\delta = \frac{8 \cdot 1\,050 \cdot 8^3 \cdot 10}{2^4 \cdot 0{,}966}\left[2\left(1+\frac{2^2}{4 \cdot 8^2}\right)\frac{0{,}067}{2 \cdot 10^6} + \left(1+\frac{2^2}{2 \cdot 8^2}\right)\frac{0{,}933}{8 \cdot 10^5}\right] \approx$$

$$\approx 3{,}54 \text{ cm}.$$

Si on utilisait la formule approchée (162), on aurait:

$$\delta = \frac{8 \cdot 1\,050 \cdot 8^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 2^4} = 3{,}36 \text{ cm}.$$

Cette valeur est inférieure à la valeur réelle du déplacement d'à peu près 5 %.

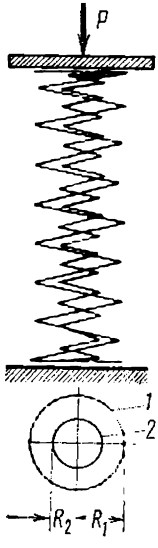


Fig. 145

Exemple 77. Deux ressorts cylindriques hélicoïdaux de faible pas sont montés l'un dans l'autre concentriquement (fig. 145). Ils sont soumis à une force compressive $P = 430$ kgf. Pour le ressort extérieur 1 on a: $D_1 = 160$ mm; $d_1 = 16$ mm; $n_1 = 8$ spires. Pour le ressort intérieur 2 on a: $D_2 = 80$ mm; $d_2 = 12$ mm; $n_2 = 12$ spires. Le module d'élasticité transversale du matériau des tiges des ressorts $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2.

Calculer l'abaissement δ des ressorts et les contraintes de cisaillement maximales τ_{max_1} et τ_{max_2}.

Solution. Si P_1 et P_2 sont les forces agissant sur les ressorts, la condition de la statique donne: $P_1 + P_2 = P$.

La condition de compatibilité des déplacements est exprimée par l'égalité des abaissements δ_1 et δ_2 du premier et du second ressort, c'est-à-dire par $\delta_1 = \delta_2$.

Puisque les deux ressorts ont un faible pas, pour le calcul de l'abaissement on utilise la formule (162), et on écrit la condition de compatibilité sous la forme:

$$\frac{8P_1D_1^3n_1}{Gd_1^4} = \frac{8P_2D_2^3n_2}{Gd_2^4},$$

d'où

$$P_2 = P_1 \frac{D_1^3 n_1 d_2^4}{D_2^3 n_2 d_1^4} = P_1 \frac{16^3 \cdot 8 \cdot 1{,}2^4}{8^3 \cdot 12 \cdot 1{,}6^4} = \frac{27}{16} P_1.$$

Donc :

$$P_1 = \frac{16}{43} P = 160 \text{ kgf}, \quad P_2 = \frac{27}{43} P = 270 \text{ kgf}.$$

L'abaissement des ressorts sera :

$$\delta = \frac{8 P_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8 P_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4} = \frac{8 \cdot 160 \cdot 16^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^5 \cdot 1{,}6^4} = 8 \text{ cm}.$$

Puisque le ressort extérieur a un faible pas et $\frac{D_1}{d_1} = 10$, on détermine la contrainte de cisaillement maximale d'après la formule (158) :

$$\tau_{\max_1} = \frac{8 \cdot 160 \cdot 16}{\pi \cdot 1{,}6^3} \approx 1\,590 \text{ kgf/cm}^2.$$

Le ressort intérieur a un faible pas, mais $\frac{D_2}{d_2} = \frac{8}{1{,}2} \approx 6{,}67 < 10$, et, par conséquent, on détermine $\tau_{\max_2}$ selon la formule (160).

Le facteur correctif :

$$k = \frac{6{,}67 - 0{,}25}{6{,}67 - 1} + \frac{0{,}615}{6{,}67} \approx 1{,}224,$$

donc :

$$\tau_{\max_2} = 1{,}224 \frac{8 \cdot 270 \cdot 8}{\pi \cdot 1{,}2^3} \approx 3\,900 \text{ kgf/cm}^2.$$

Problème 699. On comprime un ressort jusqu'à ce que l'espace entre les spires se ferme. Calculer la valeur de la force nécessaire P et de la contrainte $\tau_{\max}$ si $D = 50$ mm, le pas de la spire $t = 15$ mm, $n = 10$, la longueur du côté de la section carrée de la tige du ressort $a = 5$ mm, $G = 8 \cdot 10^4$ MN/m^2.

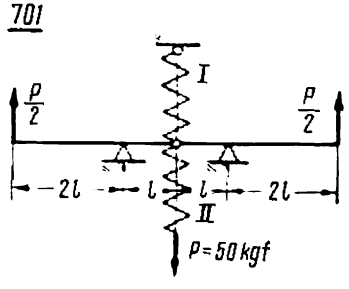
Problème 700. Deux ressorts sont comprimés avec une force de même grandeur P.

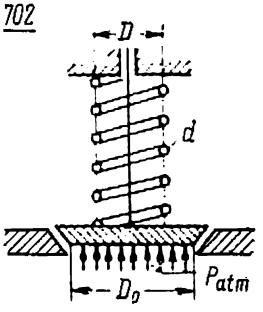
Calculer les rapports $\frac{\tau_{\max_1}}{\tau_{\max_2}}$ et $\frac{\delta_1}{\delta_2}$, si $D_1 = D_2$, $n_1 = n_2$, $\frac{\pi d_1^2}{4} = a^2$ et $G_1 = G_2$.

Problème 701. Etant donnés : $D_1 = D_2 = 200$ mm, $d_1 = 2d_2 = 20$ mm, $n_1 = 8$, $n_2 = 5$, $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, $l \gg \delta_1$; calculer $\max \tau_1$, $\max \tau_2$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Problème 702. La soupape de sûreté doit s'ouvrir à la pression de vapeur $p = 5$ atm. Calculer τ_{max} pour le ressort, ainsi que n et δ_0 si $D_0 = 80$ mm; $D = 60$ mm, $d = 10$ mm, $t = 18$ mm, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2. Le déplacement du ressort jusqu'à fermeture complète de l'espace entre les spires est 40 mm.

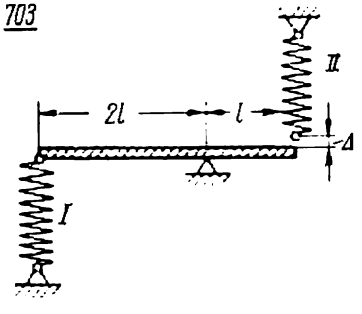
On suppose qu'à l'ouverture maximale de la soupape (quand la pression augmente au fur et à mesure qu'elle s'ouvre) le ressort doit avoir un déplacement de réserve de 20 mm.

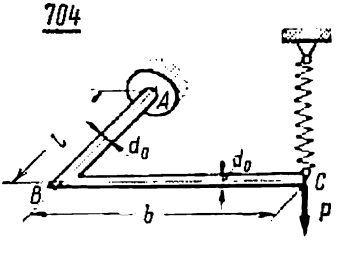




Problème 703. Calculer les contraintes, dues au montage, dans les ressorts, si $\Delta = 5$ mm, $D_1 = 60$ mm, $d_1 = 10$ mm, $n_1 = 10$, $D_2 = 50$ mm, $d_2 = 8$ mm, $n_2 = 8$, $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2.

Problème 704. Calculer d'après la troisième hypothèse de résistance la force admissible P, si pour la barre ABC $l = 500$ mm, $b = 750$ mm, $d_0 = 30$ mm, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2; pour le ressort $D = 50$ mm, $d = 10$ mm, $n = 10$, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $[\tau] = 4\,000$ kgf/cm^2.

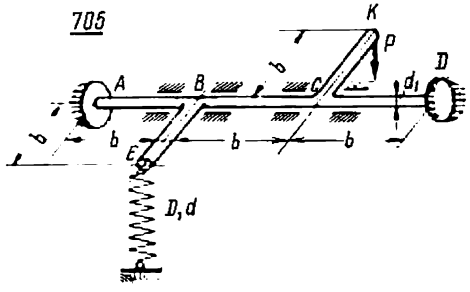


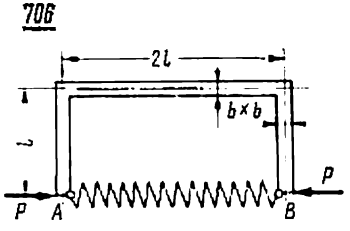


Problème 705. On a: $D = 50$ mm, $d = 10$ mm, $n = 2$, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, $d_1 = 50$ mm, $b = 500$ mm, $P = 100$ kgf. La barre BE est parfaitement rigide.

Calculer en pour-cent de combien le ressort abaisse la contrainte dans l'arbre AD.

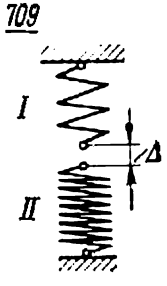
Problème 706. Calculer la force P avec laquelle le ressort doit être précomprimé pour qu'après l'avoir placé dans le portique, la contrainte y soit 2 fois moindre. On prendra : $P = 1{,}6$ kN, $D = 60$ mm, $d = 12$ mm, $n = 15$, $G = 8 \cdot 10^4$ MN/m^2, $l = 500$ mm, $b = 50$ mm, $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m^2.





Problème 707. Etant donnés : $P = 105$ kgf, $D = 100$ mm, $t = 182$ mm, $[\sigma] = 4\,800$ kgf/cm^2, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, l'abaissement admissible $[\delta] = 100$ mm ;

calculer d et n à l'aide de la quatrième hypothèse de résistance.



Problème 708. Calculer, à l'aide de la troisième hypothèse de résistance, la force P, si $D = 100$ mm, $a = 10$ mm, $t = 182$ mm, $[\sigma] = 4\,800$ kgf/cm^2.

Problème 709. Calculer l'effort axial P dans les ressorts après leur liaison, si $\Delta = 60$ mm, le ressort I a un grand pas avec $D_1 = 100$ mm, $d_1 = 10$ mm, $n_1 = 4$, $t_1 = 182$ mm ; le ressort II a un faible pas avec $D_2 = 80$ mm, $d_2 = 8$ mm, $n_2 = 8$, $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2.

X. LE FLAMBEMENT

§ 1. Force critique et contrainte critique

Quand une barre prismatique est comprimée suivant son axe dans les limites de proportionnalité, on détermine la valeur de la force critique P_{cr} par la formule d'Euler :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \tag{163}$$

où E est le module d'élasticité longitudinale ;

I le moment d'inertie minimum de l'aire brutto F de la section droite de la barre ;

$L = \mu l$ la longueur libre de voilement (c'est la longueur d'une barre, articulée à ses extrémités, et qui est équivalente au point de vue stabilité à une barre de liaisons données) ;

l la longueur vraie de la barre ;

μ est un coefficient numérique, dépendant des conditions aux limites et des modes de chargement de la barre.

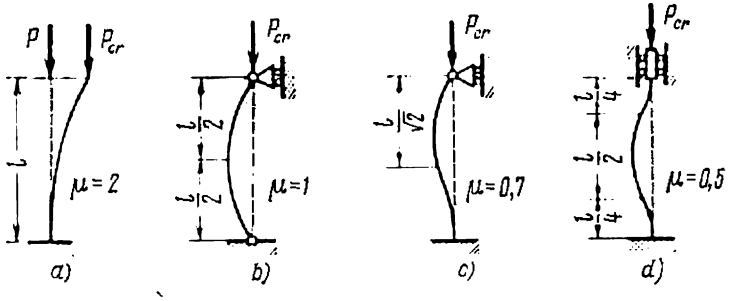


Fig. 146

Les cas les plus simples de compression des barres et les valeurs correspondantes du coefficient numérique μ sont indiqués fig. 146.

La valeur de la contrainte critique σ_{cr} est donnée par la formule :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{164}$$

où $\lambda = \frac{L}{i}$ est l'élancement de la barre (quantité abstraite caractérisant la tendance de la barre au flambement); $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ le rayon minimal d'inertie de l'aire F de la section droite de la barre.

Puisque la contrainte critique σ_{cr} ne doit pas dépasser la limite de proportionnalité σ_p du matériau de la barre, on choisit la valeur de l'élancement λ pour laquelle les formules (163) et (164) sont valables d'après l'inégalité:

$$\lambda \geqslant \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \tag{165}$$

Par exemple, pour l'acier Ac 3, $\lambda \geqslant 100$; pour l'acier Ac 5 $\lambda \geqslant 85$; pour la fonte $\lambda \geqslant 80$; pour le bois $\lambda \geqslant 70$, etc.

Quand le flambement de la barre a lieu seulement au-delà de la limite de proportionnalité du matériau de la barre, la contrainte critique peut être calculée par la formule empirique de Jassinski:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2, \tag{166}$$

où a, b, c sont des coefficients expérimentaux qui dépendent du matériau et ont la dimension d'une contrainte.

Pour l'acier Ac 3: $a = 3\,100$ kgf/cm^2, $b = 11{,}4$ kgf/cm^2, $c = 0$.

Pour l'acier Ac 5: $a = 4\,640$ kgf/cm^2, $b = 36{,}17$ kgf/cm^2, $c = 0$.

Pour la fonte: $a = 7\,760$ kgf/cm^2, $b = 120$ kgf/cm^2, $c = 0{,}53$ kgf/cm^2.

Pour le bois: $a = 293$ kgf/cm^2, $b = 1{,}94$ kgf/cm^2, $c = 0$.

La formule (166) peut être appliquée quand σ_{cr} est plus petit que $\sigma_{éc}$ (limite d'écoulement) pour les matériaux plastiques et plus petit que la limite de résistance pour les matériaux fragiles.

Exemple 78. Calculer P_{cr} et σ_{cr}. On prendra: $E = 0{,}71 \cdot 10^5$ MN/m^2, $\sigma_p = 180$ MN/m^2 (le matériau de la barre est le dural), $l = 1{,}2$ m, $D = 4$ cm, $d = 3$ cm (fig. 147).

Solution. Le moment d'inertie de la section circulaire annulaire de la barre est:

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(256 - 81) = \frac{175}{64}\pi \text{ cm}^4.$$

L'aire de la section droite de la barre:

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(16 - 9) = \frac{7}{4}\pi \text{ cm}^2.$$

Le rayon d'inertie de la section:

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{175 \cdot 4}{64 \cdot 7}} = \frac{5}{4} \text{ cm}.$$

Pour le mode de liaisons des extrémités de la barre considérée le coefficient numérique $\mu = 0{,}7$.

Puisque l'élancement de la barre:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0{,}7 \cdot 120 \cdot 4}{5} = 67{,}2 > \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \approx 3{,}14 \sqrt{\frac{0{,}71 \cdot 10^5}{180}} \approx 62,$$

la force critique peut être déterminée par la formule d'Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}71 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 175\pi \cdot 10^{-8}}{64\,(0{,}7 \cdot 1{,}2)^2} =$$

$$= 85{,}3 \cdot 10^3 \text{ N} = 85{,}3 \text{ kN}.$$

La contrainte critique est:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{F} = \frac{85{,}3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4}{7\pi} = 155 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 155 \text{ MN/m}^2.$$

Exemple 79. Calculer P_{cr} et σ_{cr} sachant que le matériau de la barre est la fonte, $l = 1{,}6$ m, $d = 6$ cm, $t = 1$ cm (fig. 148).

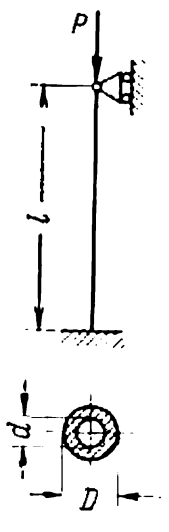


Fig. 147

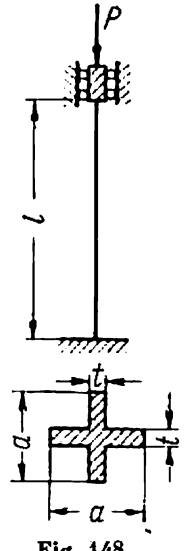


Fig. 148

Solution. Le moment d'inertie de la section cruciforme de la barre est:

$$I = \frac{ta^3}{12} + \frac{(a-t)\,t^3}{12} = \frac{1 \cdot 6^3}{12} + \frac{5 \cdot 1}{12} = \frac{221}{12} \text{ cm}^4$$

L'aire de la section droite de la barre est:

$$F = at + (a-t)\,t = 6 + 5 = 11 \text{ cm}^2.$$

Le rayon d'inertie est :

$$i = \sqrt{\frac{221}{12 \cdot 11}} \approx 1{,}294 \text{ cm}.$$

Pour le mode de liaisons des extrémités de la barre $\mu = 0{,}5$. Puisque l'élancement de la barre $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{160}{2 \cdot 1{,}294} \approx 61{,}8 <$ < 80, la contrainte critique doit être calculée à l'aide de la formule empirique :

$$\sigma_{cr} = 7\,760 - 120\lambda + 0{,}53\lambda^2 = 7\,760 - 120 \cdot 61{,}8 + 0{,}53 \cdot 61{,}8^2 \approx$$
$$\approx 2\,370 \text{ kgf/cm}^2.$$

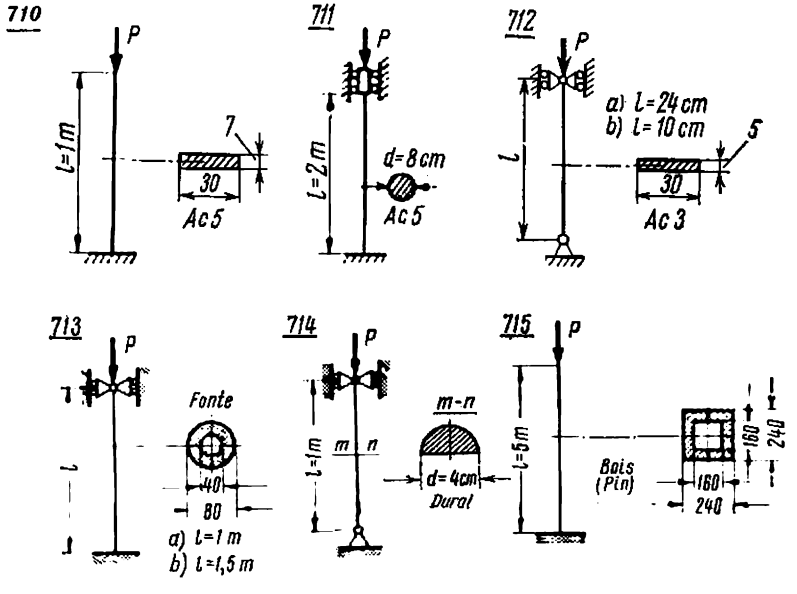
La valeur de la force critique est égale à :

$$P_{cr} = \sigma_{cr} F = 2\,370 \cdot 11 = 26\,100 \text{ kgf}.$$

Problèmes 710-715. Calculer les valeurs des forces critiques P_{cr} et des contraintes critiques σ_{cr} pour les barres comprimées.

Pour les matériaux, on prendra les valeurs arrondies suivantes de modules d'élasticité longitudinale E et de limites de proportionnalité σ_p.

Matériau	Ac 3	Ac 5	Fonte	Dural	Bois (pin)
E kgf/cm²	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$0{,}7 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^5$
σ_p kgf/cm²	2 000	2 400	1 800	1 700	200



§ 2. Calcul des barres comprimées à la stabilité

Quand on calcule une barre comprimée, outre la condition de résistance, on doit vérifier la condition de stabilité:

$$P \leqslant \frac{P_{cr}}{[n_{st}]} \tag{167}$$

ou

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqslant [\sigma_{st}]. \tag{167'}$$

Dans ces expressions P_{cr} est la force critique, définie, selon l'élancement, par la formule d'Euler (163) ou par la formule de Jassinski (166), c'est-à-dire par l'expression: $P_{cr} = \sigma_{cr} F = (a - b\lambda + c\lambda^2) F$; $[\sigma_{st}] = \frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]}$ est la contrainte admissible de stabilité; $[n_{st}]$ un coefficient de sécurité admissible vis-à-vis de la stabilité. Ce coefficient est toujours un peu plus grand que le coefficient de sécurité de base, car quand on calcule les barres comprimées suivant l'axe à la stabilité, il faut tenir compte de circonstances supplémentaires, inévitables en pratique (l'excentricité de l'application des forces de compression, la courbure initiale de la barre et l'hétérogénéité du matériau de la barre) et qui favorisent le flambement.

Les excentricité et courbure initiale importantes sont calculées spécialement; les petites excentricité et courbure initiale ne se prêtant pas au calcul sont prises en considération par un coefficient de sécurité supplémentaire, c'est-à-dire par une augmentation de la valeur du coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité. On prend: pour l'acier $[n_{st}] = 1{,}8\text{-}3$; pour la fonte $[n_{st}] = 5\text{-}5{,}5$; pour le bois $[n_{st}] = 2{,}8\text{-}3{,}2$.

Le rapport $\frac{[\sigma_{st}]}{[\sigma_c]} = \varphi$ s'appelle *coefficient de réduction de la contrainte admissible de flambement* ou *coefficient de flambement.*

Les valeurs de φ en fonction de λ pour les différents matériaux sont données ou bien sous forme de courbes normatives, ou bien sous forme de tables (appendice 3).

Le calcul de stabilité peut être effectué en deux variantes (par deux méthodes).

1. Quand le coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité $[n_{st}]$ est donné dans les conditions du problème.

2. A l'aide des tables des coefficients de réduction $\varphi(\lambda)$.

La première méthode n'est pas suffisamment exacte, car strictement parlant, la valeur du coefficient de sécurité ne peut être donnée

exactement *a priori*, puisqu'elle dépend de l'élancement de la barre. On emploie cette méthode dans les calculs approximatifs de contrôle et aussi dans les cas où l'on n'a pas de tables et de graphiques de $\varphi(\lambda)$ (par exemple, dans le cas de matériaux nouveaux, ou quand on emploie des barres avec des élancements plus grands que les valeurs recommandées).

La seconde méthode est applicable dans tous les cas, c'est la méthode fondamentale de calcul des barres à la stabilité. Le calcul s'effectue alors à partir de l'équation :

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqslant \varphi [\sigma_c], \qquad (167'')$$

d'après les tables des coefficients φ seulement, sans recours à la formule d'Euler ni à la formule empirique de Jassinski.

Calcul de la force admissible

Si l'on connaît : la longueur l, le mode de liaisons des extrémités (μ), la forme et les dimensions de la section droite (F, l, i) et le matériau (E, $[\sigma_c]$) de la barre à calculer, on peut déterminer la valeur de la force compressive admissible $[P]$ par l'une des méthodes suivantes.

Première méthode de calcul (quand $[n_{st}]$ est donné) : 1. On détermine l'élancement de la barre $\lambda = \frac{\mu l}{i}$. 2. On calcule la force critique P_{cr} ($P_{cr} = \sigma_{cr} F$) selon la formule d'Euler (163) ou de Jassinski (166), si la condition (165) n'est pas vérifiée. 3. A l'aide de la formule (167), on trouve la force admissible $[P] = \frac{P_{cr}}{[n_{st}]}$.

Notons que si $[n_{st}]$ n'est pas donné, on peut le choisir approximativement suivant le matériau de la barre, sa destination et la valeur de l'élancement λ.

Seconde méthode de calcul (à l'aide des tables de $\varphi(\lambda)$). 1. On calcule $\lambda = \frac{\mu l}{i}$. 2. On établit la valeur du coefficient de flambement φ d'après la courbe normative ou les tables de $\varphi(\lambda)$ et les formules d'interpolation. 3. On détermine la force compressive admissible $[P] = [\sigma_{st}] F = \varphi [\sigma_c] F$.

Vérification de la stabilité des barres

Elle s'effectue en deux variantes comme pour le calcul de la force admissible à partir des équations (167') et (167'').

Choix de la section droite

Si l'on connaît la force compressive P, la longueur l, le mode de liaison des extrémités (μ), le matériau (E, $[\sigma_c]$) et la forme de la section de la barre à calculer, la condition de stabilité (167″) reste indéfinie, puisque si l'on ne connaît pas les dimensions de la section, on ne peut déterminer λ et, par conséquent, φ. On ne peut de même utiliser (pour un coefficient de sécurité $[n_{st}]$ donné) l'équation (167), puisqu'on ne sait pas laquelle des deux formules (163) ou (166) employer pour déterminer P_{cr}. Le choix de la section doit se faire par essais suivis de vérification (par l'une des trois variantes).

La *première variante de calcul* (avec $[n_{st}]$ donné) est rarement utilisée à cause de son insuffisante précision due au fait que la quantité $[n_{st}]$, donnée indépendamment de la quantité λ (qui est encore inconnue), est trop incertaine. Dans ce cas, on commence le calcul en admettant, comme essai, que la formule d'Euler (163) est valable.

On trouve le moment d'inertie I, puis F, i, λ. Si λ s'avère plus grand que λ_0, le calcul est terminé, si λ est plus petit que λ_0, on refait le calcul en partant de la formule de Jassinski (166).

La *seconde variante de calcul* à l'aide des tables et des graphiques de φ (λ) s'effectue dans l'ordre suivant:

1. On se donne la valeur du coefficient $\varphi = 0{,}6\text{-}0{,}8$.
2. On établit les valeurs de $[\sigma_{st}]$, $F = \dfrac{P}{[\sigma_{st}]}$ et on choisit les dimensions de la section droite ou le numéro du profil (si la barre est d'acier laminé).
3. On trouve I, i et λ.
4. On détermine la nouvelle valeur φ_1. Si la différence entre φ_1 et φ est importante, on prend comme second essai $\varphi_2 = \dfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$ et on répète le calcul.

On admet que le choix de la section est satisfaisant, si la différence entre σ et $[\sigma_{st}]$ n'excède pas 5 %.

Pour les barres laminées standards, la sous-tension peut être supérieure à 5 %.

La *troisième variante de calcul* (mixte). Dans cette variante le premier essai est pris éventuellement de la formule d'Euler en se donnant la valeur du coefficient n_{st}; le choix final est fait à partir de la condition de stabilité (167″).

Dans ce cas le calcul est effectué dans l'ordre suivant:

1. Suivant le matériau de la barre, on se donne la valeur du coefficient n_{st} (pour l'acier $n_{st} \approx 2$, pour la fonte $n_{st} \approx 5$, pour le bois $n_{st} \approx 3$).
2. A l'aide de la formule (163) on trouve le moment d'inertie minimal de la section droite.
3. On choisit les dimensions de la section ou on trouve le numéro du profil (pour les barres laminées); on calcule F, i, λ.

4. On détermine la valeur du coefficient φ, puis celle de $[\sigma_{st}]$.

5. On établit la condition de stabilité (167'').

6. Si la condition (167'') n'est pas vérifiée, on recherche la section qui convient en variant ou bien la valeur du coefficient φ (voir seconde variante de calcul), ou bien les dimensions de la section (les numéros du profil pour les barres laminées).

Dans les calculs pratiques de stabilité, il n'est pas recommandé de prendre des barres dont les élancements sont plus grands que l'élancement maximal indiqué dans les normes pour le coefficient φ. Si, néanmoins, il est nécessaire de déterminer la force admissible ou de choisir la section d'une barre, dont l'élancement est plus grand que l'élancement recommandé dans les normes, le calcul doit être effectué à l'aide de la formule d'Euler en choisissant la valeur du coefficient de sécurité.

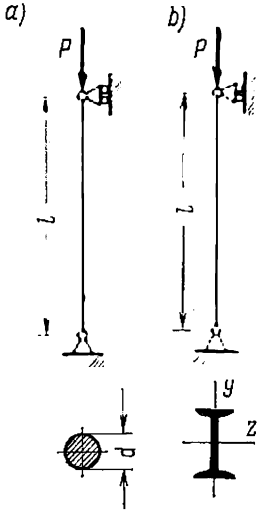


Fig. 149

Exemple 80. Etant donnés: $l = 2$ m, $\mu = 1$, $d = 10$ cm (fig. 149,*a*);

calculer P. Le matériau de la barre est le pin: $[\sigma] = 100$ kgf/cm^2 (suivant les fibres).

Solution. Pour une section circulaire on a:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5\,\text{cm}.$$

L'élancement de la barre est:

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{200}{2{,}5} = 80.$$

D'après les tables, pour le bois, quand $\lambda = 80$, $\varphi = 0{,}48$.

Par conséquent, $[\sigma_{st}] = \varphi\,[\sigma] = 0{,}48 \cdot 100 = 48$ kgf/cm^2 et la force admissible sera:

$$P = [\sigma_{st}]\,F = 48\,\frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 3\,770\ \text{kgf}.$$

Etablissons la valeur du coefficient de sécurité du poteau. Puisque $\lambda = 80 > 70$, selon la formule (164) on a:

$$\sigma_{cr} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^5}{80^2} = 156\ \text{kgf/cm}^2 \text{ et } n_{st} = \frac{\sigma_{cr}}{[\sigma_{st}]} = \frac{156}{48} = 3{,}25.$$

Exemple 81. Etant donnés: un poteau d'acier laminé de profil en double té avec $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2, $P = 40$ t, $l = 2$ m (fig. 149,*b*);

déterminer le numéro de la barre en double té.

Solution. On se donne la valeur $\varphi = 0{,}6$. Alors:

$$[\sigma_{st}] = \varphi[\sigma] = 0{,}6 \cdot 1\,600 = 960 \text{ kgf/cm}^2$$

et

$$F = \frac{P}{[\sigma_{st}]} = \frac{40 \cdot 10^3}{960} \approx 41{,}7 \text{ cm}^2.$$

D'après le catalogue de l'assortiment, la poutre en double té N° 27 est la plus proche de ces valeurs. Pour cette poutre $F = 40{,}2$ cm^2, $i_y = 2{,}54$ cm.

L'élancement du poteau $\lambda = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 1200}{2{,}54} = 78{,}7$.

Selon les tables pour l'acier Ac 3: $\lambda = 70$; $\varphi = 0{,}81$; $\lambda = 80$; $\varphi = 0{,}75$; donc, pour $\lambda = 78{,}7$:

$$\varphi_1 = 0{,}75 + 0{,}006 \cdot 1{,}3 = 0{,}758.$$

On prend:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0{,}6 + 0{,}758}{2} = 0{,}679.$$

Alors:

$$[\sigma_{st}] = 0{,}679 \cdot 1\,600 = 1\,086 \text{ kgf/cm}^2 \text{ et } F = \frac{40 \cdot 10^3}{1\,086} \approx 36{,}8 \text{ cm}^2.$$

D'après le catalogue de l'assortiment, la poutre en double té N° 24 est la plus proche de ces valeurs. Pour cette poutre $F = 34{,}8$ cm^2, $i_y = 2{,}37$ cm.

L'élancement du poteau $\lambda = \frac{200}{2{,}37} \approx 84{,}5$.

Selon les tables pour l'acier Ac 3: $\lambda = 80$; $\varphi = 0{,}75$; $\lambda = 90$; $\varphi = 0{,}69$. Pour $\lambda = 84{,}5$:

$$\varphi_3 = 0{,}69 + 0{,}006 \cdot 5{,}5 = 0{,}723.$$

La contrainte admissible est:

$$[\sigma_{st}] = 0{,}723 \cdot 1\,600 = 1\,157 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte développée dans le poteau:

$$\sigma = \frac{40 \cdot 10^3}{34{,}8} \approx 1\,150 \text{ kgf/cm}^2.$$

La surtension est de:

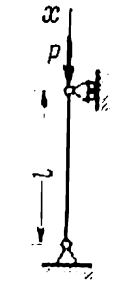
$$\frac{\sigma - [\sigma_{st}]}{[\sigma_{st}]} \cdot 100 = \frac{70 \cdot 100}{1\,157} \approx 0{,}8\%.$$

Etablissons pour le poteau étudié la valeur du coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité.

Puisque $\lambda = 84{,}5 < 100$, selon la formule (166) on a:

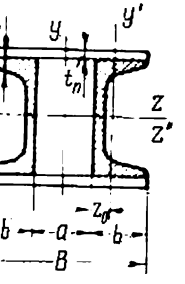
$$\sigma_{cr} = 3\,100 - 11{,}4 \cdot 84{,}5 = 2\,137 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$n_{st} = \frac{2\,137}{1\,150} \approx 1{,}86.$$



Exemple 82. Soient: une colonne composée de deux poutres en U avec des planchettes de liaison soudées et $P = 35$ t, $l = 6$ m, $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm² (fig. 150).

Déterminer le numéro de la poutre en U et les valeurs de B et l_0.



S o l u t i o n. Si l'on augmente la distance a entre les poutres en U, le moment d'inertie I_{st} de la section de la colonne par rapport à l'axe y, perpendiculaire au plan des planchettes, croît. Le moment d'inertie I_z de la section de la colonne par rapport à l'axe z ne variera pas et sera égal à $I_z = 2I_{z'}$ où $I_{z'}$ est le moment d'inertie de la section d'une branche de la colonne par rapport à l'axe central z' de la poutre en U, coïncidant avec l'axe z. Donc, comme valeur minimale du moment d'inertie de la section droite de la colonne on prendra I_z.

On se donne $n_{st} = 2$. Selon la formule d'Euler, on a:

$$I_{z'} = \frac{Pl^2 n_{st}}{2\pi^2 E} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 36 \cdot 10^4 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^6} = 630 \text{ cm}^4.$$

D'après le catalogue de l'assortiment des poutres laminées la poutre en U N° 14a pour laquelle $I_{z'} = 545$ cm⁴, $i_{z'} = 5{,}66$ cm, $F = 17{,}0$ cm² est la plus proche de cette valeur.

L'élancement de la colonne est:

$$\lambda = \frac{l}{i_{z'}} = \frac{600}{5{,}66} \approx 106.$$

D'après les tables, pour l'acier Ac 3: $\lambda = 100$, $\varphi = 0{,}60$, $\lambda = 110$, $\varphi = 0{,}52$.

Pour $\lambda = 106$:

$$\varphi = 0{,}52 + 0{,}008 \cdot 4 = 0{,}552.$$

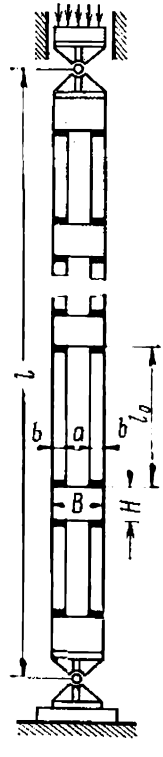


Fig. 150

La contrainte admissible est :

$$[\sigma_{st}] = 0{,}552 \cdot 1\,600 = 883 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte dans la colonne est :

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{35 \cdot 10^3}{2 \cdot 17{,}0} = 1\,029 \text{ kgf/cm}^2$$

La surtension serait de :

$$\frac{1\,029 - 883}{1\,029} \cdot 100\% = 14{,}2\% > 5\%,$$

ce qui n'est pas admissible.

On choisit la poutre en U N° 16. Pour celle-ci $I_{z'} = 747$ cm^4, $i_{z'} = 6{,}42$ cm, $F = 18{,}1$ cm^2, $I_{y'} = 63{,}3$ cm^4, $i_{y'} = 1{,}87$ cm, $b = 6{,}4$ cm, $t = 0{,}84$ cm, $z_0 = 1{,}80$ cm.

L'élancement de la colonne sera :

$$\lambda = \frac{600}{6{,}42} \approx 93{,}5.$$

D'après les tables, pour l'acier Ac 3 : $\lambda = 90$, $\varphi = 0{,}69$, $\lambda = 100$, $\varphi = 0{,}60$.

Pour $\lambda = 93{,}5$

$$\varphi = 0{,}60 + 0{,}009 \cdot 6{,}5 = 0{,}658.$$

La contrainte admissible sera :

$$[\sigma_{st}] = 0{,}658 \cdot 1\,600 \approx 1\,051 \text{ kgf/cm}^2$$

La contrainte agissant dans la colonne est :

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{35 \cdot 10^3}{2 \cdot 18{,}1} \approx 967 \text{ kgf/cm}^2.$$

La sous-tension est de :

$$\frac{1\,051 - 967}{1\,051} \cdot 100\% = 7{,}99\%.$$

On choisit les poutres en U N° 16. Puisque $\lambda = 93{,}5 < 100$, on a :

$$\sigma_{cr} = 3\,100 - 11{,}4\lambda \approx 2\,034 \text{ kgf/cm}^2,$$

et le coefficient de sécurité de la colonne sera :

$$n_{st} = \frac{2\,034}{967} \approx 2{,}1.$$

De la condition d'égale stabilité de la colonne dans les plans principaux d'inertie xy et xz on établit la distance rationnelle a entre les deux branches de la colonne.

Puisque les deux branches de la colonne sont liées par des planchettes qui ne sont pas parfaitement rigides, il est recommandé de prendre $I_y = (1{,}15 \div 1{,}2)\, I_z$.

On prend $I_y = 1{,}15\ I_z$. Alors

$$1{,}15 I_{z'} = I_{y'} + \left(z_0 + \frac{a}{2}\right)^2 F,$$

$$a = 2\left(\sqrt{\frac{1{,}15 I_{z'} - I_{y'}}{F}} - z_0\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1{,}15 \cdot 747 - 63{,}3}{18{,}1}} - 1{,}80\right) = 9{,}66 \approx 10\,\text{cm}$$

et la longueur cherchée des planchettes sera:

$$B = a + 2b = 10 + 2 \cdot 6{,}4 = 22{,}8\,\text{cm}.$$

Pour assurer la stabilité d'une branche de la colonne dans son plan de rigidité minimale xz', la distance l_t entre les planchettes de liaison théoriquement doit être telle que l'élancement de toute la colonne soit égal à l'élancement du tronçon de la branche de la colonne entre les planchettes, c'est-à-dire telle que:

$$\frac{l}{i_z} = \frac{l_t}{i_{y'}}.$$

La longueur théorique du tronçon de la branche de la colonne d'après cette condition sera:

$$l_t = \frac{l}{i_z}\, i_{y'} = \lambda i_{y'} = 93{,}5 \cdot 1{,}87 = 175\ \text{cm}.$$

Auparavant, il était en pratique recommandé de prendre $l_0 = \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) l_t$. Selon les nouvelles normes, l'élancement des branches individuelles de la colonne λ_b entre les planchettes ne doit pas dépasser 40, c'est-à-dire que $l_0 \leqslant 40\ i_{y'}$. Dans le cas considéré:

$$l_0 = 40 \cdot 1{,}87 = 74{,}8\,\text{cm}.$$

Prenons $l_0 = 75$ cm. La longueur l de la colonne sera alors divisée par les planchettes en six tronçons égaux et une longueur de 24 cm restera pour les liaisons.

D'après des considérations d'ordre constructif, on peut prendre :

$$H = (0{,}6 \div 0{,}8)\,B,\quad l_0 - H = (3 \div 4)\,H \text{ et } t_p = (0{,}8 \div 1)\,t.$$

Pour le cas étudié, on prend :

$$H = 0{,}8B = 0{,}8 \cdot 22{,}8 = 18\,\text{cm} \text{ et } t_p \approx t \approx 0{,}8\,\text{cm}.$$

Généralement, on vérifie l'élancement pratique d'une colonne avec des planchettes de liaison ; on a pour une colonne composée de deux poutres en U ou de deux poutres en double té :

$$\lambda_p = \sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_b^2};$$

et pour une colonne composée de quatre cornières :

$$\lambda_p = \sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_{b_1}^2 + \lambda_{b_2}^2},$$

λ_c est l'élancement de la colonne par rapport à l'axe perpendiculaire au plan des planchettes ;

λ_{b_1}, λ_{b_2} les élancements des branches par rapport aux axes centraux propres, perpendiculaires aux plans des planchettes.

Effectuons cette vérification.

Pour toute la colonne on a :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{y'}}{F} + \left(z_0 + \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1{,}87^2 + (1{,}8 + 5)^2} \approx 7{,}05\,\text{cm},$$

$$\lambda_c = \frac{600}{7{,}05} = 85{,}1.$$

Pour la branche :

$$\lambda_b = \frac{l_0}{i_{y'}} = \frac{75}{1{,}87} = 40.$$

Donc :

$$\lambda_p = \sqrt{85{,}1^2 + 40^2} = 94{,}1.$$

D'après les tables pour l'acier Ac 3, par interpolation, on trouve pour $\lambda = 94{,}1$:

$$\varphi = 0{,}60 + 0{,}009 \cdot 4{,}1 = 0{,}637.$$

La contrainte admissible sera :

$$[\sigma_{st}] = 0{,}637 \cdot 1\,600 = 1\,019\ \text{kgf/cm}^2.$$

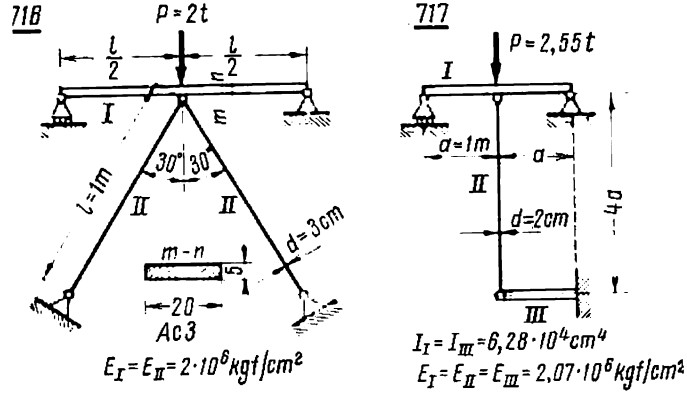
La sous-tension est de :

$$\frac{1\,019 - 967}{1\,019} \cdot 100\,\% = 5{,}1\,\%.$$

Par conséquent, la colonne est stable aussi par rapport à l'axe principal perpendiculaire aux planchettes.

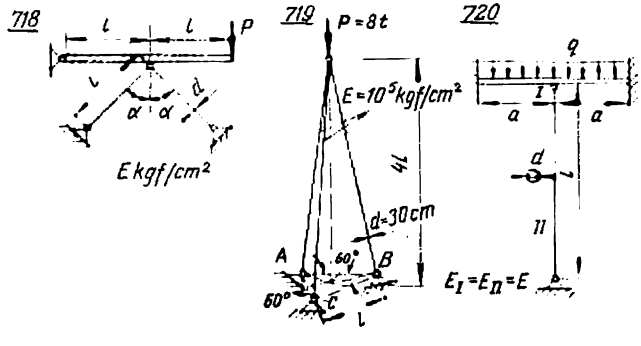
Notons que lorsque la condition $I_y = 1{,}2\ I_z$ est vérifiée et que $\lambda_b = 40$, les valeurs de λ_p et λ seront toujours très voisines l'une de l'autre.

Problèmes 716-717. Calculer les valeurs des coefficients de sécurité vis-à-vis de la stabilité n_{st} pour les barres comprimées des systèmes.



Problèmes 718-720. Déterminer pour quelle longueur l les systèmes deviennent instables.

Supposer que pour une charge donnée et pour des dimensions de la section droite des barres données les déformations sont inférieures à la limite de proportionnalité. Dans le problème 720 négliger la déformation de compression de la barre *II*, lors du calcul du système hyperstatique.

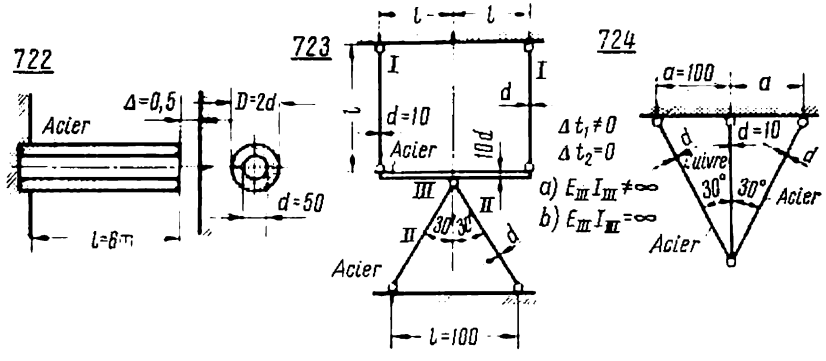


Problème 721. Calculer la longueur l pour laquelle le poteau comprimé d'acier Ac 3, de section circulaire de diamètre d, articulé à ses extrémités, devient instable. On prendra : $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\sigma_p = 1\,900$ kgf/cm², $\sigma_{éc} = 2\,400$ kgf/cm², a) $d = 1$ cm, $P = 1$ t ; b) $d = 1$ cm, $P = 1{,}8$ t.

Problèmes 722-724. Déterminer pour quelle élévation de température (Δt °C) les barres comprimées des systèmes deviennent instables.

On prendra : Acier : $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_p = 2\,000$ kgf/cm².

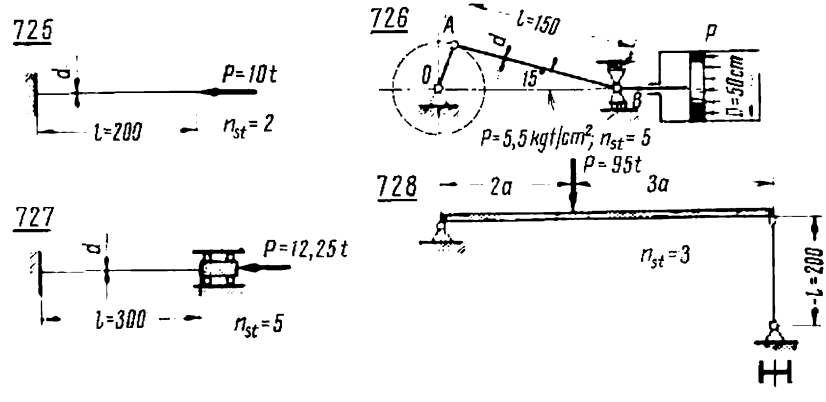
Cuivre : $E = 1 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\alpha = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_p = 1\,000$ kgf/cm².



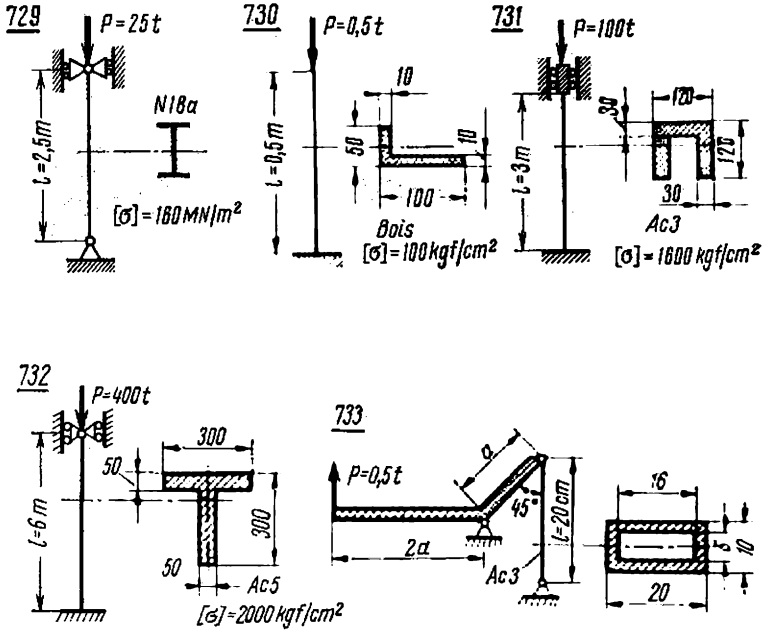
Problèmes 725-728. Choisir les sections droites des barres comprimées des systèmes d'après la valeur donnée du coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité n_{st}.

Toutes les barres comprimées sont en acier Ac 3 pour lequel $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\sigma_p = 2\,000$ kgf/cm².

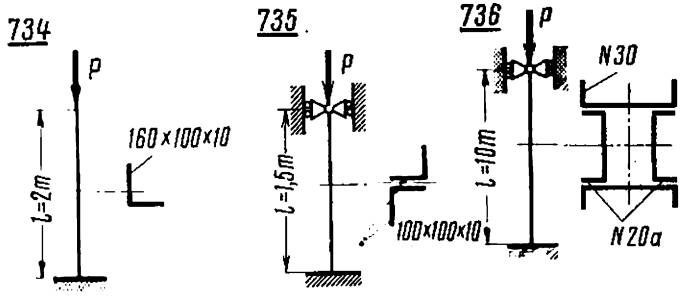
Dans le problème 726 supposer que la position indiquée pour la bielle est la plus dangereuse.



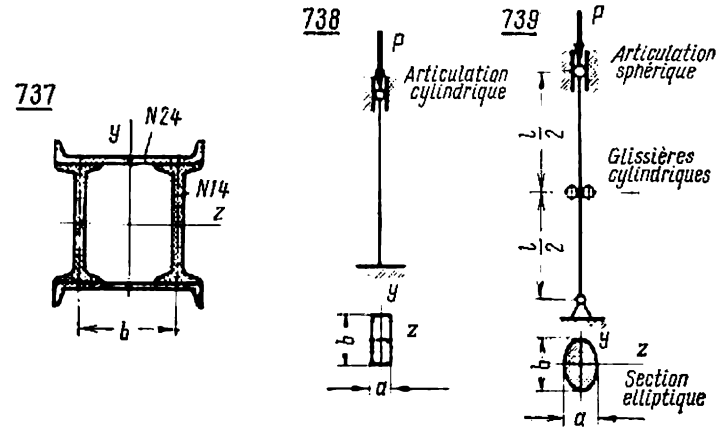
Problèmes 729-733. Vérifier la stabilité des barres comprimées et calculer en % leur surtension ou sous-tension. Ici et dans ce qui suit négliger dans les calculs les éventuelles déformations de torsion.



Problèmes 734-736. Déterminer la charge portée par la colonne. Le matériau de la colonne est Ac 3 $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm^2.

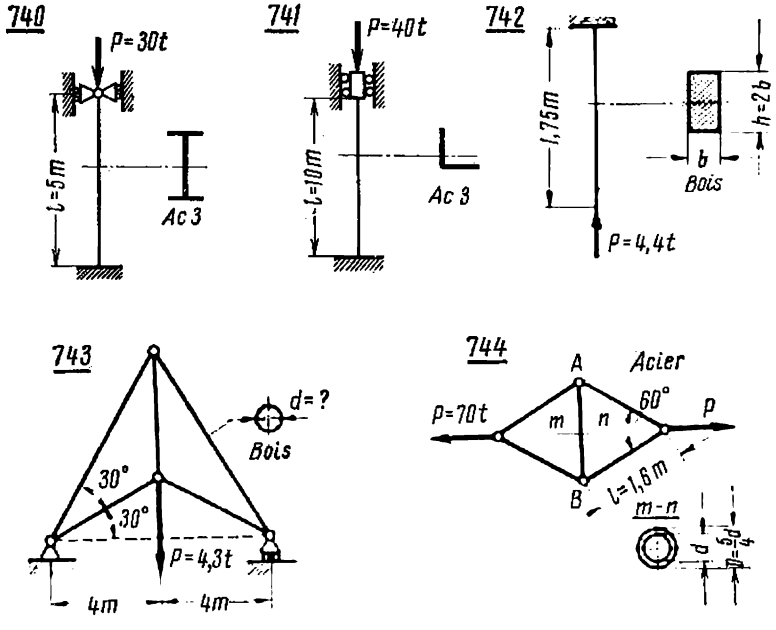


Problèmes 737-739. Calculer la dimension b des sections des colonnes d'après la condition d'égale stabilité par rapport aux axes z et y.



Problèmes 740-744. Choisir les dimensions transversales des colonnes et des barres comprimées des systèmes.

On prendra : pour l'acier Ac 3 $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm², pour le bois $[\sigma] = 100$ kgf/cm².

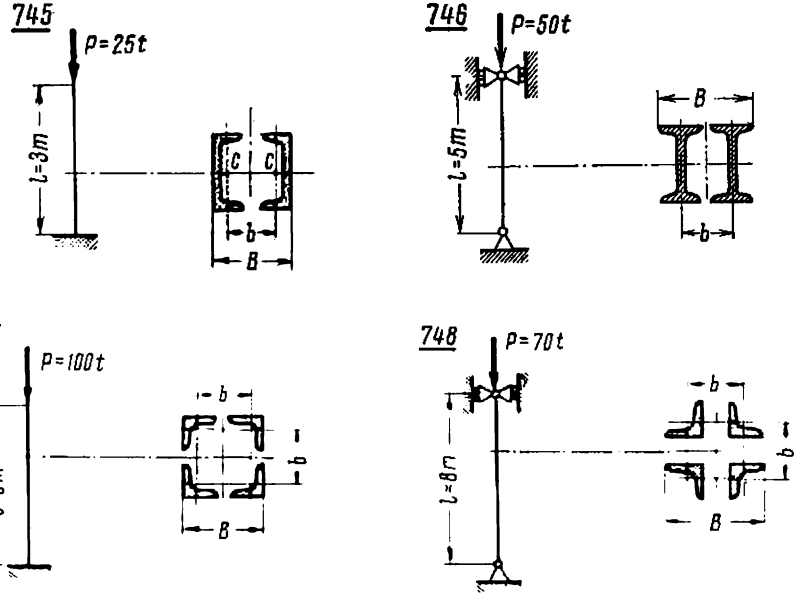


Problèmes 745-748. Déterminer pour les colonnes composées:

1) le numéro du profil d'une branche de la colonne;
2) la largeur de la section de la colonne b;

3) la distance l_0 entre les planchettes de liaison.

Pour le matériau des branches de la colonne on prendra: $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm².



§ 3. Flambement par flexion

Les barres soumises à des efforts longitudinaux et tranchants et à des moments sont calculées d'une manière approchée, en partant de l'hypothèse que la déformée de la barre est proche d'une sinusoïde.

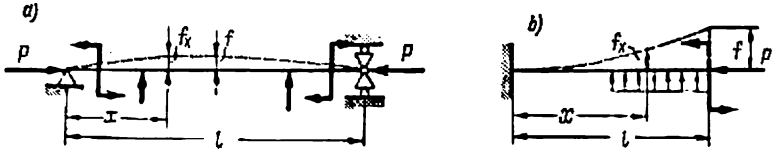


Fig. 151

Pour des barres articulées à leurs extrémités (fig. 151), essentiellement étudiées dans ce paragraphe, la sinusoïde est décrite par l'équation suivante:

$$f_x = f \sin \frac{\pi x}{l}. \qquad (168)$$

D'après ce calcul (envisagé aussi pour la résolution des problèmes proposés) les résultats les plus exacts s'obtiennent pour les barres articulées à leurs extrémités, pour une charge transversale dirigée dans une seule direction et symétrique par rapport à la section médiane de la barre.

Pour de telles barres la déformée due à la flexion transverse n'a pas de points d'inflexion, c'est-à-dire a une courbure univalente et, par conséquent, peut être représentée par la demi-sinusoïde (168).

Dans ce cas la flèche, dans la section médiane de la barre, sera:

$$f = \frac{f_m}{1 - \frac{P}{P_E}}. \qquad (168,a)$$

Le moment fléchissant maximal est:

$$M_{max} = M_m + Pf = M_m + \frac{Pf_m}{1 - \frac{P}{P_E}}. \qquad (169)$$

La contrainte de compression maximale est égale à:

$$\max|\sigma| = \frac{P}{F} + \frac{M_{max}}{W} = \frac{P}{F} + \frac{M_m}{W} + \frac{Pf_m}{W\left(1 - \frac{P}{P_E}\right)}, \qquad (170)$$

où P est la force axiale de compression;

$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ la force d'Euler, calculée pour un élancement arbitraire de la barre, en fonction du moment principal central d'inertie I de l'aire F de la section droite par rapport à un axe perpendiculaire au plan d'action de la charge transversale;

W le module de résistance axial de la section droite de la barre par rapport à l'axe indiqué;

f_m et M_m le déplacement vertical et le moment fléchissant dans la section médiane de la barre, dus seulement à la charge transversale.

La formule (170) montre que le principe d'indépendance des effets des forces n'est pas applicable dans ce cas et que les contraintes, quand les forces extérieures augmentent, croissent plus rapidement que les forces extérieures elles-mêmes.

Ce fait nous force à passer du calcul de résistance, basé sur la contrainte admissible, au calcul, basé sur les charges admissibles.

On admet que la poutre considérée en flambement par flexion a un coefficient de sécurité n, lorsque les forces extérieures augmentent de n fois, elle atteint un état dangereux. Pour les matériaux plastiques, celui-ci correspond à l'état où la contrainte normale maximale (en valeur absolue) atteint la limite d'écoulement $\sigma_{éc}$,

c'est-à-dire :

$$\max|\sigma| = \frac{(nP)}{F} + \frac{(nM_m)}{W} + \frac{(nP)(nf_m)}{W\left(1 - \frac{nP}{P_E}\right)} = \sigma_{éc}. \qquad (171)$$

Egalant n au coefficient de sécurité admissible $[n]$ on obtient la formule pratique de résistance :

$$\max|\sigma| = \frac{[n]P}{F} + \frac{[n]M_m}{W} + \frac{[n]P[n]f_m}{W\left(1 - \frac{[n]P}{P_E}\right)} = \sigma_{éc}. \qquad (171,a)$$

Dans un calcul d'après les charges admissibles, la valeur du coefficient de sécurité est prise conformément à celle établie pour la contrainte admissible par rapport à la limite d'écoulement $\sigma_{éc}$, c'est-à-dire :

$$[n] = n_{éc},$$

où :

$$n_{éc} = \frac{\sigma_{éc}}{[\sigma]}.$$

De la formule (171,a) on obtient alors la formule pratique modifiée suivante :

$$\frac{P}{F} + \frac{M_m}{W} + \frac{[n]Pf_m}{W\left(1 - \frac{[n]P}{P_E}\right)} \leqslant [\sigma]. \qquad (171,b)$$

Avec une erreur quelquepeu plus grande on peut employer aussi les formules (168-171) dans le cas d'une charge transversale asymétrique, si l'asymétrie de la charge n'est pas trop voisine d'une symétrie gauche.

Le calcul au flambement par flexion pour d'autres modes de liaisons des barres se fait d'une manière analogue, pourtant dans chaque cas particulier l'équation (168) doit être modifiée. Par exemple, pour une poutre encastrée à une extrémité (fig. 151,*b*) la déformée approchée est donnée par la fonction :

$$f = f_{max}\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right).$$

Néanmoins, les formules pratiques (169-171) restent valables, si l'on ne tient pas compte du fait que la valeur de la force d'Euler P_E varie suivant le mode de liaisons de la barre selon la formule (163).

Quand la charge transversale est située dans le plan de rigidité maximale de la barre, il est nécessaire de vérifier aussi sa stabilité dans le plan de rigidité minimale.

Exemple 83. Calculer f, σ_{max}, n, n_{st} (fig. 152). On prendra: $P = 800$ kgf; $P_1 = 100$ kgf; $l = 2$ m; $b = 2$ cm; $h = 4$ cm;

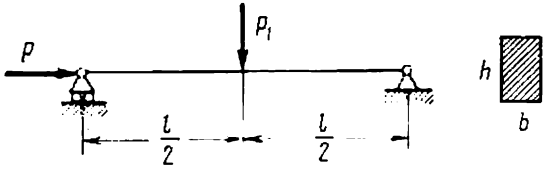


Fig. 152

$E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $\sigma_{éc} = 2\,400$ kgf/cm^2.

Solution. Puisque:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 64}{12} = \frac{32}{3} \text{ cm}^3,$$

la flèche de la poutre due à la force P_1 sera:

$$f_m = \frac{P_1 l^3}{48EI} = \frac{100 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 32} = \frac{25}{32} = 0{,}781 \text{ cm}.$$

La force d'Euler est:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 32}{4 \cdot 10^4 \cdot 3} = \frac{16}{3} \cdot 10^3 \text{ kgf}.$$

Le rapport:

$$\frac{P}{P_E} = \frac{800 \cdot 3}{16 \cdot 10^3} = \frac{3}{20} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{P}{P_E} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}.$$

Selon la formule (168), le déplacement vertical cherché sera: $f = \frac{25}{32} \cdot \frac{20}{17} = 0{,}919$ cm.

Donc f_m est $\frac{17}{20} \cdot 100\ \% = 85\ \%$ de f.

Puisque:

$$M_m = \frac{P_1 l}{4} = \frac{100 \cdot 200}{4} = 5 \cdot 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm}.$$

$$M_{max} = 5 \cdot 10^3 + 800 \cdot 0{,}919 = 5\,735 \text{ kgf} \cdot \text{cm}.$$

$$F = bh = 8\,\text{cm}^2,$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2 \cdot 16}{6} = \frac{16}{3}\,\text{cm}^3,$$

d'après la formule (170) on a:

$$\sigma_{\max} = \frac{800}{8} + \frac{5\,735}{16} \cdot 3 = 1\,175\ \text{kgf/cm}^2.$$

Sans considération de la flexion due à l'effort longitudinal on a:

$$\sigma'_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_m}{W} = 100 + \frac{5 \cdot 10^3}{16} \cdot 3 = 1\,038\ \text{kgf/cm}^2.$$

Soit $\frac{1\,038}{1\,175} \cdot 100\ \% = 88\ \%$ de la valeur de $\sigma_{\max}$.

Le coefficient de sécurité n (par rapport à la limite d'écoulement) de la poutre est déterminé par la formule (171):

$$\max |\sigma| = \frac{nP}{F} + \frac{nM_m}{W} + \frac{nP}{W} \cdot \frac{nf_m}{\left(1 - \frac{nP}{P_E}\right)} = \sigma_{éc},$$

ou

$$\frac{n \cdot 800}{8} + \frac{n \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 3}{16} + \frac{n \cdot 800 \cdot 3 \cdot n \cdot 0{,}781}{16\left(1 - \frac{n \cdot 800 \cdot 3}{16 \cdot 10^3}\right)} = 2\,400,$$

d'où

$$\frac{n^2 - 35{,}9n + 61{,}6}{(1 - 0{,}15n)} = 0.$$

La solution de cette équation donne deux valeurs pour n: $n_1 = 1{,}85$ et $n_2 = 34{,}05$.

La valeur $n_2 = 34{,}05$ ne peut être la solution du problème, car déjà pour $n = 6{,}67$ ($nP = 5\,320$ kgf) $\max |\sigma| = \infty$, puisque le binôme $1 - \frac{nP}{P_E} = (1 - 0{,}15)$ s'annule.

On vérifie la stabilité de la poutre dans le plan de rigidité minimale. Puisque:

$$i_y^2 = \frac{b^2}{16} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\,\text{cm}^2 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{l}{i} = 200\sqrt{3},$$

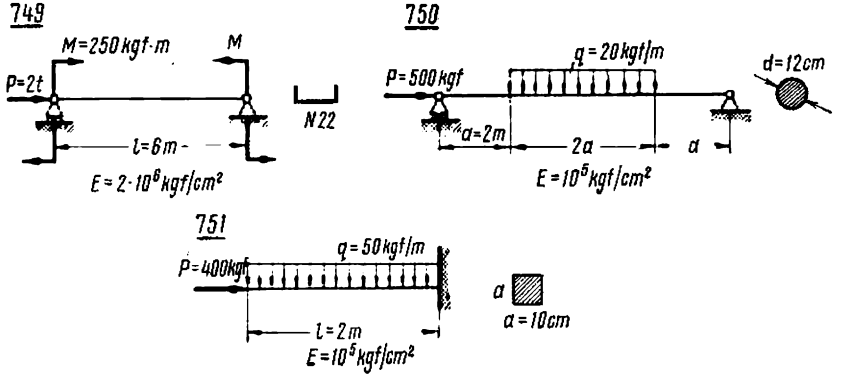
selon la formule (164) on a:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 4 \cdot 10^4} = 167 \text{ kgf/cm}^2,$$

la contrainte de compression $\sigma = \frac{800}{8} = 100$ kgf/cm² due seulement à la force P. Le coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité sera:

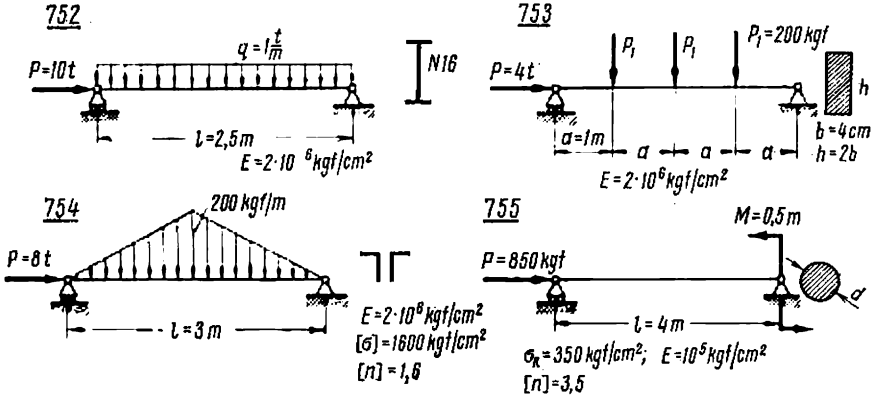
$$n_{st} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} = \frac{167}{100} = 1{,}67.$$

Problèmes 749-751. Déterminer la flèche f et la contrainte de compression maximale max $|\sigma_c|$ des poutres.



Problèmes 752-753. Calculer f, max $|\sigma_c|$, le coefficient de sécurité n et le coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité n_{st} des poutres.

Problèmes 754-755. Choisir les dimensions transversales des sections des poutres.



XI. POUTRES PLANES À COURBURE INITIALE

§ 1. Effort longitudinal, effort tranchant et moment fléchissant

On appelle *poutre à courbure initiale* une barre dont l'axe géométrique est curviligne.

On considérera des poutres à courbure initiale pour lesquelles: 1) l'axe géométrique est une courbe plane; 2) le plan de courbure est un plan de symétrie; 3) les forces appliquées sont situées dans

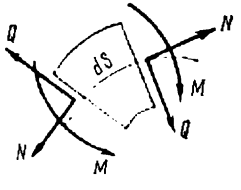


Fig. 153

Fig. 154

le plan de courbure; 4) le matériau suit la loi de Hooke; 5) la rigidité est assez grande pour que le principe d'indépendance des effets des forces soit applicable.

Les efforts intérieurs dans la section droite d'une poutre à courbure initiale sont déterminés par la méthode des sections. Ils se réduisent, à l'effort longitudinal N, à l'effort tranchant Q et au moment fléchissant M.

On admet comme positifs: l'effort de traction N, l'effort tranchant Q dont la direction coïncide avec la direction de l'effort de traction N après rotation de celui-ci de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre, le moment fléchissant M augmentant la courbure initiale de la poutre (fig. 153).

Les valeurs positives de N, Q et M sont rapportées sur les diagrammes perpendiculairement à l'axe géométrique de la poutre dans le sens opposé au centre de courbure, les valeurs négatives vers le centre de courbure. Pour les poutres composées de poutres droites et de poutres à courbure initiale, il est commode de disposer les diagrammes positifs et négatifs des poutres droites du même côté de l'axe géométrique que ceux pour les poutres curvilignes.

Indépendamment de la forme de la poutre à courbure initiale, les quantités N, Q et M dans la section droite, définie par les coor-

données x, y et par l'angle $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sont déterminées par la même méthode.

Envisageons les cas des différentes charges appliquées à l'une des parties isolées par la section.

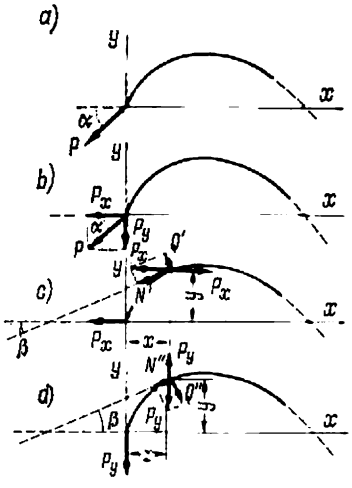


Fig. 155

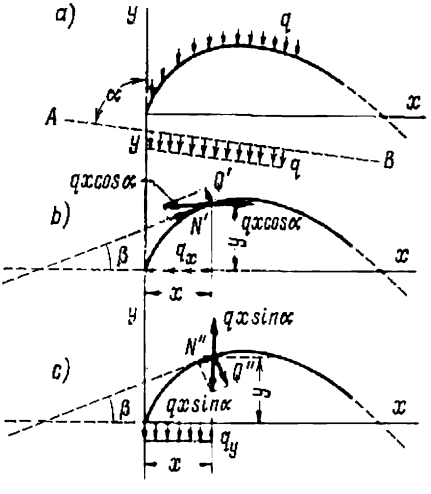


Fig. 156

1. Couple de forces concentré (fig. 154):

$$N = 0; \quad Q = 0; \quad M = M_0.$$

2. Force concentrée (fig. 155,*a*). Les composantes de la force P suivant les axes x et y (fig. 155,*b*) sont égales à:

$$P_x = P\cos\alpha; \quad P_y = P\sin\alpha.$$

La composante P_x (fig. 155,*c*) engendre les efforts:

$$N' = P\cos\alpha\cos\beta; \quad Q' = P\cos\alpha\sin\beta; \quad M' = -Py\cos\alpha.$$

La composante P_y (fig. 155,*d*) produit les efforts:

$$N'' = P\sin\alpha\sin\beta; \quad Q'' = -P\sin\alpha\cos\beta;$$

$$M'' = Px\sin\alpha.$$

Les efforts résultants provoqués par la force P sont:

$$N = P(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = P\cos(\alpha - \beta);$$

$$Q = P(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) = -P\sin(\alpha - \beta);$$

$$M = P(x\sin\alpha - y\cos\alpha).$$

3. Charge uniformément répartie suivant la droite AB et normale à celle-ci (fig. 156,*a*).

Les composantes de la charge q suivant les axes x et y (comme pour le cas précédent) sont égales à :

$$q_x = q\cos\alpha; \qquad q_y = q\sin\alpha.$$

La composante q_x (fig. 156,*b*) produit les efforts :

$$N' = qx\cos\alpha\cos\beta; \quad Q' = qx\cos\alpha\sin\beta; \quad M' = -q\,xy\cos\alpha.$$

La composante q_y (fig. 156,*c*) engendre les efforts :

$$N'' = qx\sin\alpha\sin\beta; \quad Q'' = -qx\sin\alpha\cos\beta;$$

$$M'' = q\frac{x^2}{2}\sin\alpha.$$

Les efforts résultants produits par la charge q sont :

$$N = qx(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = qx\cos(\alpha-\beta);$$

$$Q = qx(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) = -qx\sin(\alpha-\beta);$$

$$M = qx\left(\frac{x}{2}\sin\alpha - y\cos\alpha\right).$$

4. Charge transversale uniformément répartie suivant l'axe géométrique de la poutre (fig. 157,*a*).

La projection sur l'axe y de la charge coupée (fig. 157,*b*, *c*) engendre les efforts :

$$N' = qx\sin\beta;$$

$$Q' = -qx\cos\beta;$$

$$M' = q\frac{x^2}{2}.$$

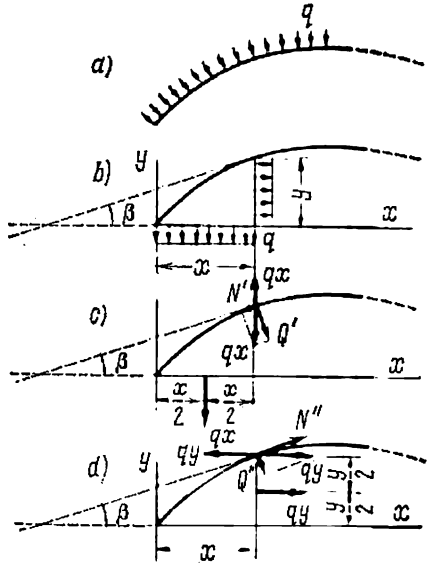


Fig. 157

La projection sur l'axe x de la charge coupée (fig. 157,*d*) engendre les efforts :

$$N'' = -qy\cos\beta; \quad Q'' = -qy\sin\beta; \quad M'' = q\frac{y^2}{2}.$$

L'action simultanée de q_x et q_y engendre les efforts:

$$N = q(x \sin \beta - y \cos \beta); \quad Q = -q(x \cos \beta + y \sin \beta);$$

$$M = \frac{q}{2}(x^2 + y^2).$$

5. Charge parallèle uniformément répartie suivant l'axe géométrique de la poutre (fig. 158,*a*).

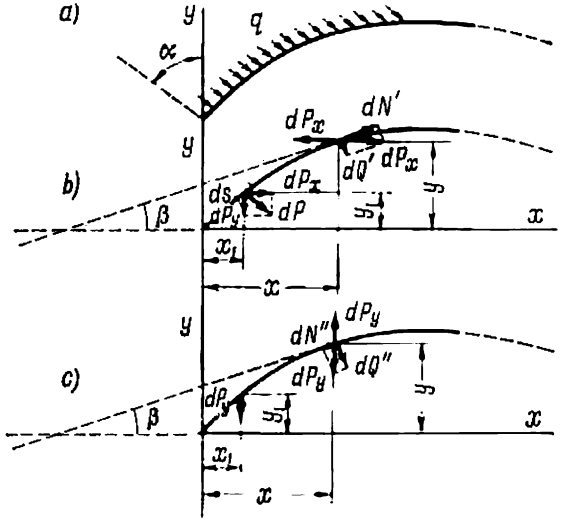


Fig. 158

La force élémentaire dans la section de coordonnées $x_1 y_1$ agissant sur l'élément ds de l'arc de l'axe géométrique de la poutre est (fig. 158,*b*):

$$dP = q\, ds.$$

Les projections de la force dP sur les axes x et y sont:

$$dP_x = dP \sin \alpha = q\, ds \sin \alpha; \quad dP_y = dP \cos \alpha = q\, ds \cos \alpha.$$

La force dP_x provoque dans la section de coordonnées x, y et d'angle β les efforts élémentaires (fig. 158,*b*):

$$dN' = -dP_x \cos \beta = -q \sin \alpha \cos \beta\, ds;$$

$$dQ' = -dP_x \sin \beta = -q \sin \alpha \sin \beta\, ds.$$

$$dM' = dP_x (y - y_1) = q (y - y_1) \sin \alpha\, ds.$$

La force dP_y provoque dans cette même section les efforts élémentaires (fig. 158,*c*) :

$$dN'' = dP_y \sin\beta = q\cos\alpha\sin\beta\, ds;$$

$$dQ'' = -dP_y\cos\beta = -q\cos\alpha\cos\beta\, ds;$$

$$dM'' = dP_y\,(x - x_1) = q\,(x - x_1)\cos\alpha\, ds.$$

L'action simultanée des forces dP_x et dP_y provoque dans la section considérée les efforts élémentaires :

$$dN = -q\,(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\, ds = -q\sin(\alpha - \beta)\, ds;$$

$$dQ = -q\,(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)\, ds = -q\cos(\alpha - \beta)\, ds;$$

$$dM = q\,[(y - y_1)\sin\alpha + (x - x_1)\cos\alpha]\, ds.$$

Les efforts globaux dans la section considérée coupant un arc s de l'axe géométrique de la poutre sont :

$$N = -q\sin(\alpha - \beta)\int_0^s ds = -qs\sin(\alpha - \beta);$$

$$Q = -q\cos(\alpha - \beta)\int_0^s ds = -qs\cos(\alpha - \beta);$$

$$M = q\left[\sin\alpha\left(y\int_0^s ds - \int_0^s y_1\, ds\right) + \cos\alpha\left(x\int_0^s ds - \int_0^s x_1\, ds\right)\right] =$$

$$= q\left[\sin\alpha\,(ys - S_x) + \cos\alpha\,(xs - S_y)\right] =$$

$$= qs\left[(y - y_c)\sin\alpha + (x - x_c)\cos\alpha\right],$$

où $S_x = \int_0^s y_1 ds$ et $S_y = \int_0^s x_1 ds$ sont les moments statiques de l'arc s par rapport aux axes x et y ;

$y_c = \dfrac{S_x}{s}$ et $x_c = \dfrac{S_y}{s}$ les coordonnées du centre de gravité de l'arc s.

6. Charge uniformément répartie suivant l'axe géométrique de la poutre et tangente à celui-ci (fig. 159,*a*).

La force élémentaire dans la section droite de coordonnées x_1 y_1 et d'angle β_1 (fig. 159,*b*), tangente à l'axe géométrique de la poutre et agissant sur l'élément d'arc ds est :

$$dP = q\, ds.$$

La force dP dans la section droite de coordonnées x, y et d'angle β (fig. 159,*b*) produit les efforts élémentaires :

$$dN = -dP\cos(\beta_1 - \beta) = -q\cos(\beta_1 - \beta)\,ds;$$

$$dQ = dP\sin(\beta_1 - \beta) = q\sin(\beta_1 - \beta)\,ds;$$

$$dM = -dP[(x - x_1)\sin\beta_1 - (y - y_1)\cos\beta_1] =$$

$$= q[(y - y_1)\cos\beta_1 - (x - x_1)\sin\beta_1]\,ds.$$

Les efforts globaux dans la section considérée coupant un arc s

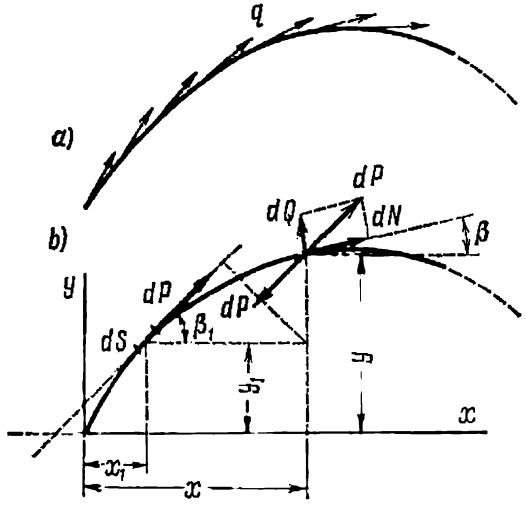


Fig. 159

de l'axe géométrique de la poutre sont :

$$N = -q\int_0^s \cos(\beta_1 - \beta)\,ds; \quad Q = q\int_0^s \sin(\beta_1 - \beta)\,ds;$$

$$M = q\left[\int_0^s (y - y_1)\cos\beta_1\,ds - \int_0^s (x - x_1)\sin\beta_1\,ds\right].$$

Exemple 84. Etant donnés : P et ρ (fig. 160,*a*) ; construire les diagrammes de N, Q et M.

S o l u t i o n. On détermine N, Q et M dans les tronçons de la poutre (fig. 160,*b*).

Pour le premier tronçon on a : $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$$N_{\varphi_1} = P\cos\varphi_1;\ Q_{\varphi_1} = P\sin\varphi_1;\ M_{\varphi_1} = P\rho(1 - \cos\varphi_1);$$

$$N_{\varphi_1=0} = P;\ N_{\varphi_1=\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}707P;\ N_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} = 0;\ Q_{\varphi_1=0} = 0;$$

$$Q_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}707P; \quad Q_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} = P;$$

$$M_{\varphi_1=0} = 0; \quad M_{\varphi_1=\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}293P\rho; \quad M_{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} = P\rho.$$

Pour le second tronçon on a: $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$$N_{\varphi_2} = -2P\sin\varphi_2; \quad Q_{\varphi_2} = 2P\cos\varphi_2; \quad M_{\varphi_2} = P\rho(1+2\sin\varphi_2);$$

$$N_{\varphi_2=0} = 0; \quad N_{\varphi_2=\frac{\pi}{4}} \approx -1{,}414P; \quad N_{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = -2P;$$

$$Q_{\varphi_2=0} = 2P; \quad Q_{\varphi_2=\frac{\pi}{4}} \approx 1{,}414P; \quad Q_{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$M_{\varphi_2=0} = P\rho; \quad M_{\varphi_2=\frac{\pi}{4}} \approx 2{,}414P\rho; \quad M_{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = 3P\rho.$$

Les diagrammes de N, Q et M sont représentés fig. 160,*c*, *d*, *e*.

Exemple 85. Etant données les quantités P et a et les équations des axes géométriques des parties supérieure et inférieure du ressort: paraboles $y = \pm x\left(1 - \frac{x}{2a}\right)$ (fig. 161,*a*);

construire N; Q et M.

S o l u t i o n. Par suite de la symétrie du système par rapport aux deux axes rectangulaires, il suffit d'étudier seulement la moitié d'une partie du ressort (fig. 161,*b*). Pour une section droite arbitraire à une distance x de l'extrémité gauche, on a:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{a};$$

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{a-x}{\sqrt{2a^2-2ax+x^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{a}{\sqrt{2a^2-2ax+x^2}}$$

Par conséquent:

$$N = \frac{P}{2}\sin\beta = \frac{P(a-x)}{2\sqrt{2a^2-2ax+x^2}};$$

$$Q = -\frac{P}{2}\cos\beta = -\frac{Pa}{2\sqrt{2a^2-2ax+x^2}};$$

$$M = \frac{P}{2}x;$$

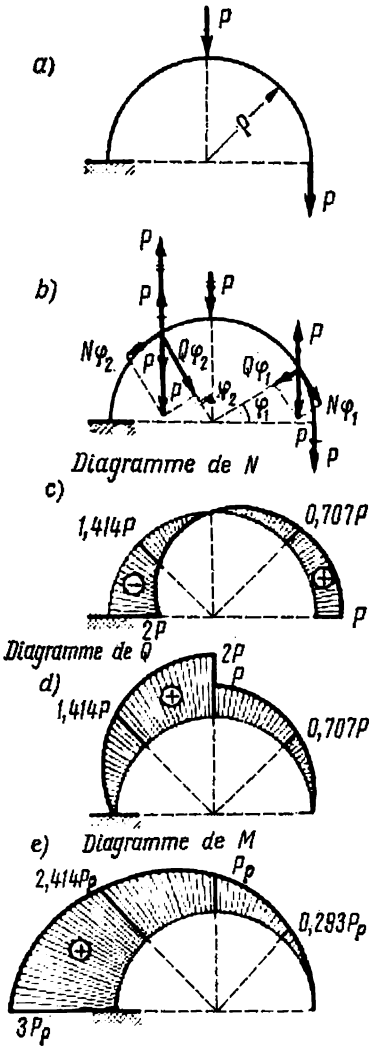


Fig. 160

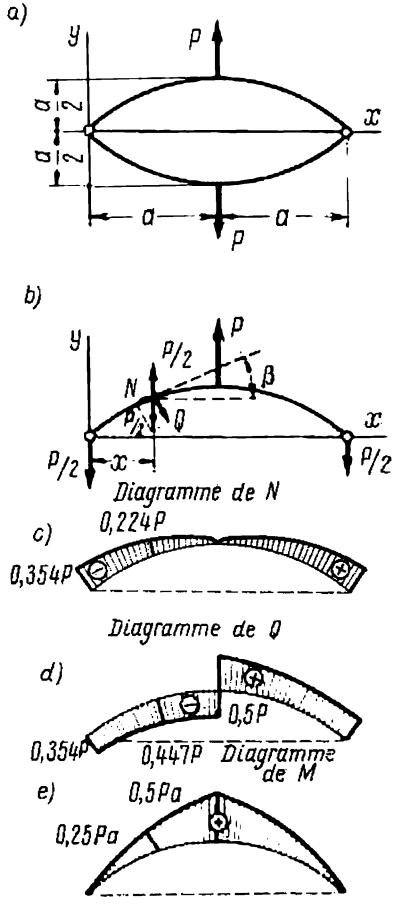


Fig. 161

$$N_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{4}P\approx 0{,}354P;\quad N_{x=\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{10}P\approx 0{,}224P;$$

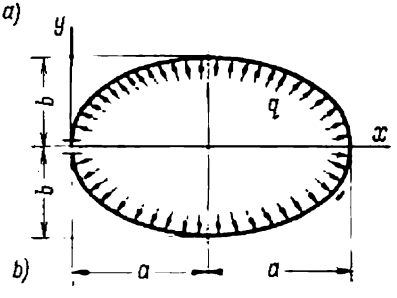
$$N_{x=a}=0;$$

$$Q_{x=0}=-\frac{\sqrt{2}}{4}P\approx -0{,}354P;\quad Q_{x=\frac{a}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}P\approx -0{,}447P;$$

$$Q_{x=a}=-0{,}5P;\ M_{x=0}=0;\ M_{x=\frac{a}{2}}=0{,}25Pa;\ M_{x=a}=0{,}5Pa.$$

Les diagrammes de N, Q et M sont représentés fig. 161,*c*, *d*, *e*.

Exemple 86. Calculer N, Q, M, si q, a et b sont donnés et l'anneau est elliptique : $y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$ et a une coupure à l'origine des coordonnées (fig. 162,*a*).



S o l u t i o n. Puisque la poutre est symétrique par rapport à l'axe nous considérons seulement sa moitié supérieure.

En appliquant le principe de superposition, on détermine les efforts dans la section droite de coordonnées x, y et d'angle β (fig. 162,*c*,*d*) produits par les projections q_x et q_y de la charge (fig. 162,*b*) :

$$N=qy\cos\beta-qx\sin\beta;$$

$$Q=qx\cos\beta+qy\sin\beta;$$

$$M=-\frac{q}{2}(x^2+y^2).$$

Puisque :

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

on a :

$$\sin\beta=\frac{a-x}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2)+(a-x)^2}};$$

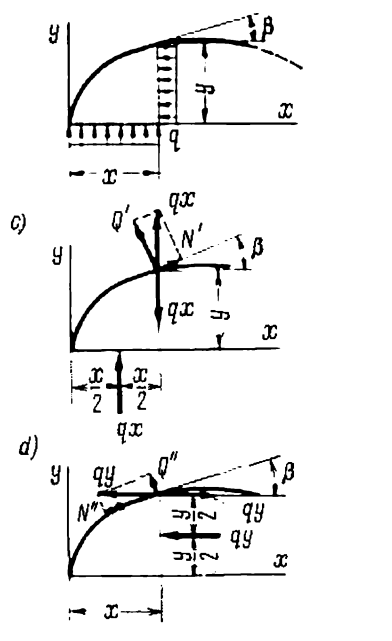


Fig. 162

$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{b}\sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax - x^2) + (a - x)^2}}$$

et

$$N = \frac{qax}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax - x^2) + (a - x)^2}};$$

$$Q = \frac{q\left[\frac{a}{b}x + \frac{b}{a}(a - x)\right]\sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax - x^2) + (a - x)^2}};$$

$$M = -\frac{q}{2}\left[\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) + x^2\right].$$

Si, par exemple, $a = b$, $N = qx$; $Q = q\sqrt{2ax - x^2}$; $M = -qax$. Les diagrammes de N, Q, M sont représentés fig. 163,*a*, *b*, *c*.

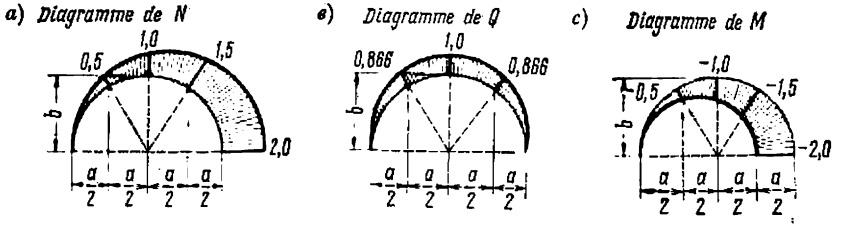


Fig. 163

Exemple 87. La charge verticale d'intensité q est uniformément répartie suivant le quart de la circonférence de rayon ρ (fig. 164,*a*). Construire les diagrammes de N, Q et M.

Solution. Les valeurs des efforts dans la section droite, faisant un angle φ avec la verticale, provoqués par la force élémentaire $dP = qds = q\rho d\alpha$, sont (fig. 164,*b*):

$$dN = -dP\sin\varphi = q\rho\sin\varphi\, d\varphi;$$

$$dQ = dP\cos\varphi = q\rho\cos\varphi\, d\varphi;$$

$$dM = dP\rho(\sin\varphi - \sin\alpha) = q\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)\, d\alpha.$$

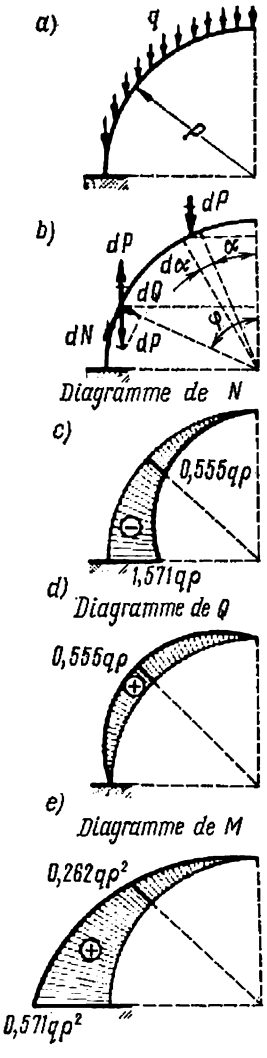


Fig. 164

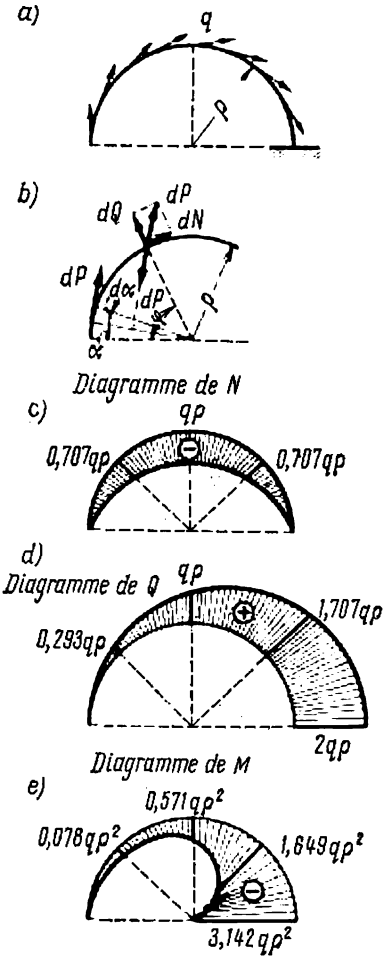


Fig. 165

Les efforts produits par la charge appliquée à la partie isolée de la poutre sont :

$$N = -q\rho \sin\varphi \int_0^{\varphi} d\alpha = -q\rho\varphi \sin\varphi\,; \quad Q = q\rho\cos\varphi \int_0^{\varphi} d\alpha = q\rho\varphi\cos\varphi\,;$$

$$M = q\rho^2 \int_0^{\varphi} (\sin\varphi - \sin\alpha)\, d\alpha = q\rho^2 (\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1)\,;$$

$$N_{\varphi=0}=0;\quad N_{\varphi=\frac{\pi}{4}}\approx -q\rho\,\frac{\pi}{4}\,0{,}707=-0{,}555q\rho\,;$$

$$N_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=-q\rho\,\frac{\pi}{2}\approx -1{,}571q\rho\,;$$

$$Q_{\varphi=0}=0;\quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}555q\rho;\quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=0\,;$$

$$M_{\varphi=0}=0;\quad M_{\varphi=\frac{\pi}{4}}\approx q\rho^2\left(\frac{\pi}{4}\,0{,}707+0{,}707-1\right)\approx 0{,}262q\rho^2\,;$$

$$M_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=q\rho^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\approx 0{,}571q\rho^2\,.$$

Les diagrammes de N, Q et M sont représentés fig. 164,*c*, *d*, *e*.

Exemple 88. La charge d'intensité q est uniformément répartie sur la demi-circonférence de rayon ρ et est dirigée suivant la tangente à l'axe géométrique de la poutre (fig. 165,*a*).
Construire les diagrammes de N, Q et M.

Solution. La force élémentaire dans la section faisant un angle α avec l'horizontale est :

$$dP=q\,ds=q\rho\,d\alpha\,.$$

Les efforts élémentaires dans la section droite de la poutre, faisant un angle φ avec l'horizontale, provoqués par la force dP sont (fig. 165,*b*) :

$$dN=-dP\cos(\varphi-\alpha)=-q\rho\cos(\varphi-\alpha)\,d\alpha\,;$$

$$dQ=dP\sin(\varphi-\alpha)=q\rho\sin(\varphi-\alpha)\,d\alpha\,;$$

$$dM=-dP\,[\rho-\rho\cos(\varphi-\alpha)]=-q\rho^2\,[1-\cos(\varphi-\alpha)]\,d\alpha\,.$$

Les efforts globaux produits par la charge appliquée à la partie isolée de la poutre sont :

$$N=-q\rho\int_0^{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\,d\alpha=-q\rho\sin\varphi\,;$$

$$Q=q\rho\int_0^{\varphi}\sin(\varphi-\alpha)\,d\alpha=q\rho\,(1-\cos\varphi)\,;$$

$$M=-q\rho^2\left[\int_0^{\varphi}d\alpha-\int_0^{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)\,d\alpha\right]=q\rho^2\,(\sin\varphi-\varphi)\,;$$

$$N_{\varphi=0}=0\,;\quad N_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=-0{,}707q\rho\,;$$

$$N_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -q\rho\,; \quad N_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} \approx 0{,}707q\rho\,;$$

$$N_{\varphi=\pi} = 0;$$

$$Q_{\varphi=0} = 0\,; \quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}293q\rho\,; \quad Q_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = q\rho\,;$$

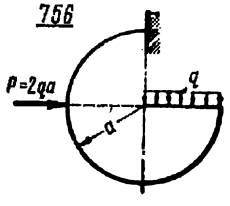
$$Q_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} = 1{,}707q\rho\,; \quad Q_{\varphi=\pi} = 2q\rho\,;$$

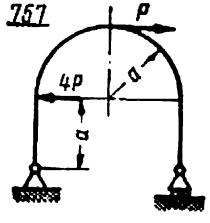
$$M_{\varphi=0} = 0\,; \quad M_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -0{,}078q\rho^2\,; \quad M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \approx -0{,}571q\rho^2;$$

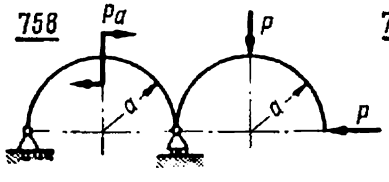
$$M_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} = -1{,}649q\rho^2; \quad M_{\varphi=\pi} = -3{,}142q\rho^2\,.$$

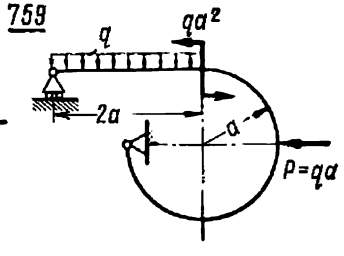
Les diagrammes de N, Q et M sont représentés fig. 165,*c*, *d*, *e*.

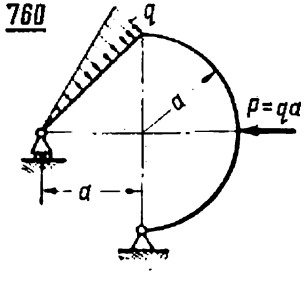
Problèmes 756-765. Construire les diagrammes de l'effort longitudinal N, de l'effort tranchant Q et du moment fléchissant M.

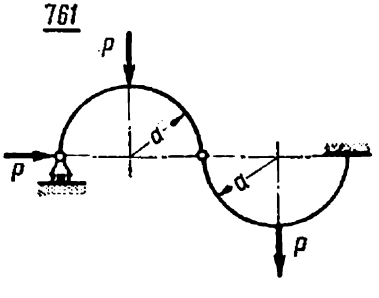




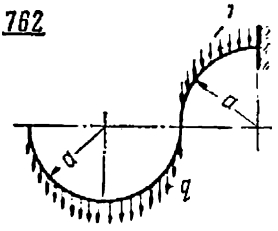






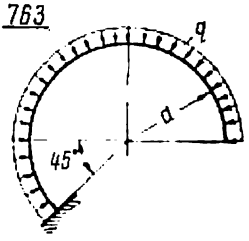


762

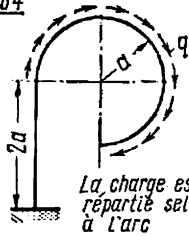


La charge est uniformément répartie selon la projection horizontale

763

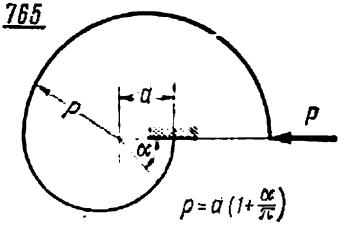


764



La charge est uniformément répartie selon la tangente à l'arc

765



$\rho = a\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right)$

Spirale d'Archimède

§ 2. Contraintes

L'effort longitudinal N et le moment fléchissant M déterminent les contraintes normales σ_N et σ_M, et l'effort tranchant Q, les contraintes de cisaillement τ, développées aux points de la section droite de la poutre à courbure initiale.

On admet que les contraintes σ_N sont uniformément réparties dans l'aire de la section droite F et que la répartition des contraintes σ_M dans la section droite suit une loi hyperbolique; on les calcule par les formules:

$$\sigma_N = \frac{N}{F}. \tag{172}$$

$$\sigma_M = \frac{M}{S} \cdot \frac{y}{r+y}, \tag{173}$$

où S est le moment statique de l'aire F par rapport à l'axe neutre z, ne passant pas par le centre de gravité O_0 de la section, r le rayon de courbure de la ligne neutre nn, y l'ordonnée du point considéré de la section calculée depuis l'axe z (fig. 166).

La ligne neutre nn est déplacée par rapport à l'axe géométrique deyla poutre vers son centre de courbure de $e = \rho - r$ (ρ est le raon de courbure de l'axe géométrique de la poutre).

Le rayon de courbure de la ligne neutre de la poutre pour chaque forme de sa section droite a pour expression :

$$r = \frac{F}{\int\limits_F \frac{dF}{\rho + u}}, \tag{174}$$

où u est la coordonnée du point considéré de la section calculée depuis l'axe central z_0 (fig. 166).

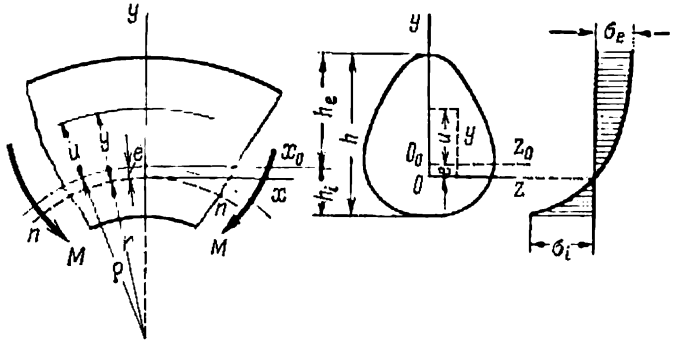


Fig. 166

Pour une section rectangulaire on a :

$$r = \frac{h}{\text{Log}\frac{r_e}{r_i}},$$

pour une section circulaire :

$$r = \frac{1}{2}\left[\rho + \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right],$$

pour une section trapézoïdale :

$$r = \frac{F}{\left(b_e + r_e \frac{b_i - b_e}{h}\right) \text{Log}\frac{r_e}{r_i} - (b_i - b_e)},$$

où r_e, r_i, b_e, b_i sont respectivement le rayon de courbure et la largeur des fibres extérieures et intérieures de la section.

Pour certaines autres formes de sections droites les valeurs de r sont données dans les ouvrages de référence correspondants et dans les manuels de résistance des matériaux.

Pour les poutres de rayon de courbure pas très grand, la quantité e peut être calculée d'après la formule approchée:

$$e \approx \frac{i^2}{\rho}, \tag{175}$$

où $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ est le rayon d'inertie de la section droite de la poutre par rapport à l'axe central z_0.

La formule (175) donne une meilleure approximation à la solution exacte pour les poutres dont les sections droites sont symétriques par rapport à l'axe z_0.

Puisque

$$S = Fe \approx \frac{I}{\rho}, \quad y = u + e = u\left(1 + \frac{i^2}{\rho u}\right),$$

et

$$r + y = \rho + u = \rho\left(1 - \frac{u}{\rho}\right),$$

où u est la distance du point considéré de la section à l'axe central z_0, on peut écrire la formule (173) de la façon suivante:

$$\sigma_M = \frac{Mu}{I} \cdot \frac{1 + \frac{i^2}{\rho u}}{1 + \frac{u}{\rho}} = \frac{Mu}{I} \alpha. \tag{176}$$

Dans cette expression la quantité:

$$\alpha = \frac{1 + \frac{i^2}{\rho u}}{1 + \frac{u}{\rho}}, \tag{177}$$

qui est une fonction de la coordonnée u, caractérise la répartition non linéaire de σ_M dans la section et dépend de la forme de cette dernière et de la courbure initiale de la poutre. Si $h/\rho \leqslant \frac{1}{10}$, α diffère très peu de l'unité, et σ_M peut être calculé suivant la formule établie pour les poutres droites: $\sigma = \frac{Mu}{I}$.

Les contraintes normales maximale et minimale sont développées dans les fibres extrêmes de la poutre pour $u = h_e$ et $u = -h_i$

et sont égales à

$$\sigma_i^e = \pm \frac{M}{W_i^e} \alpha_i^e, \tag{178}$$

où W est le module de résistance équaterial de la section pour les fibres extérieures $W_e = \frac{I}{h_e}$ et pour les fibres intérieures $W_i = \frac{I}{h_i}$, et

$$\alpha_i^e = \alpha_{u=\pm h_i^e} = (1 \pm i^2/\rho h_i^e)/(1 \pm h_i^e/\rho). \tag{179}$$

Les valeurs des coefficients α_i^e pour quelques formes de sections sont données en appendice.

La contrainte normale résultante σ en un point arbitraire dans la section droite de la poutre à courbure initiale peut être calculée par la formule:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mu}{I} \alpha \tag{180}$$

en y portant N avec son signe. Dans la majorité des cas σ_N est petit devant σ_M.

Les contraintes de cisaillement τ déterminant l'effort tranchant Q ont une valeur secondaire et généralement ne sont pas considérées dans les calculs.

D'une manière approchée on peut les calculer à l'aide de la formule (99) pour les poutres droites:

$$\tau = \frac{QS}{bI}.$$

Exemple 89. Etant donnés: $P = 1$ t; $\rho = 50$ cm; $M = P\rho$ et $a = 10$ cm (fig. 167,*a*); calculer max σ_e, min σ_i, τ_{max} et e.

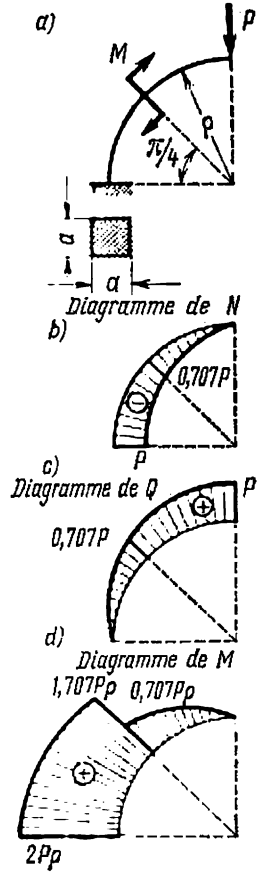


Fig. 167

Solution. Selon les diagrammes de N, Q et M (fig. 167,*b*, *c*, *d*) les contraintes normales maximales seront développées dans la section encastrée où $N = -P = -1$ t et $M = 2P\rho = 2 \cdot 1 \cdot 50 = 100$ t·cm; les contraintes de cisaillement maximales seront développées dans la section de l'extrémité libre de la poutre où $Q = P = 1$ t.

Pour une section carrée :

$$W_e = W_1 = W = \frac{a^3}{6} = \frac{10^3}{6}\text{cm}^3; \quad F = a^2 = 10^2\text{cm}^2;$$

$$\alpha_1^e = \frac{1 \pm \frac{a}{6\rho}}{1 \pm \frac{a}{2\rho}} = \frac{1 \pm \frac{10}{6 \cdot 50}}{1 \pm \frac{10}{2 \cdot 50}} \approx \begin{cases} 0{,}939 \\ 1{,}074 \end{cases}.$$

Donc :

$$\max \sigma_e = \frac{M}{W}\alpha_e + \frac{N}{F} = \frac{10^5 \cdot 6}{10^3} 0{,}939 - \frac{10^3}{10^2} \approx$$

$$\approx 563 - 10 \approx 553 \text{ kgf/cm}^2;$$

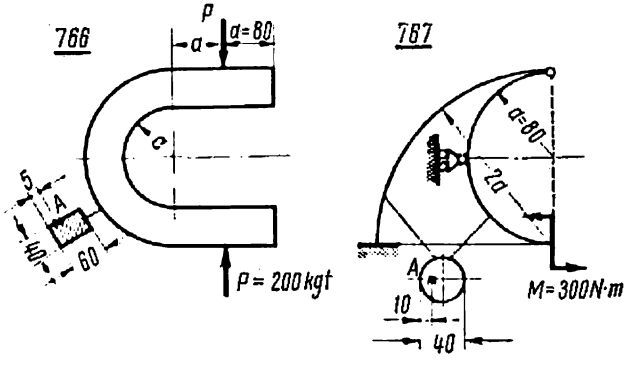
$$\min \sigma_1 = \frac{M}{W}\alpha_1 + \frac{N}{F} = -\frac{10^5 \cdot 6}{10^3} 1{,}074 - \frac{10^3}{10^2} \approx$$

$$\approx -644 - 10 = -654 \text{ kgf/cm}^2;$$

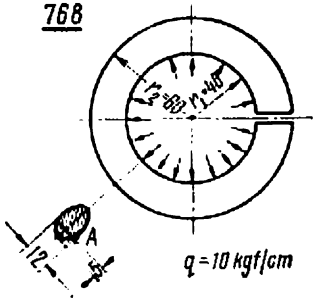
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^3}{10^2} = 15 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$e = \frac{i^2}{\rho} = \frac{a^2}{12\rho} = \frac{10^2}{12 \cdot 50} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 \text{ cm} = 1{,}67 \text{ mm}.$$

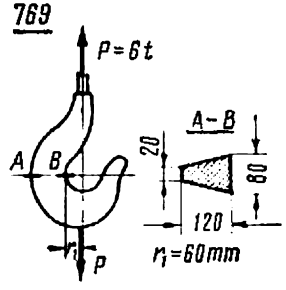
Problèmes 766-769. Calculer les contraintes de traction maximales σ_{max}, les contraintes de compression maximales σ_{min} et les contraintes normales σ_A au point indiqué A de la section dangereuse.



768



769



§ 3. Calcul de résistance

Pour calculer la valeur de la charge de sécurité, agissant sur la poutre à courbure initiale, et pour vérifier sa résistance on utilise la formule:

$$\max|\sigma_i| = \left|\frac{M}{W_i}\alpha_i + \frac{N}{F}\right| \leqslant [\sigma]\,. \tag{181}$$

Les dimensions nécessaires de la section droite de la poutre sont choisies par essais suivis de vérification. Comme premier essai, on peut calculer la poutre à courbure initiale selon l'inégalité

$$\frac{\max|M|}{W_i} \leqslant [\sigma] \tag{182}$$

pour les poutres droites.

La résistance de la section doit être vérifiée compte tenu de la courbure de la poutre et de l'effort longitudinal selon la formule (181). La surtension ne doit pas dépasser 5 %.

Si les résistances du matériau de la poutre en traction et en compression sont différentes, les conditions de résistance dans la section dangereuse doivent être satisfaites et pour les fibres intérieures et pour les fibres extérieures, d'après les valeurs des contraintes admissibles $[\sigma_t]$ et $[\sigma_c]$.

Exemple 90. Calculer P, si: $[\sigma] = 4\,000$ kgf/cm², $a = 20$ cm, $d = 1$ cm; l'équation de l'axe géométrique de la barre du ressort est $y = -a \sin \frac{\pi}{a} x$ (fig. 168).

Solution. Les sections dangereuses de la barre sont les sections aux sommets de la sinusoïde où $M = Pa = 20\,P$ kgf·cm,

$N = -P$ kgf, et le rayon de courbure de l'axe géométrique est:

$$\rho_{x=\frac{a}{2}} = \left(\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \left(\frac{\left[1+\pi^2\cos^2\frac{\pi}{a}x\right]^{3/2}}{\frac{\pi^2}{a}\sin\frac{\pi}{a}x}\right)_{x=\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{a}{\pi^2} \approx 0{,}1a = 2 \text{ cm}.$$

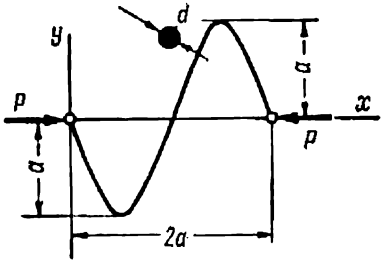


Fig. 168

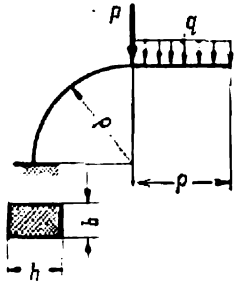


Fig. 169

Pour une section circulaire de diamètre d:

$$W_e = W_i = W \approx 0{,}1d^3 \approx 0{,}1 \text{ cm}^3; \quad F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785 \text{ cm}^2;$$

$$\alpha_i = \frac{1-\frac{d}{8\rho}}{1-\frac{d}{2\rho}} = \frac{\left(1-\frac{1}{8\cdot 2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2\cdot 2}\right)} = 1{,}25.$$

D'après la condition de résistance (181):

$$\max|\sigma_i| = \frac{M}{W}\alpha_i - \frac{N}{F} = \frac{20P}{0{,}1}1{,}25 + \frac{P}{0{,}785} \approx 250P \leqslant 4000.$$

La force admissible est:

$$P \leqslant \frac{4000}{250} = 16 \text{ kgf}.$$

Exemple 91. Etant donnés: $P = 6$ kN, $q = 12$ kN/m, $\rho = 16\cdot 10^{-2}$ m, $b = \frac{3}{4}h$, $[\sigma] = 200$ MN/m² (fig. 169);

calculer h et b.

Solution. Dans la section dangereuse (encastrée) de la poutre :

$$M = P\rho + \frac{3}{2} q\rho^2 = 6 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-2} + \frac{3}{2} \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 16^2 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 1\,421 \text{N} \cdot \text{m} ; \quad N = -P - q\rho = -6 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^3 \times$$

$$\times 16 \cdot 10^{-2} = 7\,920 \text{N} .$$

On détermine les dimensions d'essai de la section de la poutre par un calcul de flexion d'une poutre droite :

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{8} > \frac{M}{[\sigma]} = \frac{1\,421}{200 \cdot 10^6} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 7{,}1 \text{ cm}^3,$$

d'où l'on tire :

$$h > \sqrt[3]{7{,}1 \cdot 8} = 3{,}84 \text{ cm}.$$

Compte tenu de la courbure de la poutre et de l'effort longitudinal dans la section droite, on prend $h = 4$ cm et $b = 3$ cm. Pour ces valeurs on a :

$$W = \frac{3 \cdot 16}{6} = 8 \text{ cm}^3, \quad F = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2,$$

$$\alpha_1 = \left(1 - \frac{h}{6\rho}\right) \Big/ \left(1 - \frac{h}{2\rho}\right) = \left(1 - \frac{4}{6 \cdot 16}\right) \Big/ \left(1 - \frac{4}{2 \cdot 16}\right) \approx 1{,}095.$$

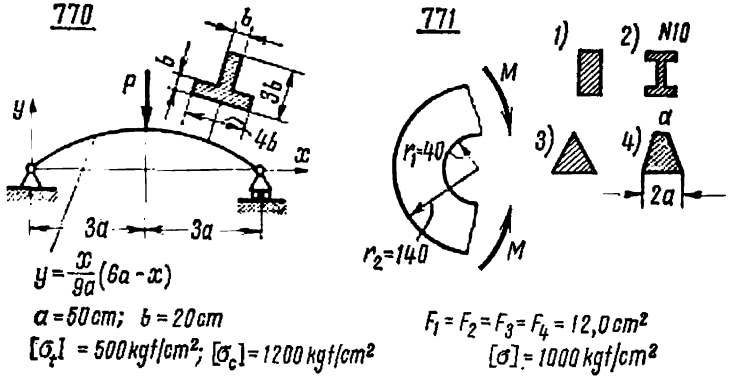
Selon la formule (181), la contrainte de calcul dans les fibres intérieures de la poutre est :

$$\max |\sigma_1| = \left| \frac{M}{W} \alpha_1 + \frac{N}{F} \right| = \frac{1\,421}{8 \cdot 10^{-6}} \cdot 1{,}095 + \frac{7\,920}{12 \cdot 10^{-4}} \approx$$

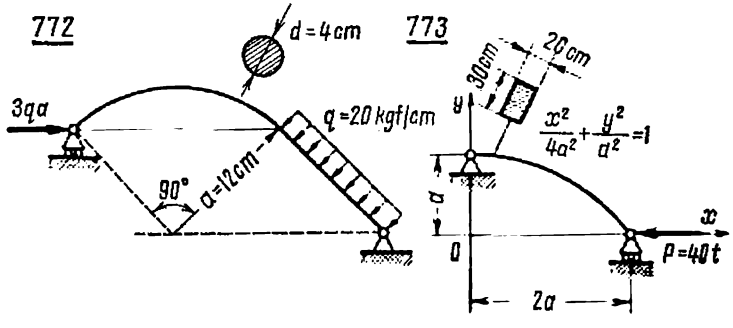
$$\approx 201{,}1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 201{,}1 \text{ MN/m}^2.$$

Puisque la surtension est de 0,55 %, on peut admettre que le choix de la section est satisfaisant.

Problèmes 770-771. Calculer les valeurs des charges admissibles P, M.



Problèmes 772-773. Vérifier la résistance des poutres à courbure initiale. Supposer pour contrainte normale admissible $[\sigma] = 1\,600$ kgf/cm².



XII. MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE DE CALCUL DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES

§ 1. Calcul des déplacements élastiques généralisés.

Méthode de la force fictive généralisée d'ordre zéro

L'expression donnant la valeur de l'énergie potentielle de déformation élastique U, emmagasinée dans un corps ou un système par suite d'une application statique de forces, peut être représentée par une fonction homogène du second ordre soit des forces généralisées P_i, soit des déplacements généralisés δ_i quand il y a dépendance linéaire entre ceux-ci.

Les forces généralisées P_i représentent n'importe quelles actions de forces (forces, moments, groupe de forces, groupe de moments, etc.) avantageusement choisies pour le calcul de l'énergie.

Les déplacements généralisés δ_i sont des quantités qui déterminent les déplacements suivant lesquels les forces généralisées accomplissent un travail (à une force concentrée, par exemple, correspond un déplacement linéique, à un moment un déplacement angulaire, etc.).

Le déplacement élastique généralisé δ dans un corps ou dans un système, provoqué par l'action des forces généralisées, peut être calculé par la formule de Castigliano:

$$\delta = \left(\frac{\partial U_f}{\partial P_f}\right)_{P_f=0}, \tag{183}$$

où P_f est la force généralisée fictive correspondant au déplacement généralisé recherché. Cette force est appliquée au corps ou au système, au point où le déplacement est à déterminer; U_f est l'énergie potentielle de déformation élastique du corps ou du système exprimée par une fonction homogène du second ordre de toutes les forces généralisées appliquées P_i et de la force généralisée fictive P_f.

Si au point où le déplacement généralisé est à déterminer, la force généralisée P, correspondant au déplacement recherché, est donnée, l'application de P_f est superflue et

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}. \tag{184}$$

Si $\left(\frac{\partial U_f}{\partial P_f}\right)_{P_f=0} > 0$ $\left(\text{ou } \frac{\partial U}{\partial P} > 0\right)$, le sens du déplacement généralisé δ coïncide avec celui de la force P_f (ou P).

Si $\left(\frac{\partial U_f}{\partial P_f}\right)_{P_f=0} < 0 \left(\text{ou } \frac{\partial U}{\partial P} < 0\right)$, le sens du déplacement généralisé δ est opposé à celui de la force P_f (ou P).

Le déplacement linéique calculé par la formule de Castigliano, est la projection du déplacement du point d'application de la force correspondante sur la direction de sa ligne d'action.

Méthode de la force fictive unitaire généralisée

Dans le cas le plus général d'action de forces sur un système de barres élastiques composé de barres droites, il est commode de déterminer les déplacements généralisés selon la formule de Maxwell-Mohr :

$$\delta = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EF}\,dx + \sum \int \frac{M_z\bar{M}_z}{EI_z}\,dx + \sum \int \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y}\,dx +$$

$$+ \sum \int \frac{M_t\bar{M}_t}{GI_t}\,dx + \sum k_y \int \frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF}\,dx + \sum k_z \int \frac{Q_z\bar{Q}_z}{GF}\,dx, \quad (185)$$

où N, M_z, M_y, M_t, Q_y et Q_z sont les efforts correspondants dans une section droite arbitraire de chaque tronçon du système, provoqués par toutes les forces généralisées appliquées au système ;

$\bar{N}$, $\bar{M}_z$, $\bar{M}_y$, $\bar{M}_t$, $\bar{Q}_y$ et $\bar{Q}_z$ ces mêmes efforts, provoqués seulement par l'action de la force fictive sur le système, correspondant au déplacement généralisé recherché et égale à l'unité ;

E et G les modules d'élasticité longitudinale et transversale du matériau du tronçon de la barre ;

F l'aire de la section droite où sont déterminés les efforts ;

I_z et I_y les moments d'inertie principaux centraux de l'aire F ;

I_t le moment d'inertie de torsion de l'aire F ; k_y et k_z les coefficients de forme de la section caractérisant la non-uniformité de la répartition des contraintes de cisaillement en flexion ; dx l'élément de l'axe géométrique du tronçon.

L'intégration est effectuée suivant la longueur de chaque tronçon, la sommation suivant tous les tronçons.

Pour les systèmes de barres articulées plans avec forces appliquées aux nœuds :

$$\delta = \sum \frac{N\bar{N}}{EF}\,l, \quad (186)$$

où l désigne les longueurs des tronçons.

Pour les systèmes dont les tronçons sont soumis seulement à une torsion :

$$\delta = \sum \int \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_t} dx. \tag{187}$$

Pour les portiques plans dans lesquels les effets des efforts N et Q sur les déformations sont petits :

$$\delta = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx. \tag{188}$$

Pour les systèmes composés de barres de faible courbure

$$\delta = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds, \tag{189}$$

où ds est l'élément de l'axe géométrique du tronçon curviligne. Plus exactement :

$$\delta = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds. \tag{190}$$

Exemple 92. Etant donnés : P, a, l, E, I (fig. 170,a) ; calculer la flèche f.

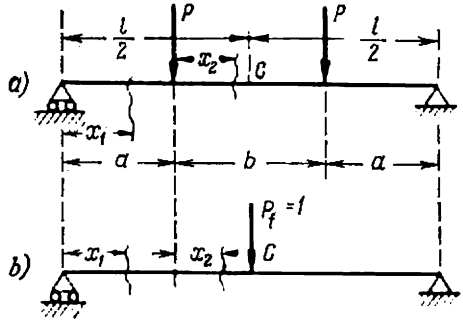


Fig. 170

Solution. Déterminons la flèche f dans la section médiane de la poutre d'après la formule (188) écrite sous la forme suivante :

$$f = \frac{1}{EI} \sum \int M\bar{M} dx.$$

Les valeurs des moments fléchissants dans des sections arbitraires de la poutre provoqués :

par l'action des forces données P sont :

$$M_a = Px_1; \quad M_b = Pa;$$

par l'action de la force unitaire fictive $P_f = 1$ (fig. 170,*b*) sont :

$$\overline{M}_a = \frac{x_1}{2}; \quad \overline{M}_b = \frac{a + x_2}{2}.$$

La valeur de la flèche cherchée est :

$$f = 2\frac{P}{2EI}\left[\int_0^a x_1^2 dx_1 + a\int_0^{l/2-a}(a + x_2)\,dx_2\right] = \frac{Pa^3}{24EI}\left(3\frac{l^2}{a^2} - 4\right).$$

Déterminons l'effet de l'effort tranchant sur la flèche. Selon la formule (185), le déplacement vertical d'une poutre en flexion dû à l'effort tranchant, est :

$$f_Q = \frac{k}{GF}\sum\int Q\overline{Q}\,dx.$$

Puisque les valeurs des efforts tranchants produits par la charge fictive dans les tronçons de la poutre sont respectivement égales à :

$$Q_a = P, \quad Q_b = 0, \quad \overline{Q}_a = \frac{1}{2}, \quad \overline{Q}_b = \frac{1}{2},$$

on a :

$$f_Q = 2k\frac{Pa}{2GF} = k\frac{Pa}{GF} \quad \text{et} \quad \frac{f_Q}{f} = 24k\frac{EI}{GFa^2\left(3\frac{l^2}{a^2} - 4\right)} =$$

$$= 24k\frac{E}{G}\frac{i^2}{a^2\left(3\frac{l^2}{a^2} - 4\right)},$$

où $i^2 = \frac{I}{F}$.

Compte tenu du fait que pour les matériaux isotropes la valeur du rapport $\frac{E}{G}$ est située dans les limites $2 \leqslant \frac{E}{G} \leqslant 3$, les valeurs extrêmes du rapport $\frac{f_Q}{f}$ seront :

$$\frac{f_Q}{f} = (48 \div 72)\frac{ki^2}{a^2\left(3\frac{l^2}{a^2} - 4\right)}.$$

Si $a \to 0$:

$$\frac{f_Q}{f} \to (16 \div 24)\,k\frac{i^2}{l^2};$$

si $a = \frac{l}{2}$:

$$\frac{f_Q}{f} = (24 \div 36)\, k \frac{i^2}{l^2} = 1{,}5 \left(\frac{f_Q}{f}\right)_{a \to 0}$$

Pour le second cas $\left(a = \frac{l}{2}\right)$ où l'effet de l'effort tranchant sur le déplacement vertical est maximal, considérons des poutres de sections droites rectangulaire et circulaire.

Puisque pour un rectangle de hauteur h et pour un cercle de diamètre d, $i^2 = \frac{h^2}{12}$ ou $i^2 = \frac{d^2}{16}$, $k = \frac{6}{5}$ et $k = \frac{32}{27}$ respectivement, pour les poutres de section rectangulaire on a:

$$\frac{f_Q}{f} = (2{,}4 \div 3{,}6) \frac{h^2}{l^2}$$

et de section circulaire:

$$\frac{f_Q}{f} = \left(\frac{16}{9} \div \frac{8}{3}\right) \frac{d^2}{l^2} \approx (1{,}778 \div 2{,}667) \frac{d^2}{l^2}.$$

D'où l'on voit que la valeur de f_Q peut être 5 % de f et plus pour:

$$l \leqslant \left(\sqrt{\frac{2{,}4}{0{,}05}} \div \sqrt{\frac{3{,}6}{0{,}05}} \right) h \approx (7 \div 8)\, h$$

et

$$l \leqslant \left(\sqrt{\frac{16}{9 \cdot 0{,}05}} \div \sqrt{\frac{8}{3 \cdot 0{,}05}} \right) d \approx (6 \div 7)\, d,$$

c'est-à-dire pour des poutres pas très courtes.

Si, par exemple, on prend la poutre en double té N° 20a d'acier laminé, on aura $\frac{E}{G} = 2{,}5$; $i = 8{,}37$ cm; $k = 2{,}78$ et:

$$\frac{f_Q}{f} = 24 \cdot 2{,}78 \cdot 2{,}5 \frac{8{,}37^2}{2l^2} = \frac{5\,840}{l^2}.$$

Par conséquent, la valeur de f_Q atteint 5 % de celle de f déjà pour:

$$l = \sqrt{\frac{5\,840}{0{,}05}} \approx 341 \text{ cm} \approx 17h.$$

Exemple 93. Etant donnés: P, a, b, c, F, I_t, E, G (fig. 171,*a*); calculer δ, le déplacement vertical du point d'application de la force P, compte tenu de toutes les déformations de la barre.

Solution. Nous déterminerons le déplacement cherché δ à l'aide de la formule (185).

Seul le tronçon b est soumis à une traction. Les efforts longitudinaux, dus aux forces P et $P_f = 1$ (fig. 171,*b*) sont égaux à $N = P$; $\overline{N} = 1$.

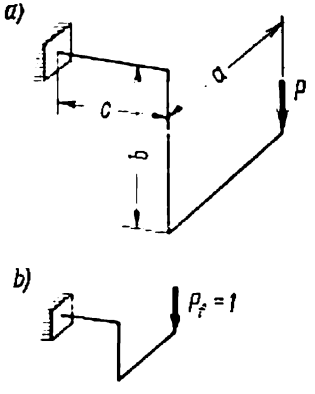


Fig. 171

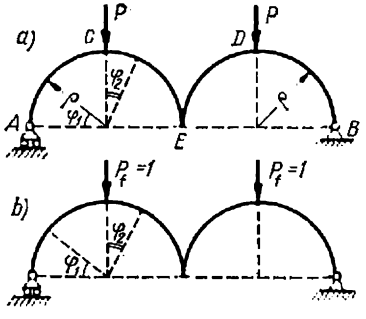


Fig. 172

Tous les tronçons de la barre sont soumis à une flexion. Les moments fléchissants et les efforts tranchants dans des sections droites arbitraires des tronçons de la barre, dus aux forces P et $P_f = 1$, sont respectivement:

$$M_a = Px;\ \overline{M}_a = x;\ M_b = Pa;\ \overline{M}_b = a;\ M_c = Px;\ \overline{M}_c = x;$$

$$Q_a = P;\quad \overline{Q}_a = 1;\ Q_b = 0;\quad \overline{Q}_b = 0;\ Q_c = P;\quad \overline{Q}_c = 1.$$

Seul le tronçon c est soumis à une torsion. Les moments de torsion dus aux forces P et $P_f = 1$ sont: $M_t = Pa$, $\overline{M}_t = a$.

En portant les valeurs trouvées dans la formule (185), on obtient pour le déplacement cherché:

$$\delta = \frac{Pb}{EF} = \frac{P}{EI}\left(\int_0^a x^2\,dx + a^2b + \int_0^c x^2\,dx\right) + \frac{kP}{GF}(a+c) + \frac{Pa^2c}{GI_t} =$$

$$= P\left\{\frac{1}{E}\left[\frac{b}{F} + \frac{1}{I}\left(\frac{a^3}{3} + a^2b + \frac{c^3}{3}\right)\right] + \frac{1}{G}\left[\frac{k}{F}(a+c) + \frac{a^2c}{I_t}\right]\right\}.$$

Exemple 94. Etant donnés: P, ρ, E, I, et une poutre de faible courburé (fig. 172,*a*);

calculer le déplacement vertical δ_C de la section C.

Solution. Pour ne pas rompre la symétrie du système par rapport à l'axe vertical passant par le point E, on applique la force fictive $P_f = 1$ dans les sections C et D (fig. 172,*b*) et on considère seulement une moitié du système.

Dans les sections droites arbitraires définies par les angles φ_1 et φ_2, les valeurs des moments fléchissants dues à la force P seront:

$$M_{\mathrm{I}} = -P\rho(1-\cos\varphi_1), \qquad M_{\mathrm{II}} = -P\rho;$$

et celles, dues à la force $P_f = 1$:

$$\bar{M}_{\mathrm{I}} = -\rho(1-\cos\varphi_1), \qquad \bar{M}_{\mathrm{II}} = -\rho.$$

D'après la formule (189), on trouve le déplacement cherché:

$$\delta_C = \delta_D = \frac{P}{EI}\left(\int_0^{\pi/2} M_{\mathrm{I}}\bar{M}_{\mathrm{I}}\,d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} M_{\mathrm{II}}\bar{M}_{\mathrm{II}}\,d\varphi_2\right) =$$

$$= \frac{P\rho^3}{EI}\left[\int_0^{\pi/2}(1-\cos\varphi_1)^2\,d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} d\varphi_2\right] =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\pi - 2\right)\frac{P\rho^3}{EI} \approx 1{,}927\,\frac{P\rho^3}{EI}.$$

Exemple 95. Etant donnés: l'intensité q de la charge uniformément répartie suivant la direction horizontale, ρ, $P = 2q\rho$, E, I (fig. 173,*a*);

calculer le déplacement δ de l'appui mobile.

Solution. Pour le système donné, des conditions de la statique, on obtient:

$$B_x = 4q\rho, \qquad A_y = 4q\rho, \qquad B_y = 2q\rho.$$

Les moments fléchissants dans les tronçons du système dus aux forces données sont:

$$M_{\mathrm{I}} = Px = 2q\rho x; \quad M_{\mathrm{II}} = -P\rho(1+\sin\varphi) - A_y\rho(1-\cos\varphi) +$$

$$+\frac{q\rho^2}{2}(1-\cos\varphi)^2 = \frac{q\rho^2}{2}(\cos^2\varphi + 6\cos\varphi - 4\sin\varphi - 11);$$

$$M_{\mathrm{III}} = B_x x = 4q\rho x.$$

Pour le système auxiliaire (fig. 173,*b*), des conditions de la statique, on obtient:

$$B'_x = 1, \qquad A'_y = \frac{1}{2}, \qquad B'_y = \frac{1}{2}.$$

Les moments fléchissants dans les tronçons du système auxiliaire seront :

$$\bar{M}_{\mathrm{I}} = x; \quad \bar{M}_{\mathrm{II}} = -\rho(1+\sin\varphi) - \frac{1}{2}\rho(1-\cos\varphi) =$$

$$= \frac{\rho}{2}(\cos\varphi - 2\sin\varphi - 3); \quad \bar{M}_{\mathrm{III}} = x.$$

D'après la formule (189) on obtient la valeur suivante pour le

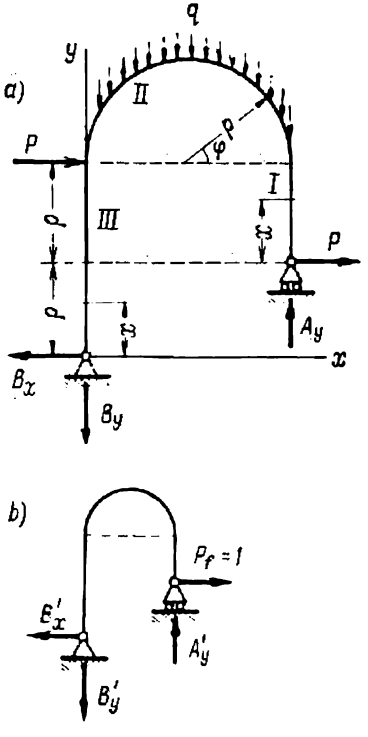


Fig. 173

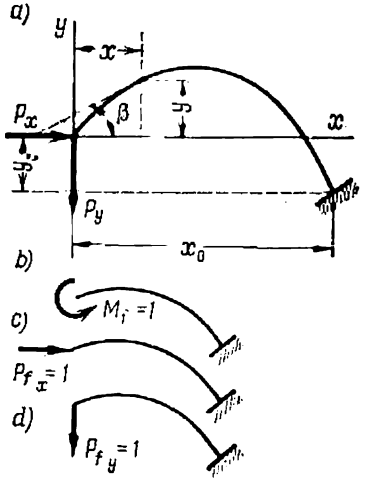


Fig. 174

déplacement cherché δ :

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[2q\rho\int_0^{\rho} x^2\,dx + \frac{q\rho^4}{4}\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi + 6\cos\varphi - 4\sin\varphi - 11)\times\right.$$

$$\left.\times(\cos\varphi - 2\sin\varphi - 3)\,d\varphi + 4q\rho_0\int_0^{2\rho} x^2\,dx\right] =$$

$$= \frac{q\rho^4}{EI}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\pi + 64 - \frac{4}{3} + 4\pi + 33\pi\right) + \frac{32}{3}\right] =$$

$$= \frac{q\rho^4}{EI}\left(27 + \frac{77}{8}\pi\right) \approx 57{,}24\frac{q\rho^4}{EI}.$$

Exemple 96. Soient : P_x, P_y, s la longueur de l'axe géométrique de la poutre à courbure initiale arbitraire, E, I (fig. 174,*a*).

Calculer la rotation θ, les déplacements horizontal δ_x et vertical δ_y de la section où sont appliquées les forces P_x et P_y.

Solution. Les moments fléchissants et les efforts longitudinaux dans une section droite arbitraire de la poutre de coordonnées x, y et d'angle β, formé par la tangente et l'axe x, dus à l'action des forces données P_x et P_y (fig. 174,*a*) sont :

$$M = P_x y + P_y x, \quad N = -P_x \cos\beta + P_y \sin\beta ;$$

ceux dus à l'action du moment $M_t = 1$ (fig. 174,*b*) : $\overline{M} = 1$, $\overline{N} = 0$; ceux dus à l'action de la force $P_{t_x} = 1$ (fig. 174,*c*) :

$$\overline{M} = y, \quad \overline{N} = -\cos\beta ;$$

ceux dus à l'action de la force $P_{t_y} = 1$ (fig. 174,*d*) : $\overline{M} = x$, $\overline{N} = \sin\beta$.

Selon la formule (189) on obtient :

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(P_x \int_0^s y\,ds + P_y \int_0^s x\,ds\right) = \frac{1}{EI}(P_x S_x + P_y S_y),$$

où $S_x = \int_0^s y\,ds$ et $S_y = \int_0^s x\,ds$ sont les moments statiques de l'arc s par rapport aux axes x et y :

$$\delta_x = \frac{1}{EI}\left(P_x \int_0^s y^2\,ds + P_y \int_0^s xy\,ds\right) + \frac{1}{EF}\left(P_x \int_0^s \cos^2\beta\,ds - \right.$$

$$\left. - P_y \int_0^s \sin\beta\cos\beta\,ds\right) = \frac{1}{EI}(P_x I_x + P_y I_{xy}) +$$

$$+ \frac{1}{EF}\left(P_x \int_0^s \cos^2\beta\,ds - \frac{1}{2}P_y \int_0^s \sin 2\beta\,ds\right),$$

où $I_x = \int_0^s y^2 ds$ et $I_{xy} = \int_0^s xy\,ds$ sont le moment d'inertie linéique et le produit d'inertie de l'arc s par rapport à l'axe x et aux axes

x et y;

$$\delta_y = \frac{1}{EI}\left(P_x \int_0^s yx\,ds + P_y \int_0^s x^2\,ds\right) + \frac{1}{EF}\left(-P_x \int_0^s \cos\beta \sin\beta\,ds + \right.$$

$$\left. + P_y \int_0^s \sin^2\beta\,ds\right) = \frac{1}{EI}(P_x I_{xy} + P_y I_y) +$$

$$+ \frac{1}{EF}\left(-\frac{P_x}{2}\int_0^s \sin 2\beta\,ds + P_y \int_0^s \sin^2\beta\,ds\right),$$

où $I_y = \int_0^s x^2 ds$ est le moment d'inertie linéique de l'arc s par rapport à l'axe y.

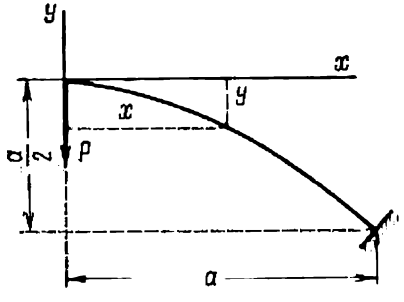


Fig. 175

Considérons une poutre de faible courbure dont l'axe géométrique est une parabole: $y = -\frac{x^2}{2a}$; $P_x = 0$; $P_y = P$ (fig. 175).

Puisque:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{a} \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx}{a}\sqrt{a^2 + x^2},$$

$$S_y = \frac{1}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left|\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 + x^2)^3}\right|_0^a = \frac{a^2}{3}(2\sqrt{2} - 1);$$

$$I_{xy} = -\frac{1}{2a^2}\int_0^a x^3\sqrt{a^2 + x^2}\,dx = -\frac{1}{2a^2}\left|\frac{1}{5}\sqrt{(a^2 + x^2)^5} - \right.$$

$$\left. - \frac{a^2}{3}\sqrt{(a^2 + x^2)^3}\right|_0^a = \frac{a^3}{15}(\sqrt{2} + 1);$$

$$I_y = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left|\frac{x}{4}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a}{8}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a^2 \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right]\right|_0^a = \frac{a^3}{8}\left(3\sqrt{2} + \operatorname{Log}\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right).$$

En portant les valeurs ainsi trouvées dans les formules, donnant les valeurs de θ, δ_x et δ_y dans l'exemple 96, on obtient:

$$\theta = \frac{PS_y}{EI} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \cdot \frac{Pa^2}{EI} \approx 0{,}609 \frac{Pa^2}{EI};$$

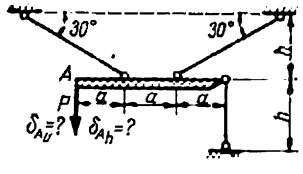
$$\delta_x = \frac{PI_{xy}}{EI} = -\frac{\sqrt{2}+1}{15} \cdot \frac{Pa^3}{EI} \approx -0{,}161 \frac{Pa^3}{EI};$$

$$\delta_y = \frac{PI_y}{EI} = \frac{1}{8}\left(3\sqrt{2} + \operatorname{Log}\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\frac{Pa^3}{EI} \approx 0{,}432 \frac{Pa^3}{EI}.$$

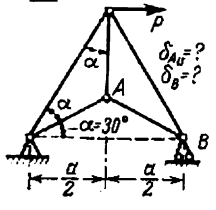
Problèmes 774-787. Calculer les déplacements généralisés indiqués sur les figures.

Dans tous les problèmes et dans les problèmes qui suivront on admettra que les rigidités des sections des barres sont connues. En l'absence d'indications supplémentaires, supposer que les modules d'élasticité des matériaux et les caractéristiques géométriques des sections de toutes les barres du système et de tous les tronçons des barres sont identiques. Dans les problèmes 782 et 783 calculer le déplacement vertical en tenant compte de l'effort tranchant.

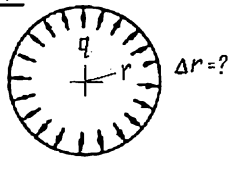
774



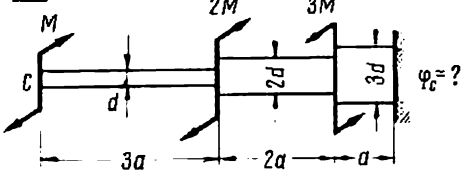
775



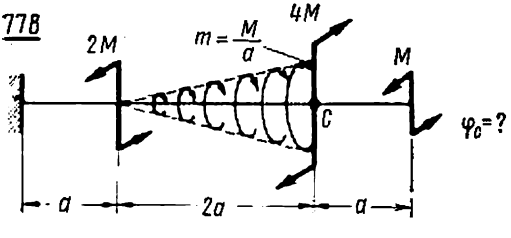
776



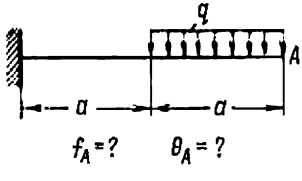
777

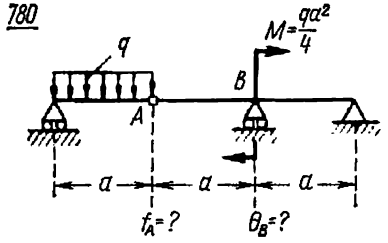


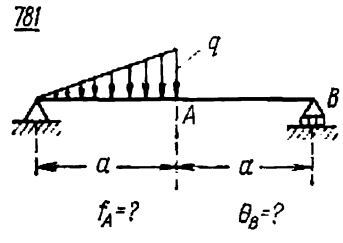
778

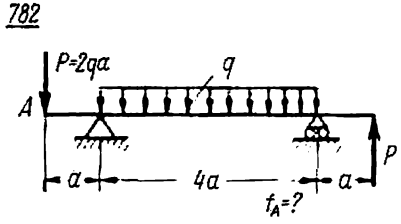


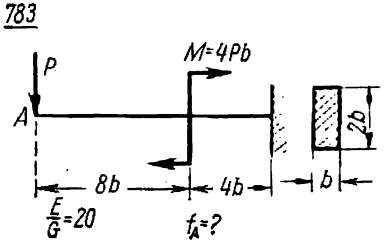
779

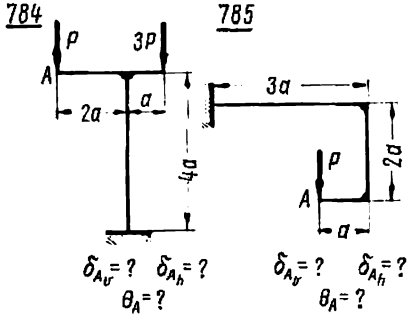


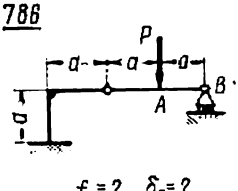


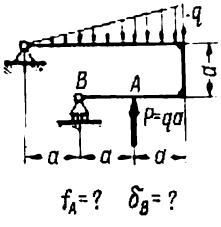




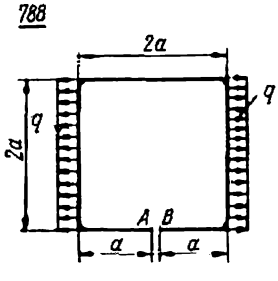


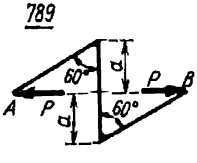


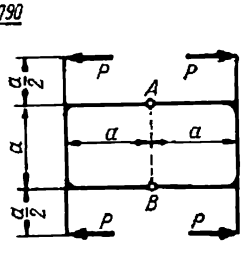




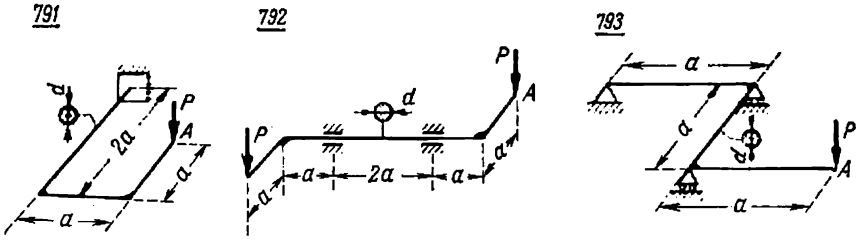
Problèmes 788-790. Calculer la variation des distances δ_{AB} entre les sections A et B.



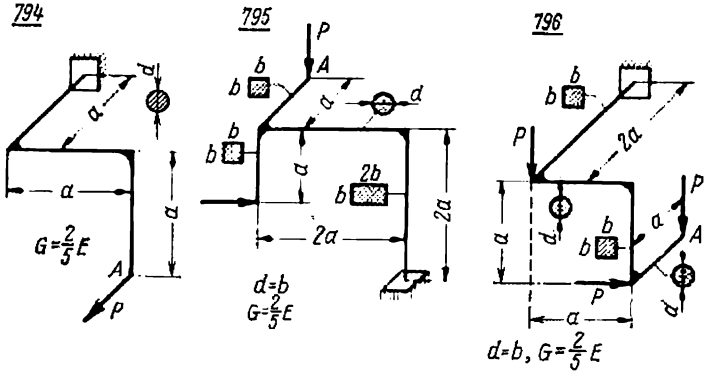




Problèmes 791-793. Calculer les déplacements verticaux δ de la section A.

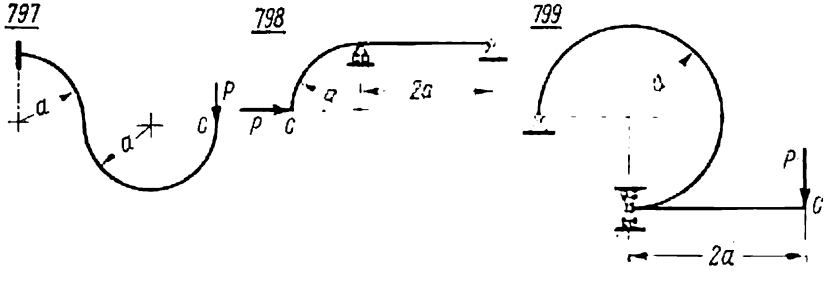


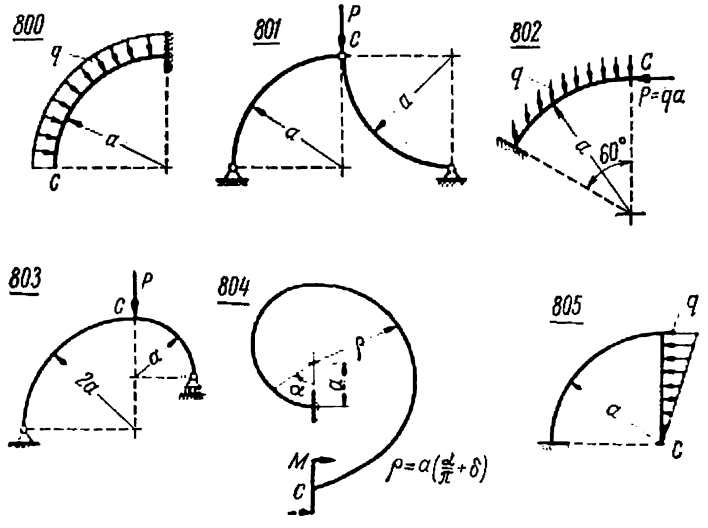
Problèmes 794-796. Calculer le déplacement linéique δ de la section A suivant la direction de la force P appliquée dans cette section.



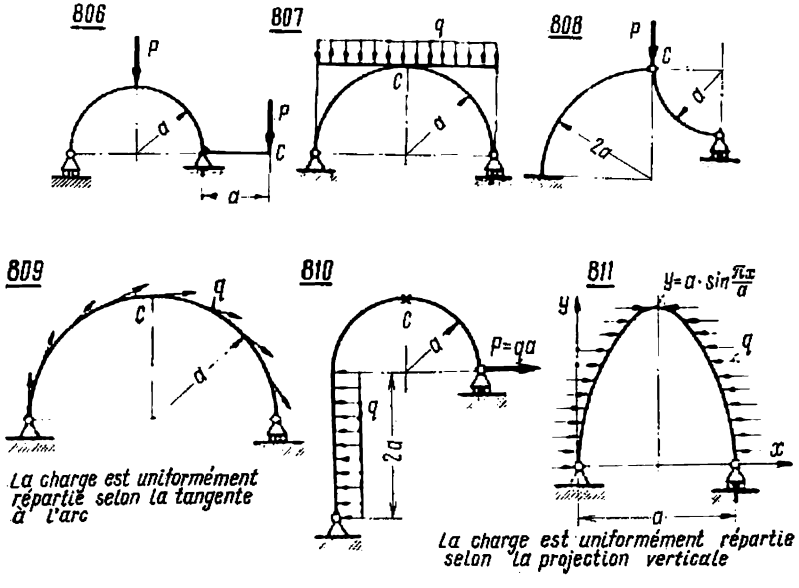
Problèmes 797-805. Calculer les déplacements linéiques verticaux δ_v, horizontaux δ_h et angulaires θ de la section C.

Dans le problème 801 calculer la rotation de la section à gauche de l'articulation.

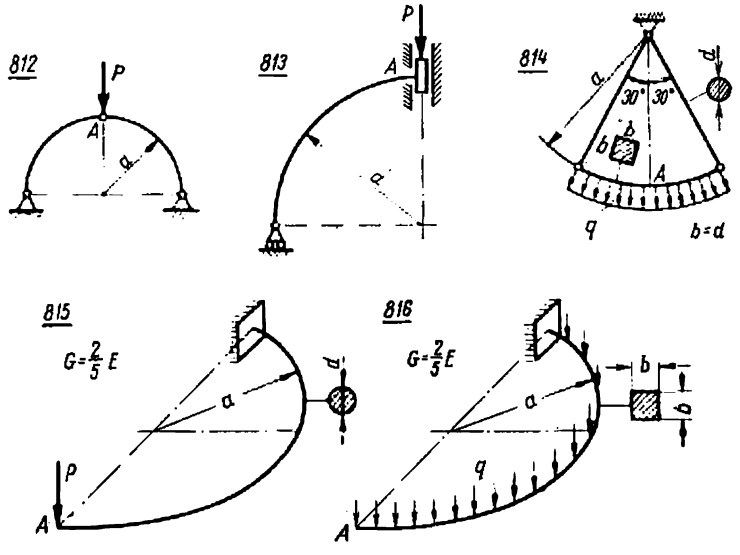




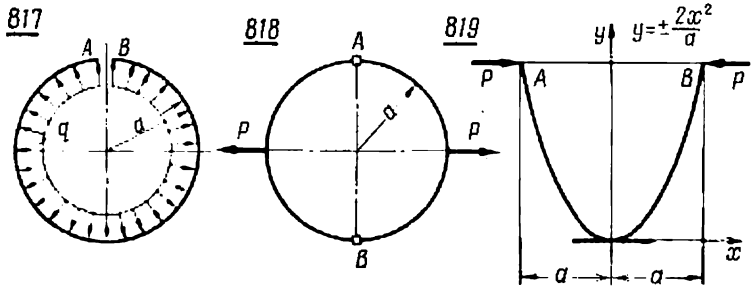
Problèmes 806-811. Calculer les déplacements δ de l'appui mobile et les déplacements verticaux δ_v de la section C.
Dans le problème 811 calculer seulement la quantité δ.



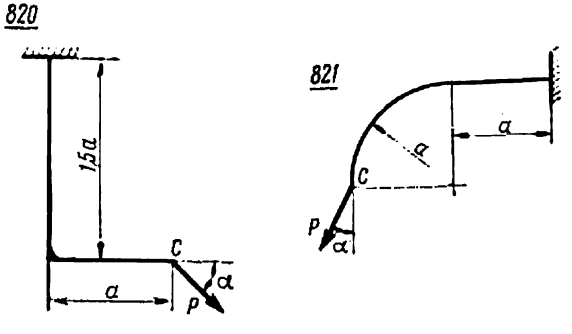
Problèmes 812-816. Calculer les déplacements verticaux δ de la section A.



Problèmes 817-819. Déterminer les variations des distances δ_{AB} entre les sections A et B.



Problèmes 820-821. Calculer la valeur de l'angle α pour laquelle la section C se déplacera seulement suivant la verticale.



Méthode de multiplication des diagrammes (règle de Vérechtchaguine)

Si la rigidité de la section droite de la barre est constante dans un tronçon, chaque intégrale de la formule de Maxwell-Mohr (185) peut être calculée en multipliant l'aire ω du diagramme de l'effort dû aux forces données (fig. 176) par la coordonnée ξ du diagramme de ce même effort dû à une force unitaire fictive généralisée (ce diagramme est nécessairement linéaire), la coordonnée ξ passant par le centre de gravité du premier diagramme.

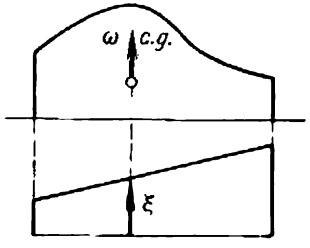


Fig. 176

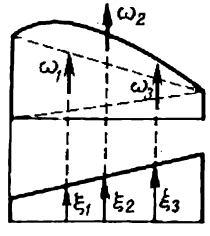


Fig. 177

En pratique cette règle de Vérechtchaguine est employée dans les portiques pour la détermination des déplacements linéique et angulaire provoqués par les moments fléchissants. La formule donnant la valeur du déplacement s'écrit sous la forme:

$$\delta = \sum \frac{\omega \xi}{EI}, \tag{191}$$

où la sommation s'étend à tous les tronçons du système.

Les tronçons doivent être distingués non seulement selon les charges, mais aussi selon les signes du diagramme de M ou de $\overline{M}$ et la constance de la section droite. Pour des diagrammes de M et de $\overline{M}$ de mêmes signes le produit $\omega\xi > 0$, pour des diagrammes de signes contraires $\omega\xi < 0$.

Pour cette raison la position des diagrammes de M et de $\overline{M}$ par rapport aux lignes de leurs valeurs nulles dans les tronçons peut être arbitraire, mais ils seront d'un même côté s'ils sont de même signe.

Si les diagrammes de M et de $\overline{M}$ sont linéaires, on peut indifféremment calculer l'aire ω ou la coordonnée ξ de l'un ou de l'autre des diagrammes.

Si le diagramme de M a une forme compliquée, on peut le diviser en parties et déterminer les aires ω_1, ω_2, ω_3 . . . de ces parties et leurs centres de gravité (fig. 177). Il faut mesurer les ordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 . . . des centres de gravité. On aura alors:

$$\omega\xi = \omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2 + \omega_3\xi_3 + \ldots$$

Dans les cas où sur quelques tronçons de la barre le diagramme de M est représenté par une même ligne droite (fig. 178), on peut multiplier l'aire ω de tout le diagramme de M par la coordonnée correspondante ξ du diagramme de $\overline{M}$.

Si dans un tronçon de la barre la section droite est variable, on calcule l'aire ω du diagramme non du moment fléchissant réel mais du moment fléchissant réduit :

$$M_{\text{réd}} = M \frac{I_0}{I},$$

où I_0 est le moment d'inertie de la section droite constante à laquelle est réduit conventionnellement le tronçon, et I le moment d'inertie de la section variable.

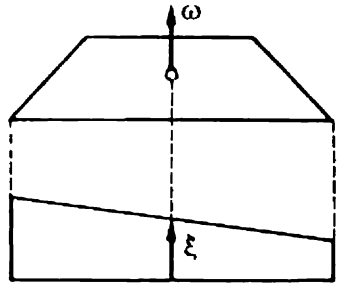


Fig. 178

Exemple 97. Etant donnés : P, a, E, I (fig. 179,*a*) ; calculer le déplacement horizontal δ_A de la section A.

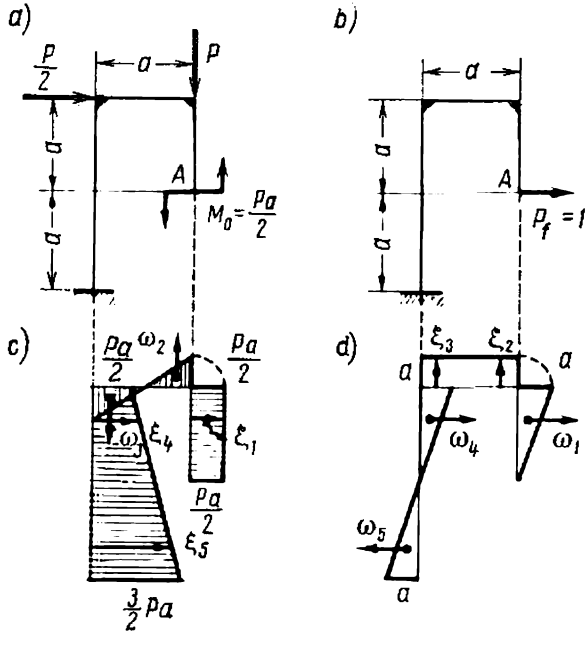


Fig. 179

Solution. Les diagrammes des moments fléchissants sont représentés fig. 179,*c* et *d* : le diagramme hachuré est dû aux forces

données, le diagramme non hachuré à la force fictive $P_f = 1$ appliquée dans la section A (fig. 179,b) et dirigée à droite suivant l'horizontale.

Puisque :

$$\omega_1 = \frac{a^2}{2}; \quad \xi_1 = \frac{Pa}{2}; \quad \omega_2 = \frac{Pa^2}{8}; \quad \xi_2 = a;$$

$$\omega_3 = \frac{Pa^2}{8}; \quad \xi_3 = a;$$

$$\omega_4 = \frac{a^2}{2}; \quad \xi_4 = \frac{2}{3}Pa; \quad \omega_5 = \frac{a^2}{2}; \quad \xi_5 = \frac{4}{3}Pa,$$

compte tenu de la règle des signes, le déplacement cherché selon la formule (191) sera :

$$\delta_A = \frac{1}{EI}(\omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2 - \omega_3\xi_3 - \omega_4\xi_4 + \omega_5\xi_5) = \frac{7}{12}\cdot\frac{Pa^3}{EI}.$$

Exemple 98. Etant donnés : P, a, E et I (fig. 180,a) ; calculer θ_A et f_C.

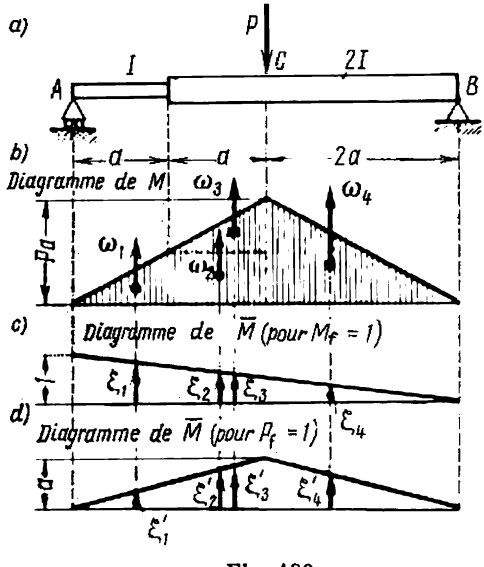


Fig. 180

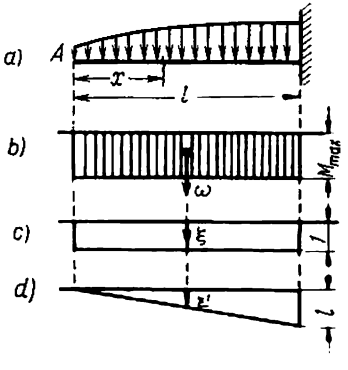


Fig. 181

Solution. Le diagramme de M dû à la force donnée P est représenté fig. 180,b, le diagramme de $\overline{M}$ dû au moment fictif $M_f = 1$, appliqué dans la section A et dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre, est représenté fig. 180,c ; et le diagramme de $\overline{M}$ dû

à la force fictive $P_f = 1$, appliquée dans la section C et dirigée vers le bas suivant la verticale est représenté fig. 180,*d*.

Puisque :

$$\omega_1 = \frac{Pa^2}{4}, \quad \xi_1 = \frac{5}{6}, \quad \xi_1' = \frac{a}{3}; \quad \omega_2 = \frac{Pa^2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{5}{8},$$

$$\xi_2' = \frac{3}{4}a; \quad \omega_3 = \frac{Pa^2}{4}, \quad \xi_3 = \frac{7}{12}, \quad \xi_3' = \frac{5}{6}a; \quad \omega_4 = Pa^2,$$

$$\xi_4 = \frac{1}{3}, \quad \xi_4' = \frac{2}{3}a,$$

(compte tenu de la différence des moments d'inertie des sections des tronçons) selon la formule (191) les déplacements cherchés seront :

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\left[\omega_1\xi_1 + \frac{1}{2}(\omega_2\xi_2 + \omega_3\xi_3 + \omega_4\xi_4)\right] = \frac{29}{48}\frac{Pa^2}{EI};$$

$$f_C = \frac{1}{EI}\left[\omega_1\xi_1' + \frac{1}{2}(\omega_2\xi_2' + \omega_3\xi_3' + \omega_4\xi_4')\right] = \frac{17}{24}\frac{Pa^3}{EI}.$$

Exemple 99. Soient : l, E, $[\sigma]$, une poutre d'égale résistance de hauteur constante h (fig. 181,*a*).

Calculer θ_A, f_A.

Solution. Pour une poutre d'égale résistance, on a :

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}} = \frac{M_x}{[\sigma]}$$

Dans la section dangereuse :

$$W = \frac{2I}{h} = \frac{M_{max}}{[\sigma]}.$$

Si, par convention, la poutre est réduite à une section dangereuse constante, $I_0 = I$, et le moment fléchissant réduit :

$$M_{réd} = M_x\frac{I_0}{I_x} = M_{max} = \text{const}.$$

Le diagramme du moment réduit (fig. 181,*b*) est un rectangle de hauteur :

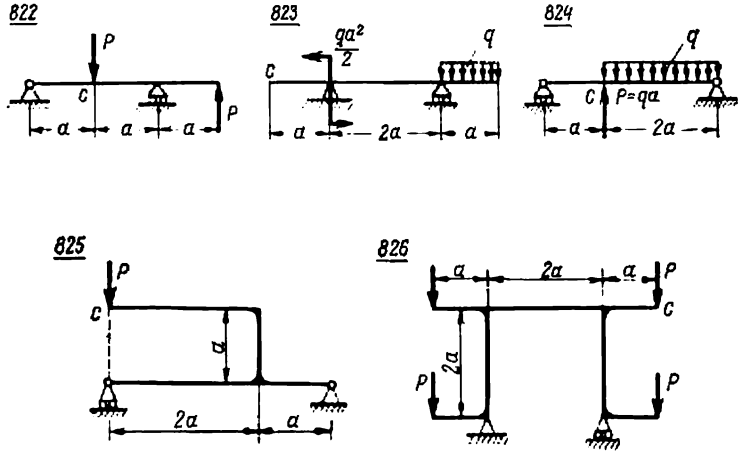
$$M_{max} = \frac{2I[\sigma]}{h}.$$

Les diagrammes de M dus à $M_f = 1$ et à $P_f = 1$, appliqués dans la section A et dirigés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre pour $M_f = 1$ et verticalement vers le bas pour $P_f = 1$, sont représentés fig. 181,*c*, *d*.

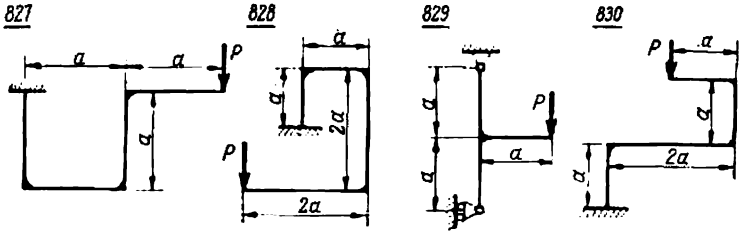
Puisque $\omega = M_{max} l = \dfrac{2I[\sigma]}{h} l$; $\xi = 1$ et $\xi' = \dfrac{l}{2}$, les déplacements cherchés seront :

$$\theta_A = \frac{\omega\xi}{EI} = \frac{M_{max} l}{EI} = \frac{2[\sigma] l}{Eh}; \quad f_A = \frac{\omega\xi'}{EI} = \frac{M_{max} l^2}{2EI} = \frac{[\sigma] l^2}{Eh}.$$

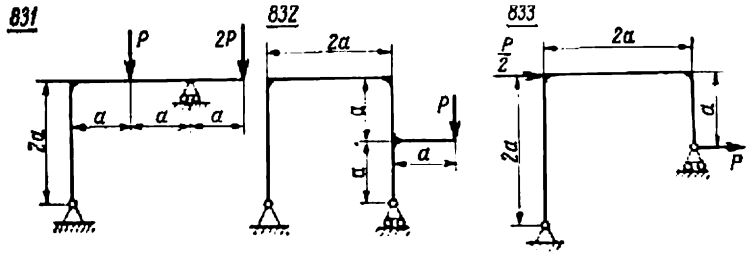
Problèmes 822-826. Calculer les déplacements verticaux f et les rotations θ de la section C.



Problèmes 827-830. Calculer les déplacements verticaux δ_v et horizontaux δ_h de la section où est appliquée la force P.



Problèmes 831-833. Calculer les déplacements δ de l'articulation mobile.



§ 2. Calcul des systèmes hyperstatiques

Principes du travail minimum

Le calcul des systèmes élastiques hyperstatiques peut être effectué à l'aide du principe du travail minimum. Selon ce principe les valeurs des forces généralisées surabondantes inconnues sont telles que les forces généralisées, agissant sur le système, produisent un travail minimum.

On résout les problèmes d'après le schéma suivant.

En supprimant les liaisons surabondantes, le système hyperstatique est rendu isostatique, mais géométriquement invariable. On l'appelle *système principal.*

Pour que le système donné soit équivalent au système principal, on applique à ce dernier toutes les forces données P_i et toutes les forces généralisées surabondantes inconnues X_i.

On détermine ensuite l'énergie potentielle de déformation élastique du système principal comme une fonction de second ordre de P_i et X_i.

Puisque les déplacements généralisés correspondant aux forces généralisées surabondantes inconnues sont nuls, on établit les équations de forme:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{192}$$

Ces équations déterminent toutes les forces généralisées surabondantes inconnues X_i.

Les équations (192) expriment les conditions de minimum de l'énergie potentielle de déformation élastique du système considérée comme fonction des forces généralisées surabondantes inconnues.

Pour les systèmes de barres les équations du principe du travail minimum peuvent être exprimées par la formule de Maxwell-Mohr.

Si le système est constitué de barres droites soumises à une traction, compression, flexion et torsion, chaque équation (192)

s'écrit sous la forme suivante:

$$\sum \int \frac{N\bar{N}}{EF}\,dx + \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx + \sum k \int \frac{Q\bar{Q}}{GF}\,dx + \\ + \sum \int \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_t}\,dx = 0, \qquad (193)$$

où N, M, Q et M_t sont les efforts correspondants dans une section droite arbitraire de chaque tronçon du système principal équivalent dus aux forces données P_i et aux forces généralisées surabondantes inconnues X_i;

$\bar{N}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$ et $\bar{M}_t$, ces mêmes efforts dans le système principal mais dus à l'action d'une seule force généralisée surabondante inconnue $X_i = 1$.

Donc, pour résoudre un système hyperstatique de degré n, il faut considérer $n + 1$ états de ce système: l'état principal équivalent sous l'action des forces P_i et X_i et n états auxiliaires, dont chacun se trouve sous l'action d'une seule force des $X_i = 1$.

Pour des systèmes plans de barres articulées avec des forces agissant aux nœuds les équations (193) se simplifient et prennent la forme:

$$\sum \int \frac{N\bar{N}}{EF}\,dx = 0. \qquad (194)$$

Pour les portiques plans dans lesquels la valeur des efforts longitudinaux N et tranchants Q est petite, on peut utiliser les équations simplifiées:

$$\sum \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = 0. \qquad (195)$$

Pour les systèmes dont les barres sont soumises seulement à une torsion, on a:

$$\sum \int \frac{M_t \bar{M}_t}{GI_t}\,dx = 0. \qquad (196)$$

Pour les poutres planes hyperstatiques de faible courbure initiale

$$\sum \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,ds = 0. \qquad (197)$$

Dans les calculs plus précis on établit les équations en tenant compte des efforts longitudinaux:

$$\sum \int \frac{N\bar{N}}{EF}\,ds + \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,ds = 0. \qquad (198)$$

Le système hyperstatique doit être rendu isostatique de telle manière que le système principal soit le plus simple et le plus commode à calculer.

Il est rationnel de rendre isostatique un système hyperstatique géométriquement symétrique, soumis à une charge symétrique

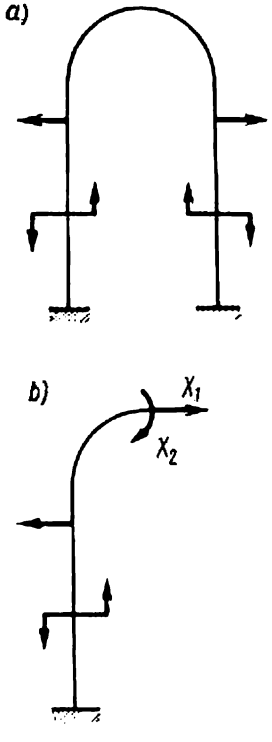


Fig. 182

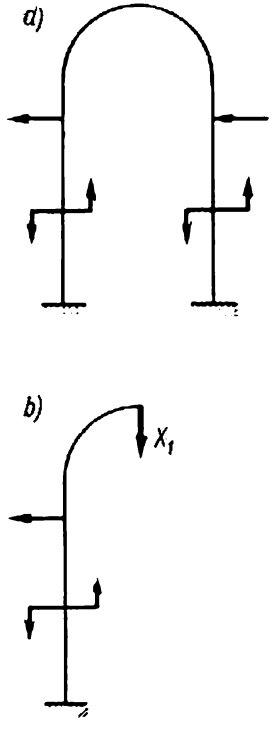


Fig. 183

(fig. 182,*a*) et antisymétrique (fig. 183,*a*), en le coupant suivant le plan de symétrie, ce qui entraîne une diminution du nombre des forces généralisées surabondantes inconnues à déterminer et permet de considérer seulement l'une des parties isolées du système (fig. 182,*b* et fig. 183,*b*).

Dans la section coïncidant avec le plan de symétrie, les efforts antisymétriques Q et M_t sont nuls pour une charge symétrique, et les efforts symétriques N et M sont nuls pour une charge antisymétrique (fig. 184).

Pour les barres droites du système les intégrales de l'équation (193) peuvent être calculées par la méthode de multiplication des diagrammes.

Après avoir calculé le système hyperstatique, on peut déterminer le déplacement généralisé d'une section quelconque en considérant ou bien le système donné, ou bien n'importe quel système principal équivalent possible. Il est rationnel de choisir un système pour lequel la détermination des efforts dus à une force unitaire généralisée fictive est la plus simple.

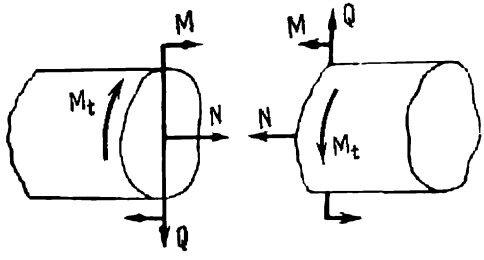


Fig. 184

Exemple 100. Soient: $P = 8$ t, $a = 1$ m, $\beta_1 = 30°$, $\beta_2 = 60°$, $E_I = E_{II} = E_{III} = E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2 (fig. 185,*a*).
Calculer $\sigma_{I,\,II,\,III}$ et δ_A.

S o l u t i o n. Puisque les barres du système donné ont une même rigidité de sections et sont soumises seulement à une traction par des efforts constants suivant la longueur, pour calculer le système hyperstatique, on utilise l'équation simplifiée (194):

$$\sum N\overline{N}l = 0. \qquad \text{(a)}$$

Comme système principal équivalent on prend le système indiqué fig. 185,*b*. Pour ce système, des conditions de la statique on obtient:

$$N_I = \frac{P - X}{2\cos\beta_1} = \frac{P - X}{\sqrt{3}}, \quad N_{II} = \frac{X}{2\cos\beta_2} = X, \quad N_{III} = X.$$

Des conditions de la statique pour le système auxiliaire (fig. 185,*c*) l'on tire:

$$\overline{N}_I = -\frac{1}{2\cos\beta_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \overline{N}_{II} = \frac{1}{2\cos\beta_2} = 1, \quad \overline{N}_{III} = 1.$$

Compte tenu des relations: $l_I = \dfrac{a}{\sin\beta_1} = 2$ m,

$$l_{II} = \frac{a}{\sin\beta_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{m}, \quad l_{III} = a(\operatorname{ctg}\beta_1 - \operatorname{ctg}\beta_2) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{m},$$

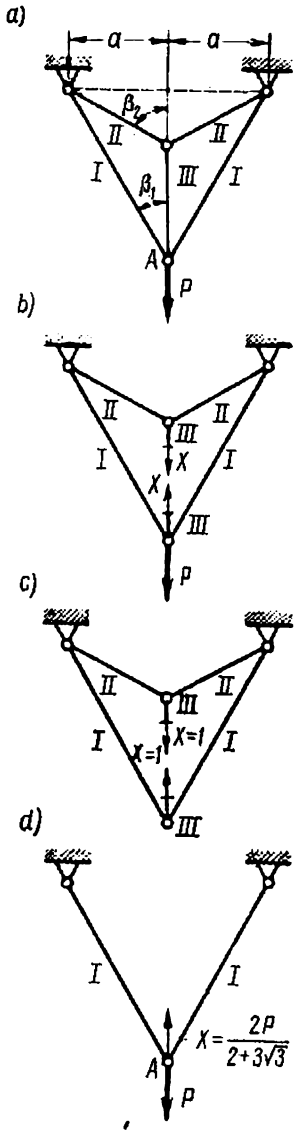


Fig. 185

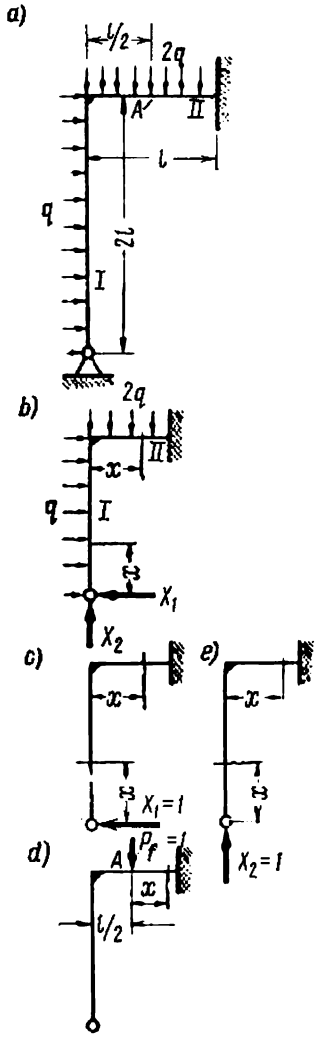


Fig. 186

pour déterminer l'effort surabondant inconnu, on écrit l'équation (a) sous la forme:

$$2N_I\bar{N}_I l_I + 2N_{II}\bar{N}_{II}l_{II} + N_{III}\bar{N}_{III}l_{III} = -2\frac{P-X}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2 +$$

$$+ 2X\frac{2}{\sqrt{3}} + X\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\left[-2P + (2+3\sqrt{3})X\right] = 0,$$

d'où

$$X = N_{III} = N_{II} = \frac{2P}{2+3\sqrt{3}} \approx 0{,}278P$$

et

$$N_I = \frac{P - \dfrac{2P}{2+3\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{3P}{2+3\sqrt{3}} \approx 0{,}417P\ .$$

Les contraintes normales dans les sections droites des barres du système seront:

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{X}{F} \approx \frac{0{,}278\cdot 8\cdot 10^3}{2} = 1\,112 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_I = \frac{N_I}{F} \approx \frac{0{,}417\cdot 8\cdot 10^3}{2} = 1\,668 \text{ kgf/cm}^2.$$

Pour calculer le déplacement vertical δ_A du nœud A, considérons le système isostatique représenté fig. 185,*d*.

Dans ce système $N_I = \dfrac{3P}{2+3\sqrt{3}}$ et l'effort dû à la force unitaire fictive $P_f = 1$, appliquée au nœud A suivant la verticale vers le bas, $N_I = \dfrac{1}{2\cos\beta_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, le déplacement cherché sera donc:

$$\delta_A = \frac{2}{EF}N_I\bar{N}_I l_I = \frac{2}{EF}\cdot\frac{3P}{2+3\sqrt{3}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\cdot 0{,}417\cdot 8\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^2}{2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 1{,}732} \approx 0{,}19 \text{ cm}.$$

Exemple 101. Etant donnés: q, l, E, I (fig. 186,*a*); calculer f_A.

Solution. Puisque les rigidités des sections droites des tronçons vertical et horizontal du demi-portique sont les mêmes,

pour calculer le système hyperstatique on utilise l'équation simplifiée (195):

$$\sum \int M\bar{M}\,dx = 0. \qquad \text{(b)}$$

Les moments fléchissants M_I et M_{II} dans les tronçons du système principal équivalent (fig. 186,*b*) et $\bar{M}_I$ et $\bar{M}_{II}$ dans les tronçons du système auxiliaire (fig. 186,*c*,*d*) sont respectivement:

$$M_I = X_1 x - \frac{qx^2}{2}, \quad M_{II} = X_1 2l + X_2 x - 2ql^2 - qx^2,$$

$$\bar{M}_I = x, \quad \bar{M}_{II} = 2l,$$

$$\bar{M}_I = 0, \quad \bar{M}_{II} = x.$$

Ecrivons deux équations (b):

$$\int_0^{2l} \left(X_1 x - \frac{qx^2}{2}\right) x\,dx + 2l \int_0^{l} (X_1 2l + X_2 x - 2ql^2 - qx^2)\,dx = 0,$$

$$\int_0^{l} (X_1 2l + X_2 x - 2ql^2 - qx^2)\,x dx = 0.$$

Après calcul des intégrales, ces équations prennent la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} 20X_1 + 3X_2 - 20ql &= 0, \\ 12X_1 + 4X_2 - 15ql &= 0, \end{aligned}\right\}$$

d'où l'on tire:

$$X_1 = \frac{35}{44} ql; \quad X_2 = \frac{15}{11} ql.$$

Pour déterminer le déplacement vertical f_A de la section A, calculons M pour le système principal équivalent et $\bar{M}$ pour le système auxiliaire (fig. 186,*e*) dans la section à droite de la section A, à une distance x de celle-ci:

$$M = X_1 2l + X_2\left(\frac{l}{2} + x\right) - 2ql^2 - q\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 =$$

$$= -\frac{q}{44}(44x^2 - 16lx - l^2), \quad \bar{M} = -x.$$

D'après la formule (188), la valeur du déplacement vertical cherché sera:

$$f_A = -\frac{q}{44EI} \int_0^{l/2} (44x^2 - 16lx - l^2)\,x dx = -\frac{5ql^4}{2\,112EI}.$$

Exemple 102. Soient : P, ρ, E, $I_{II} = 2\,I_I$ et des barres de faible courbure initiale (fig. 187,*a*).

Calculer les déplacements horizontal δ_x et vertical δ_y de l'articulation A et construire les diagrammes des moments fléchissants.

S o l u t i o n. Puisque les barres ont une faible courbure et que les modules d'élasticité longitudinale de leurs matériaux sont les

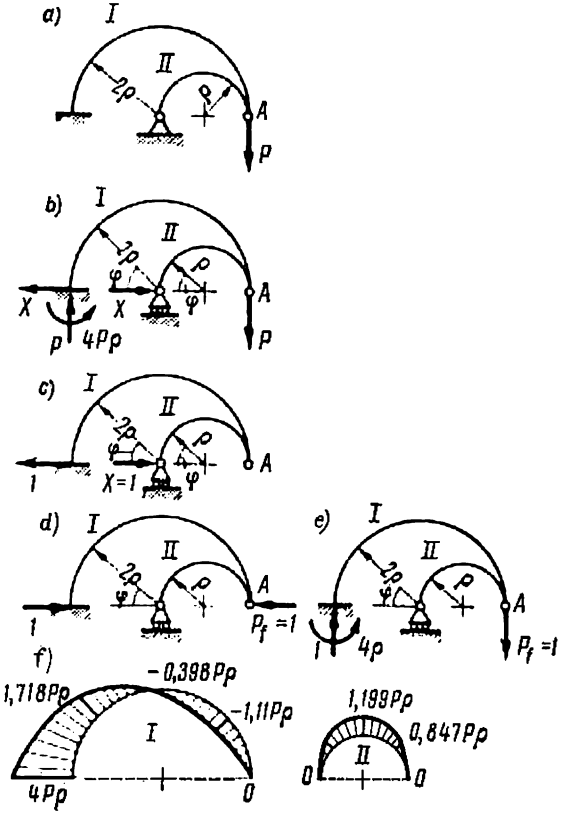


Fig. 187

mêmes, pour calculer le système hyperstatique, on utilise la formule simplifiée (197) :

$$\sum \frac{1}{I} \int M\bar{M}\,ds = 0. \qquad (c)$$

Comme inconnue surabondante X on prend la réaction horizontale de l'articulation.

A l'aide des équations de la statique et compte tenu de l'articulation suspendue A, on explicite les réactions dans les liaisons

du système principal équivalent (fig. 187,*b*) en fonction de la force donnée P et de l'inconnue surabondante X. Dans le système auxiliaire (fig. 187,*c*) chargé par la force $X = 1$, on a seulement une réaction horizontale dans la section encastrée.

Les moments fléchissants dans les tronçons I et II des systèmes principal équivalent et auxiliaire sont respectivement:

$$M_I = 4P\rho - P2\rho(1 - \cos\varphi) - X2\rho\sin\varphi =$$

$$= 2P\rho(1 + \cos\varphi) - 2X\rho\sin\varphi,$$

$$M_{II} = X\rho\sin\varphi, \quad \overline{M}_I = -2\rho\sin\varphi \quad \text{et} \quad \overline{M}_{II} = \rho\sin\varphi.$$

Les éléments des axes géométriques des poutres sont:

$$ds_I = 2\rho\,d\varphi, \quad ds_{II} = \rho\,d\varphi, \quad I_{II} = 2I_I;$$

l'équation (c) prend donc la forme:

$$8\int_0^{\pi}[X\sin\varphi - P(1 + \cos\varphi)]\sin\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}X\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = 0.$$

Après calcul des intégrales, on obtient:

$$\frac{17}{4}\pi X - 16P = 0,$$

d'où l'on tire:

$$X = \frac{64}{17\pi}P \approx 1{,}198P.$$

Pour calculer les déplacements horizontal δ_x et vertical δ_y de l'articulation A, considérons les systèmes auxiliaires représentés respectivement fig. 187,*d* et 187,*e*.

Puisque dans le tronçon II de ces systèmes les efforts sont nuls, on considère seulement le tronçon I. Dans ce tronçon on a pour les moments fléchissants:

dus aux forces données:

$$M_I = 2P\rho(1 + \cos\varphi) - 2X\rho\sin\varphi = 2P\rho\left(1 + \cos\varphi - \frac{64}{17\pi}\sin\varphi\right),$$

dus à la force horizontale appliquée $P_t = 1$:

$$\overline{M}_I = 2\rho\sin\varphi$$

et dus à la force verticale $P_t = 1$:

$$\overline{M}_I = 4\rho - 2\rho(1 - \cos\varphi) = 2\rho(1 + \cos\varphi).$$

Donc, les déplacements cherchés seront :

$$\delta_x = \frac{2\rho}{EI_I}\int_0^{\pi} M_I \bar{M}_I\, d\varphi = \frac{8P\rho^3}{EI_I}\int_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi - \frac{64}{17\pi}\sin\varphi\right)\times$$

$$\times \sin\varphi\, d\varphi = \frac{16}{17}\frac{P\rho^3}{EI_I} \approx 0{,}941\,\frac{P\rho^3}{EI_I},$$

$$\delta_y = \frac{2\rho}{EI_I}\int_0^{\pi} M_I \bar{M}_I d\varphi = \frac{8P\rho^3}{EI_I}\int_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi - \frac{64}{17\pi}\sin\varphi\right)\times$$

$$\times (1+\cos\varphi)\, d\varphi = 8\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{128}{17\pi}\right)\frac{P\rho^3}{EI_I} \approx 18{,}5\,\frac{P\rho^3}{EI_I}.$$

Les diagrammes des moments fléchissants M_I et M_{II} sont représentés fig. 187,*c*.

La méthode des forces

Pour calculer des systèmes élastiques hyperstatiques par la méthode des forces, on établit et on résout les équations canoniques de la forme :

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1p} = 0,\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ldots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2p} = 0,\\
&\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \ldots + \delta_{3n}X_n + \delta_{3p} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \delta_{np} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (199)$$

Chacune de ces équations exprime la condition (192), selon laquelle dans un système hyperstatique le déplacement généralisé correspondant à chacune des forces généralisées surabondantes inconnues X_1, X_2, X_3, . . ., X_n est égal à zéro.

Les membres libres δ_{ip} de ces équations et tous les coefficients δ_{ii}, δ_{ik} sont des déplacements généralisés dans le système principal dans la direction de la i-ième (indiquée par le premier index) force généralisée surabondante inconnue X_i : δ_{ip} dus à l'action de toutes les forces généralisées données P, et δ_{ii} et δ_{ik} dus à chaque force généralisée unitaire surabondante $X_i = 1$ ou $X_k = 1$, indiquée par le second index.

Les valeurs de tous ces déplacements généralisés peuvent être déterminées par l'une quelconque des méthodes connues ou prises des tables, si cela est possible.

Les déplacements δ_{ip} peuvent être plus grands ou plus petits que zéro ou nuls ; ils dépendent des forces données, de la géométrie du système et du choix du système principal.

Les déplacements δ_{ii} et δ_{ik} ne dépendent pas des forces données et sont entièrement déterminés par la géométrie du système et le choix des inconnues surabondantes ; les coefficients principaux δ_{ii} sont des quantités strictement positives et différentes de zéro ; les coefficients non diagonaux $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ peuvent être plus grands ou plus petits que zéro ou nuls.

En choisissant le système principal il faut tendre à ce qu'un plus grand nombre de coefficients non diagonaux soit nul. Il est rationnel de rendre isostatique un système hyperstatique symétrique, comme cela est indiqué page 340.

Le système hyperstatique de degré n doit être considéré dans $n + 1$ états : dans l'état principal sous l'action de toutes les forces généralisées données, et dans n états auxiliaires sous l'action de chacune des forces généralisées unitaires inconnues surabondantes.

Si le système hyperstatique est soumis seulement à une variation de température, les membres libres des équations canoniques seront δ_{it}, déplacements généralisés correspondant à la i-ième force généralisée inconnue surabondante dans le système principal, dus à la variation de température. Lorsque le système est soumis simultanément à l'action des charges et à une variation de température, les membres libres des équations canoniques sont exprimés par la somme $\delta_{ip} + \delta_{it}$.

On tient compte des imprécisions de fabrication des barres du système pendant le montage en introduisant dans les membres libres des équations canoniques des quantités $\delta_{i\Delta}$ exprimant les déplacements généralisés correspondant à la i-ième force généralisée surabondante dans le système principal, dus à l'imprécision Δ de fabrication des barres.

Les valeurs de δ_{it} et $\delta_{i\Delta}$ sont positives ou négatives selon que les directions de ces déplacements coïncident ou soient opposées à la direction admise de X_i.

Pour un système hyperstatique du premier ordre l'équation canonique de la méthode des forces prend la forme :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1p} = 0,$$

et, par conséquent, la valeur de la force généralisée inconnue surabondante sera :

$$X_1 = -\frac{\delta_{ip}}{\delta_{11}}. \qquad (200)$$

Si l'on calcule des portiques plans hyperstatiques du premier ordre ou des systèmes de barres curvilignes de faible courbure pour lesquels l'effet de l'effort longitudinal et de l'effort tranchant est

insignifiant, alors :

$$\delta_{ip} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI}\, ds, \quad \delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI}\, ds,$$

et

$$X_1 = -\sum \int \frac{M\bar{M}}{EI}\, ds \Big/ \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI}\, ds, \qquad (201)$$

où ds est l'élément de longueur de l'axe géométrique du tronçon.

Exemple 103. Etant donnés : P, q, a (fig. 188,*a*) ; calculer le système hyperstatique, compte tenu des déformations des tronçons dues seulement à la flexion.

S o l u t i o n. On prend la réaction de l'appui mobile comme inconnue surabondante X_1. Puisque $M\bar{M} \neq 0$ et $\bar{M}^2 \neq 0$ seulement dans le tronçon de longueur $2a$ et que dans ce tronçon pour les systèmes principal (fig. 188,*b*) et auxiliaire (fig. 188,*c*) $M = -P(a + x) - \frac{qx^2}{2}$ et $\bar{M} = x$, d'après la formule (201) on trouve :

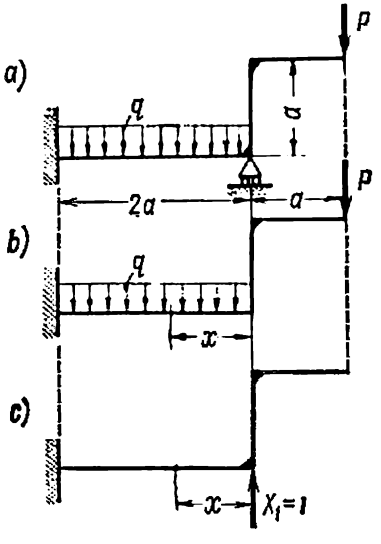


Fig. 188

$$X_1 = \frac{\int_0^{2a} M\bar{M}\, dx}{\int_0^{2a} \bar{M}^2\, dx} = \frac{\int_0^{2a} \left[P(a+x) + \frac{qx^2}{2}\right] x\, dx}{\int_0^{2a} x^2\, dx} = \frac{\frac{14}{3}Pa^3 + 2qa^4}{\frac{8}{3}a^3} = \frac{1}{4}(7P + 3qa).$$

Exemple 104. Soient : q, a, E et I (fig. 189,*a*). Construire le diagramme du moment fléchissant.

S o l u t i o n. Pour calculer le système hyperstatique, on rend isostatique le portique donné par une coupure dans la section médiane de la traverse (fig. 189,*b*).

Le système principal est représenté fig. 189,*c*, et les systèmes auxiliaires, avec les diagrammes des moments fléchissants dus aux forces $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ et $X_3 = 1$, fig. 189,*d*, *e*, *f*.

Puisque les diagrammes de $\overline{M}$ dus aux forces $X_1 = 1$ et $X_3 = 1$ sont symétriques et le diagramme de $\overline{M}$ dû à la force $X_2 = 1$ anti-

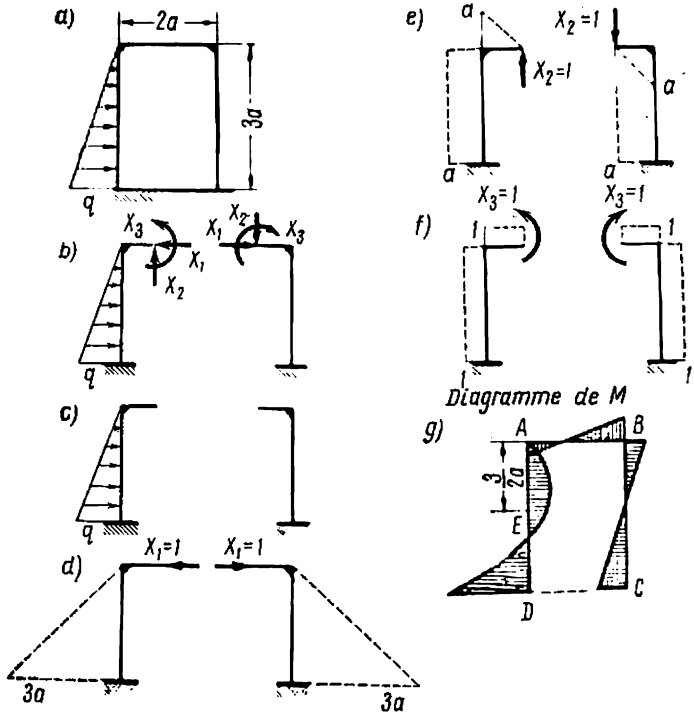


Fig. 189

symétrique, les coefficients non diagonaux $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$, $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$, et les équations canoniques de la méthode des forces prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{2p} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3p} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

On calcule les coefficients δ_{11}, δ_{22}, δ_{33} et $\delta_{13} = \delta_{31}$ par la méthode de multiplication des diagrammes:

$$EI\delta_{11} = 2 \cdot 3 \cdot a \frac{3}{2} a \frac{2}{3} 3a = 18a^3;$$

$$EI\delta_{22} = 2\left(a\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}a + a\cdot 3a\cdot a\right) = \frac{20}{3}a^3;$$

$$EI\delta_{33} = 2(1\cdot a\cdot 1 + 1\cdot 3a\cdot 1) = 8a;$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = 2\cdot 1\cdot 3a\cdot\frac{1}{2}\cdot 3a = 9a^2.$$

Les membres libres sont déterminés par les intégrales de Mohr:

$$EI\delta_{1p} = -\int_0^{3a}\frac{qx^3}{18a}x\,dx = -\frac{27}{10}qa^4;$$

$$EI\delta_{2p} = -\int_0^{3a}\frac{qx^3}{18a}a\,dx = -\frac{9}{8}qa^4;$$

$$EI\delta_{3p} = -\int_0^{3a}\frac{qx^3}{18a}dx = -\frac{9}{8}qa^3.$$

En portant les quantités trouvées dans les équations canoniques et en effectuant quelques transformations, on obtient:

$$\left.\begin{aligned} 20aX_1 + 10X_3 &= 3qa^2,\\ 160X_2 &= 27qa,\\ 72aX_1 + 64X_3 &= 9qa^2, \end{aligned}\right\}$$

d'où l'on tire:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3qa^2 & 10\\ 9qa^2 & 64\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20a & 10\\ 72a & 64\end{vmatrix}} = \frac{192-90}{1\,280-720}qa \approx 0{,}1821qa;$$

$$X_2 = \frac{27}{160}qa \approx 0{,}1688qa;$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 20a & 3qa^2\\ 72a & 9qa^2\end{vmatrix}}{560a} = \frac{180-216}{560}qa^2 \approx -0{,}0643qa^2.$$

A l'aide du principe de superposition, on obtient les diagrammes du moment fléchissant M dans tous les tronçons du portique (fig. 189,*g*):

dans la section A: $M = 0{,}1688\ qa\cdot a - 0{,}0643\ qa^2\cdot 1 = 0{,}1045qa^2$;

dans la section B: $M = -0{,}1688qa\cdot a - 0{,}0643\ qa^2\cdot 1 = -0{,}2331\ qa^2$;

dans la section C : $M = 0{,}1821\ qa \cdot 3a - 0{,}1688\ qa \cdot a - 0{,}0643\ qa^2 = 0{,}3132\ qa^2$;

dans la section D : $M = 0{,}1821\ qa \cdot 3a + 0{,}1688\ qa \cdot a - 0{,}0643\ qa^2 - \frac{q}{18a}\ 27a^3 = -0{,}8492\ qa^2$;

dans la section E : $M = 0{,}1821\ qa \cdot 1{,}5a + 0{,}1688\ qa \cdot a - 0{,}0643\ qa^2 - \frac{q}{18a} \cdot \frac{27}{8} a^3 = 0{,}1902\ qa^2$.

Exemple 105. Etant donnés : a, b, c, d, E, G, $[\sigma]$, α et $\Delta t^\circ > 0$ (fig. 190,*a*) ;

établir la condition de résistance du système pour le tronçon c.

Solution. Le système principal, compte tenu de la variation de sa géométrie due à une élévation de température de Δt degrés, est représenté fig. 190,*b* et le système auxiliaire fig. 190,*c*.

Puisque :

$$\delta_{1t} = -\alpha b \Delta t, \quad \text{et} \quad \delta_{11} = \frac{b}{EF} + \frac{1}{EI}\left(\int_0^a x^2\,dx + a^2 o + \int_0^c x^2\,dx\right) + \frac{a^2 c}{GI_p} = \frac{b}{EF} + \frac{1}{EI}\left(\frac{a^3}{3} + a^2 b + \frac{c^3}{3}\right) + \frac{a^2 c}{GI_p},$$

on a :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{\alpha b \Delta t}{\dfrac{b}{EF} + \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{a^3}{3} + a^2 b + \dfrac{c^3}{3}\right) + \dfrac{a^2 c}{GI_p}}$$

où $F = \frac{\pi d^2}{4}$, $I = \frac{\pi d^4}{64}$, et $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Dans la section dangereuse encastrée du tronçon c le moment fléchissant est $M = X_1 c$, le moment de torsion $M_t = X_1 a$.

La condition de résistance :

$$\frac{\sqrt{M^2 + (\eta M_t)^2}}{W} = \frac{X_1 \sqrt{c^2 + (\eta a)^2}}{W} \leqslant [\sigma],$$

où $W = \frac{\pi d^3}{32}$, $\eta = 1$ selon la troisième hypothèse de résistance ou $\eta = \sqrt{0{,}75}$ selon la quatrième.

Exemple 106. Etant donnés : P, ρ, E_I, I_I, E_{II}, F_{II} et une barre de faible courbure initiale (fig. 191,*a*) ;

calculer le déplacement δ de l'appui mobile.

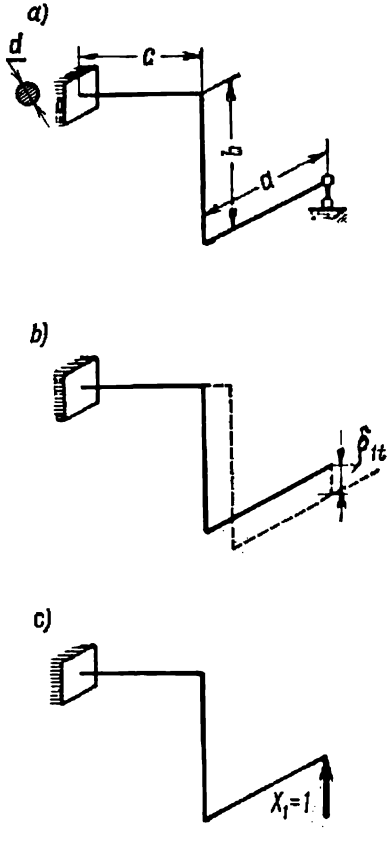


Fig. 190

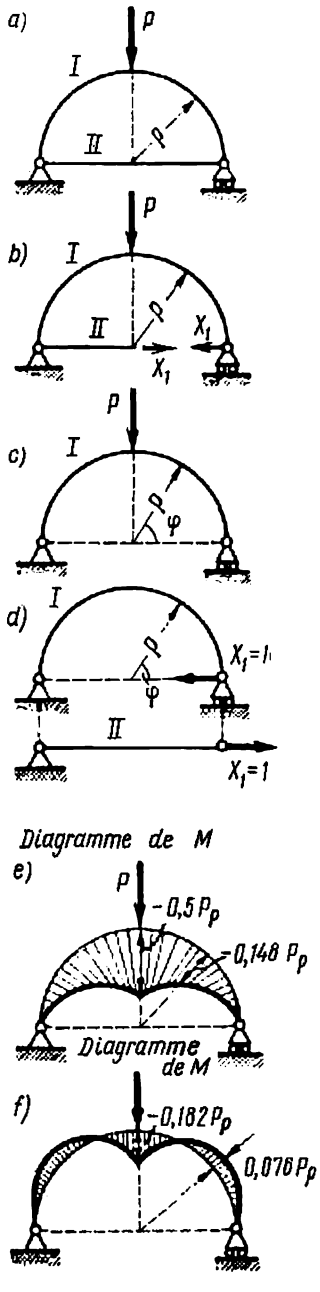


Fig. 191

S o l u t i o n. On rend le système isostatique en disloquant les barres *I* et *II* à l'appui mobile (fig. 191,*b*). Les systèmes principal et auxiliaire seront les systèmes représentés fig. 191,*c*, *d*.

Puisque :

$$\delta_{1p} = -\frac{2}{E_I I_I}\int_0^{\pi/2} \frac{P}{2}\rho(1-\cos\varphi)\,\rho\cdot\sin\varphi\cdot\rho\,d\varphi = -\frac{P\rho^3}{2E_I I_I},$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{E_I I_I}\int_0^{\pi/2} \rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho\,d\varphi + \frac{2\rho}{E_{II}F_{II}} = \frac{\pi\rho^3}{2E_I I_I} + \frac{2\rho}{E_{II}F_{II}},$$

on a :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{P\rho^3}{2E_I I_I}\cdot\frac{1}{\frac{\pi\rho^3}{2E_I I_I} + \frac{2\rho}{E_{II}F_{II}}} =$$

$$= \frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{E_I I_I}{\rho^2 E_{II}F_{II}}}.$$

Le déplacement cherché δ est déterminé comme l'allongement absolu de la barre *II*, c'est-à-dire :

$$\delta = \frac{X_1 2\rho}{E_{II}F_{II}} = \frac{2P\rho}{\pi E_{II}F_{II}}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{\pi}(E_I I_I/\rho^2 E_{II}F_{II})}.$$

Si la barre *II* est absente (c'est-à-dire si $E_{II}F_{II}=0$) :

$$X_1 = 0 \quad \text{et} \quad \delta = \frac{P\rho^3}{2E_I I_I}.$$

Si les deux appuis sont immobiles (c'est-à-dire, $E_{II}F_{II} = \infty$) :

$$X_1 = \frac{P}{\pi} \quad \text{et} \quad \delta = 0.$$

Pour le premier cas ($E_{II}F_{II} = 0$) le moment fléchissant dans une section arbitraire est :

$$M = -\frac{P}{2}\rho(1-\cos\varphi).$$

Le diagramme de *M* a la forme représentée fig. 191,*e*.

Pour le second cas ($E_{II}F_{II} = \infty$) le moment fléchissant dans une section arbitraire est :

$$M = P\rho\left(\frac{\sin\varphi}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{\cos\varphi}{2}\right).$$

Le diagramme de M a la forme représentée fig. 191,*f*.

§ 3. Calcul d'anneaux plans à parois minces

On appelle anneau plan à paroi mince tout système plan de barres élastiques formant un contour rigide fermé dont les longueurs des tronçons sont beaucoup plus grandes que les dimensions de leurs sections droites. Un tel système est hyperstatique du troisième ordre. Les inconnues surabondantes sont : le moment fléchissant X_1, l'effort longitudinal X_2 et l'effort tranchant X_3, c'est-à-dire les efforts intérieurs dans la section droite de la coupure effectuée pour rendre le système isostatique (fig. 192). Par conséquent, les systèmes rigides fermés sont des systèmes intérieurement hyperstatiques.

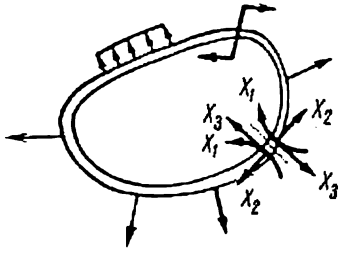


Fig. 192

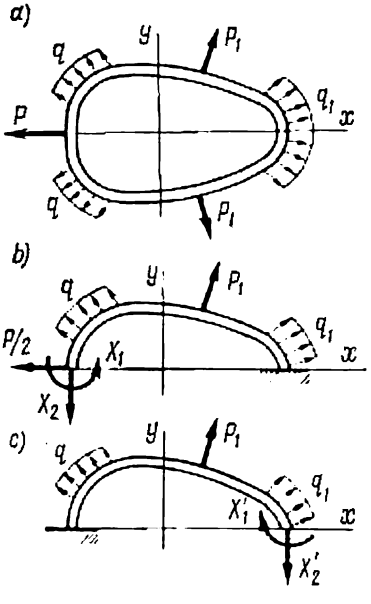


Fig. 193

On peut calculer un anneau hyperstatique ou bien à l'aide du principe de travail minimum, ou bien (ce qui est plus commode) à l'aide des équations canoniques de la méthode des forces. A cause de la minceur de l'anneau, il suffit de considérer dans les équations du système hyperstatique seulement les déformations dues au moment fléchissant.

Si géométriquement et au point de vue des charges l'anneau est symétrique par rapport à un axe (fig. 193,*a*), les efforts tranchants sont nuls dans les sections droites coïncidant avec l'axe de symétrie.

Donc, les inconnues surabondantes dans ces sections seront: le moment fléchissant (X_1 ou X_1') et l'effort longitudinal (X_2 ou X_2'). Au lieu de l'anneau entier, on peut considérer l'une de ses moitiés symétriques (fig. 193,*a*, *b*).

Si géométriquement et au point de vue des charges l'anneau est symétrique par rapport à deux axes (fig. 194,*a*), les efforts tranchants sont nuls dans les sections passant par les axes de symétrie et les

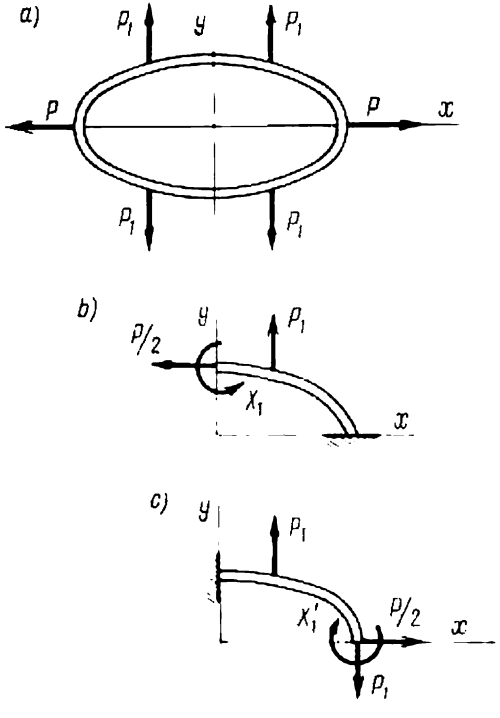


Fig. 194

efforts longitudinaux peuvent être déterminés par les conditions de la statique, comme la somme des projections des forces et des efforts appliqués au demi-anneau suivant l'axe de symétrie correspondant. Dans ce cas le moment fléchissant (X_1 ou X_1') sera la seule inconnue surabondante. Au lieu de l'anneau entier, on peut en considérer un des quarts, compris entre les axes de symétrie (fig. 194,*b* ou *c*).

Si l'anneau a plus de deux axes de symétrie, on peut ne considérer qu'une seule de ses parties, comprise entre les sections qui coïncident avec les axes voisins de même symétrie.

Dans ces sections les efforts tranchants sont nuls, les efforts longitudinaux sont déterminés par les conditions de la statique, et le moment fléchissant sera l'inconnue surabondante.

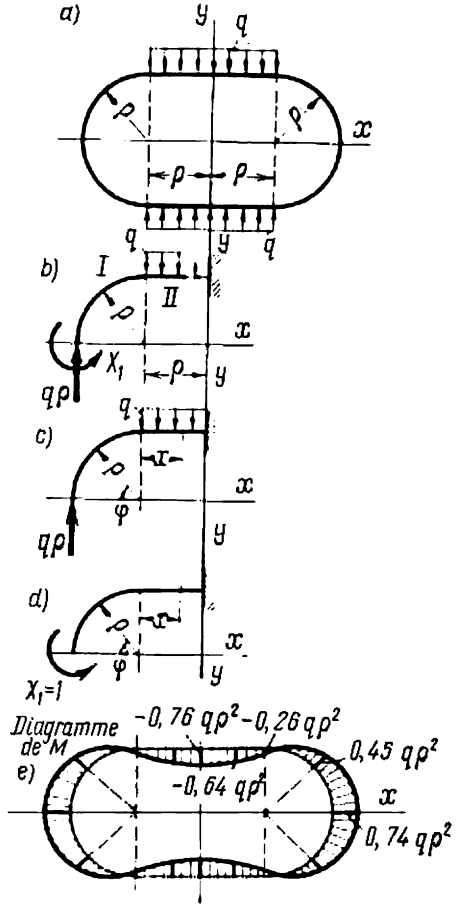


Fig. 195

Exemple 107. Etant donnés: un anneau mince symétrique par rapport aux axes x et y (fig. 195,*a*) et les quantités q, ρ, E et I; calculer le rapprochement δ des sections médianes des tronçons rectilignes de l'anneau.

S o l u t i o n. On considère un quart de l'anneau (fig. 195,*b*). Dans les sections coïncidant avec l'axe x, l'effort tranchant est nul, l'effort longitudinal égal à $q\rho$ et le moment fléchissant X_1 est la force généralisée inconnue surabondante.

Les moments fléchissants dans les sections arbitraires des tronçons I et II des systèmes principal (fig. 195,c) et auxiliaire (fig. 195,d) sont :

$$M_I = -q\rho^2(1-\cos\varphi),$$

$$M_{II} = -q\rho(\rho + x) + q\frac{x^2}{2};$$

$$\overline{M}_I = 1, \quad \overline{M}_{II} = 1.$$

Puisque :

$$EI\delta_{1p} = \int_0^s M_I\overline{M}_I\,ds + \int_0^\rho M_{II}\overline{M}_{II}\,dx = -q\rho^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos\varphi)\,d\varphi -$$

$$-q\int_0^\rho\left[\rho(\rho+x) - \frac{x^2}{2}\right]dx = -q\rho^3\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right),$$

on a :

$$EI\delta_{11} = \int_0^s \overline{M}_I^2\,ds + \int_0^\rho \overline{M}_{II}^2\,dx = \rho\int_0^{\pi/2}d\varphi + \int_0^\rho dx = \rho\left(\frac{\pi}{2}+1\right),$$

la valeur du moment fléchissant X_1 sera :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = q\rho^2\frac{3\pi+2}{3(\pi+2)} \approx 0{,}74q\rho^2.$$

Après calcul du système hyperstatique nous aurons :

$$M_I = -q\rho^2\left[1 - \frac{3\pi+2}{3(\pi+2)} - \cos\varphi\right] \approx -q\rho^2(0{,}26-\cos\varphi);$$

$$M_{II} = -q\left[\rho^2 + \rho x - \frac{x^2}{2} - \frac{3\pi+2}{3(\pi+2)}\rho^2\right] \approx$$

$$\approx -q(0{,}26\rho^2 + \rho x - 0{,}5x^2),$$

donc :

$$M_{I_{\varphi=0}} \approx 0{,}74q\rho^2; \quad M_{I_{\varphi=\frac{\pi}{4}}} \approx 0{,}45q\rho^2; \quad M_{I_{\varphi=\frac{\pi}{2}}} \approx -0{,}26q\rho^2;$$

$$M_{II_{x=0}} \approx -0{,}26q\rho^2; \quad M_{II_{x=\frac{\rho}{2}}} \approx -0{,}64q\rho^2; \quad M_{II_{x=\rho}} = -0{,}76q\rho^2.$$

Le diagramme des moments fléchissants est représenté fig. 195,*e*.

Pour calculer la valeur du rapprochement des sections médianes des tronçons rectilignes de l'anneau, on applique dans la section où agit $q\rho$ la force fictive $P_f = 1$, dirigée verticalement vers le haut. Dans les sections arbitraires des tronçons *I* et *II* du quart de l'anneau les moments fléchissants dus à cette force sont :

$$\bar{M}_I = -\rho(1-\cos\varphi) \quad \text{et} \quad \bar{M}_{II} = -(\rho + x).$$

Par conséquent, le déplacement cherché sera :

$$\delta = \frac{2}{EI}\left(\int_0^s M_I \bar{M}_I\, ds + \int_0^\rho M_{II}\bar{M}_{II}\, dx\right) = \frac{2q\rho^4}{EI}\int_0^{\pi/2}(0{,}26 - \cos\varphi)\times$$

$$\times(1-\cos\varphi)\, d\varphi + \frac{2q}{EI}\int_0^\rho (0{,}26\rho^2 + \rho x - 0{,}5x^2)\times$$

$$\times(\rho + x)\, dx \approx 1{,}72\frac{q\rho^4}{EI}.$$

Exemple 108. Etant donnés : P, α $\left(\text{où } 2\alpha = \dfrac{2\pi}{n}\right)$, ρ, E, I et F (fig. 196,*a*) ;

calculer les variations $\Delta\rho_p$ et $\Delta\rho_0$ des rayons de l'anneau suivant la ligne d'action des forces et suivant la direction médiane entre les forces.

Solution. On étudie une partie de la paroi de l'anneau, dégagée par des sections droites médianes des arcs entre les forces (fig. 196,*b*).

Dans les sections effectuées les efforts tranchants sont nuls, les efforts longitudinaux sont déterminés de la somme des projections des forces et des efforts sur la verticale : $N_0 = \dfrac{P}{2\sin\alpha}$.

Les moments fléchissants et les efforts longitudinaux dans une section arbitraire des systèmes principal (fig. 196,*c*) et auxiliaire (fig. 196,*d*) sont respectivement :

$$M = \frac{P\rho}{2\sin\alpha}(1-\cos\varphi), \quad N = \frac{P\cos\varphi}{2\sin\alpha}, \quad \bar{M} = 1, \quad \bar{N} = 0.$$

Puisque :

$$\delta_{1p} = \frac{\rho}{EI}\int_0^\alpha M\bar{M}\, d\varphi = -\frac{P\rho^2}{2EI\sin\alpha}\int_0^\alpha (1-\cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= -\frac{P\rho^2}{2EI}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right),$$

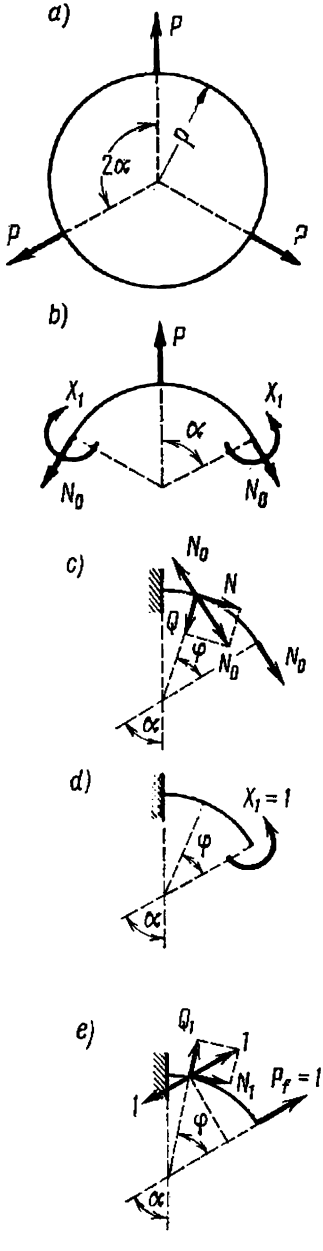


Fig. 196

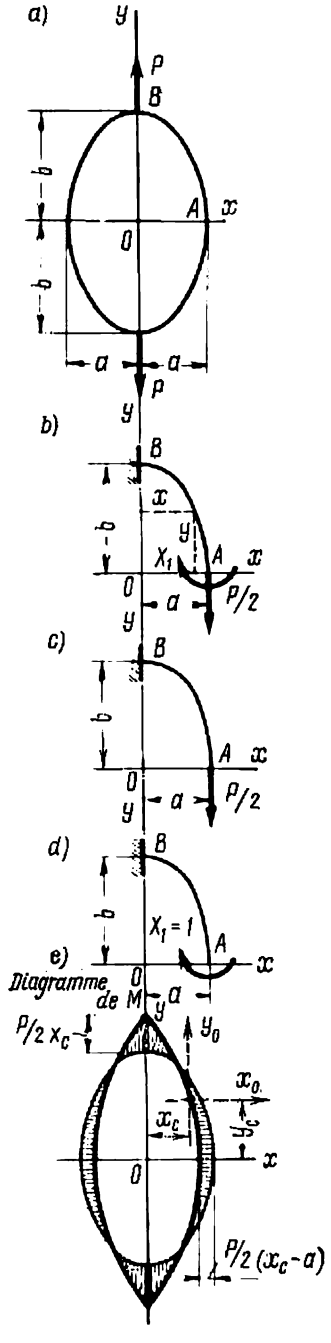


Fig. 197

et

$$\delta_{11} = \frac{\rho}{EI} \int_0^{\alpha} \bar{M}^2 \, d\varphi = \rho \, \frac{\alpha}{EI},$$

le moment :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{P\rho}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Le moment fléchissant dans une section arbitraire de l'anneau est :

$$M = \frac{P\rho}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{P\rho}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\right).$$

Pour calculer $\Delta\rho_p$ au lieu de la force P on applique la force $P_1 = 1$. Alors :

$$\bar{M} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\right), \quad \bar{N} = \frac{\cos\varphi}{2\sin\alpha}$$

et

$$\Delta\rho_p = \frac{2\rho}{EI} \int_0^{\alpha} M\bar{M} \, d\varphi + \frac{2\rho}{EF} \int_0^{\alpha} N\bar{N} \, d\varphi =$$

$$= \frac{P\rho^3}{2EI} \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\right)^2 d\varphi + \frac{P\rho}{2EF\sin^2\alpha} \int_0^{\alpha} \cos^2\varphi \, d\varphi.$$

On a en définitive :

$$\Delta\rho_p = \frac{P\rho^3}{2EI}\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{P\rho}{4EF}\left(\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\alpha}{\sin^2\alpha}\right).$$

Pour calculer $\Delta\rho_0$ on applique la force radiale $P_1 = 1$ dans la section faisant un angle α avec la verticale (fig. 196,*e*). On a alors :

$$\bar{M} = -\rho\sin\varphi, \quad \bar{N} = \sin\varphi$$

et

$$\Delta\rho_0 = \frac{P\rho^3}{2EI} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) \sin\varphi \, d\varphi + \frac{P\rho}{2EF\sin\alpha} \int_0^{\alpha} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi.$$

Finalement :

$$\Delta\rho_0 = \frac{P\rho^3}{2EI}\left[\frac{\sin\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}(\cos\alpha - 1)\right] + \frac{P\rho}{4EF}\sin\alpha.$$

Exemple 109. Etant donnés : P, a, b, E, I et un anneau mince, symétrique par rapport aux axes y et x (fig. 197,*a*) ;
calculer Δa et Δb.

Solution. On étudie un quart de l'anneau (fig. 197,*b*). L'effort tranchant est nul dans les sections coïncidant avec l'axe, et l'effort longitudinal est égal à $\frac{P}{2}$.

Les moments fléchissants dans une section droite arbitraire de centre de gravité de coordonnées x et y dans les systèmes principal (fig. 197,*c*) et auxiliaire (fig. 197,*d*) sont respectivement :

$$M = \frac{P}{2}(a - x) \quad \text{et} \quad \bar{M} = 1.$$

Puisque : $EI\delta_{1p} = \int_0^s M\bar{M}\,ds = \frac{P}{2}\int_0^s (a - x)\,ds =$

$$= \frac{P}{2}\left(a\int_0^s ds - \int_0^s x ds\right) = \frac{P}{2}(as - S_y) =$$

$$= \frac{P}{2}s\left(a - \frac{S_y}{s}\right) = \frac{P}{2}s(a - x_c),$$

où s est la longueur d'arc de l'axe géométrique de la paroi du quart d'anneau, $S_y = \int_0^s x ds$ le moment statique de l'arc par rapport à l'axe y, $x_c = \frac{S_y}{s}$ l'abscisse du centre de gravité de l'arc s, et $EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}^2\,ds = \int_0^s ds = s$, le moment fléchissant dans la section A sera :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}(x_c - a).$$

Pour le moment fléchissant dans une section droite arbitraire de l'anneau, on aura :

$$M = \frac{P}{2}(a - x) + \frac{P}{2}(x_c - a) = \frac{P}{2}(x_c - x);$$

$$M_{x=a} = \frac{P}{2}(x_c - a).$$

Si $a > x_c$, on a $M_{x=a} < 0$; $M_{x=x_c} = 0$; $M_{x=0} = \frac{P}{2} x_c > 0$.

Le diagramme du moment fléchissant est représenté fig. 197,*e*, pour $a - x_c < x_c$.

Pour déterminer la variation de la dimension a, on applique dans la section A du quart d'anneau une force horizontale $P_f = 1$ dirigée vers le centre O.

Le moment fléchissant dû à cette force est $\overline{M} = y$. Par conséquent :

$$\Delta a = \frac{P}{2EI} \int_0^s (x_c - x)\, y ds = \frac{P}{2EI} \left(x_c \int_0^s y ds - \int_0^s xy ds \right) =$$

$$= \frac{P}{2EI} (x_c S_x - I_{xy}) = - \frac{P}{2EI} I_{x_0 y_0},$$

où $S_x = \int_0^s y ds$ est le moment statique de l'arc s par rapport à l'axe x;

$I_{xy} = \int_0^s xy ds$ le produit d'inertie de l'arc s par rapport aux axes x, y;

$I_{x_0 y_0} = I_{xy} - x_c S_x = I_{xy} - x_c y_c s$ le produit d'inertie de l'arc s par rapport aux axes $x_0 y_0$ parallèles aux axes xy et passant par le centre de gravité du quart d'anneau (fig. 197,*e*).

Pour déterminer la variation de la dimension b, on applique dans la section A du quart d'anneau une force verticale $P_f = 1$ dirigée vers le bas.

Le moment fléchissant dû à cette force est $\overline{M} = a - x$. Par conséquent :

$$\Delta b = \frac{P}{2EI} \int_0^s (x_c - x)(a - x)\, ds = \frac{P}{2EI} \left(a x_c \int_0^s ds - \right.$$

$$\left. - a \int_0^s x ds - x_c \int_0^s x ds + \int_0^s x^2 ds \right) = \frac{P}{2EI} \left(a x_c s - a S_y - \right.$$

$$\left. - x_c S_y + I_y \right) = \frac{P}{2EI} (I_y - x_c S_y) = \frac{P}{2EI} I_{y_0},$$

où $I_y = \int_0^s x^2 ds$ est le moment d'inertie linéique de l'arc s par rapport à l'axe y;

$I_{y_0} = I_y - x_c S_y = I_y - x_0^2 s$ le moment d'inertie linéique de l'arc s par rapport à l'axe y_0.

Cas particuliers. A. Un portique carré est soumis à une traction suivant la diagonale (fig. 198,*a*). Puisque (fig. 198,*b*) $x_c = y_c = \frac{a}{2}$:

$$M = \frac{P}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right); \quad M_{x=0} = \frac{Pa}{4}; \quad M_{x=a} = -\frac{Pa}{4}.$$

Le diagramme du moment fléchissant est représenté fig. 198,*c*.

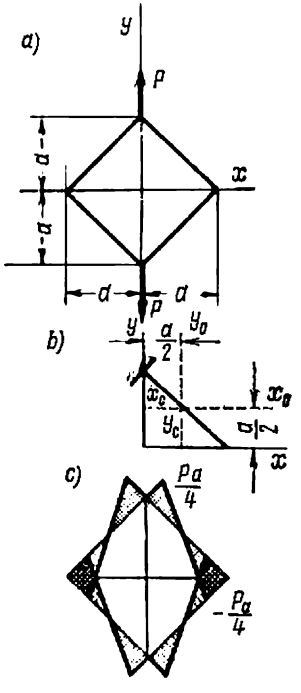


Fig. 198

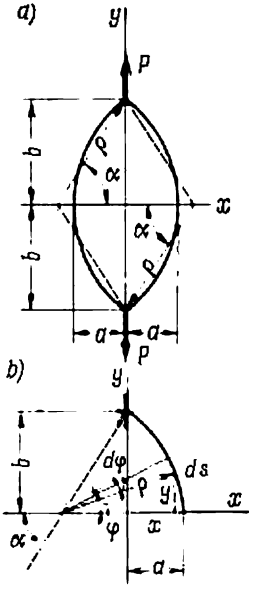


Fig. 199

Dans le système d'axes centraux $x_0 y_0$:

$$x_0 = -y_0, \quad ds = dx_0\sqrt{2} = dy_0\sqrt{2},$$

et

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \sqrt{2}\int_{-a/2}^{a/2} x_0^2\, dx_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

et $$I_{x_0 y_0} = -\sqrt{2}\int_{-a/2}^{a/2} x_0^2\, dx_0 = -\frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

D'après les formules de l'exemple 109, les valeurs du raccourcissement de la demi-diagonale horizontale du portique et de l'allongement de sa demi-diagonale verticale sont égales:

$$\Delta a = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{Pa^3}{EI}.$$

B. Anneau composé de deux arcs de circonférence de rayon ρ avec un angle au centre 2α (fig. 199,*a*).

Puisque (fig. 199,*b*):

$$ds = \rho\, d\varphi, \quad s = \rho\alpha, \quad a = \rho(1 - \cos\alpha), \quad b = \rho \sin\alpha,$$

$$x = \rho(\cos\varphi - \cos\alpha) \quad \text{et} \quad y = \rho \sin\alpha,$$

on a:

$$S_y = \int_0^s x\,ds = \rho^2 \int_0^\alpha (\cos\varphi - \cos\alpha)\, d\varphi = \rho^2 (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha);$$

$$x_c = \frac{S_y}{s} = \frac{\rho}{\alpha}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha);$$

$$S_x = \int_0^s y\,ds = \rho^2 \int_0^\alpha \sin\varphi\, d\varphi = \rho^2(1 - \cos\alpha);$$

$$I_{xy} = \int_0^s xy\,ds = \rho^3 \int_0^\alpha (\cos\varphi - \cos\alpha)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\rho^3}{2}(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha);$$

$$I_y = \int_0^s x^2\,ds = \rho^3 \int_0^\alpha (\cos\varphi - \cos\alpha)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{\rho^3}{4}(2\alpha + 4\alpha\cos^2\alpha - 3\sin 2\alpha).$$

D'après les formules de l'exemple 109 on a:

$$X_1 = \frac{P}{2}(x_c - a) = \frac{P\rho}{2\alpha}(\sin\alpha - \alpha),$$

$$M = \frac{P}{2}(x_c - x) = \frac{P\rho}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\varphi\right),$$

$$\Delta a = \frac{P}{2EI}(x_c S_x - I_{xy}) = \frac{P\rho^3}{2EI} \times$$

$$\times \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\Delta b = \frac{P}{2EI}(I_y - x_c S_y) =$$

$$= \frac{P\rho^3}{2EI} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right).$$

Exemple 110. Etant donnés : a, b, E, I et la pression intérieure q sur la paroi de l'anneau symétrique par rapport aux axes x et y (fig. 200,*a*) ;
calculer Δa et Δb.

S o l u t i o n. On considère le quart de l'anneau (fig. 200,*b*). Dans les sections coïncidant avec l'axe, l'effort tranchant est nul et l'effort longitudinal est égal à qa.

Les moments fléchissants dans une section droite arbitraire de centre de gravité de coordonnées x et y dans les systèmes principal (fig. 200,*c*) et auxiliaire (fig. 200,*d*) sont respectivement :

$$M = qa(a - x) - \frac{q}{2}(a - x)^2 - \frac{q}{2}y^2 =$$

$$= \frac{q}{2}[a^2 - (x^2 + y^2)] = \frac{q}{2}(a^2 - \rho^2),$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance de la section considérée à l'origine des coordonnées et $\overline{M} = 1$.

Puisque :

$$EI\delta_{1p} = \int_0^s M\overline{M}\,ds = \frac{q}{2}\int_0^s (a^2 - \rho^2)\,ds =$$

$$= \frac{q}{2}\left(a\int_0^s ds - \int_0^s \rho^2\,ds \right) = \frac{q}{2}(as - I_p),$$

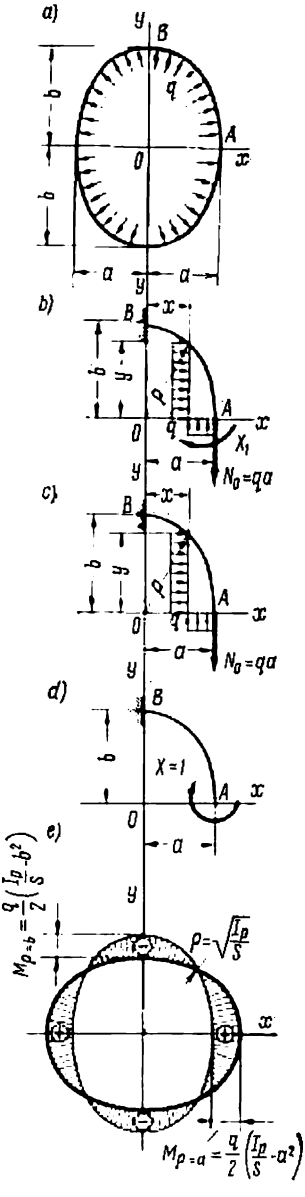


Fig. 200

où s est la longueur d'arc de l'axe géométrique du quart d'anneau ;

$I_p = \int_0^s \rho^2\, ds$ le moment d'inertie polaire de l'arc s par rapport à l'origine des coordonnées, et la quantité $EI\delta_{11} = \int_0^s \overline{M}^2\, ds = \int_0^s ds = s$, le moment fléchissant dans la section A sera :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{q}{2}\left(\frac{I_p}{s} - a^2\right).$$

Et le moment fléchissant dans une section droite arbitraire de l'anneau :

$$M = \frac{q}{2}(a^2 - \rho^2) + \frac{q}{2}\left(\frac{I_p}{s} - a^2\right) = \frac{q}{2}\left(\frac{I_p}{s} - \rho^2\right);$$

$$M_{\rho=a} = \frac{q}{2}\left(\frac{I_p}{s} - a^2\right), \quad M_{\rho=b} = \frac{q}{2}\left(\frac{I_p}{s} - b^2\right).$$

Si la valeur de ρ croît d'une manière continue de a à $b > a$, alors :

$$M_{\rho=a} > 0; \quad M_{\rho=b} < 0 \quad \text{et} \quad M_{\rho=\sqrt{\frac{I_p}{s}}} = 0.$$

Le diagramme du moment fléchissant est représenté fig. 200,*e* pour $b > a$.

Pour déterminer la variation de la dimension a, on applique dans la section A du quart d'anneau une force horizontale $P_1 = 1$ dirigée vers le centre O.

Le moment fléchissant dû à cette force est $\overline{M} = y$. Par conséquent :

$$\Delta a = \frac{q}{2EI}\int_0^s \left(\frac{I_p}{s} - \rho^2\right) y\, ds = \frac{q}{2EI}\left(\frac{I_p}{s}\int_0^s y\, ds - \int_0^s \rho^2 y\, ds\right) =$$

$$= \frac{q}{2EI}\left(\frac{S_x}{s} I_p - \int_0^s \rho^2 y\, ds\right) = \frac{q}{2EI}(y_c I_p - I_x),$$

où $S_x = \int_0^s y\, ds$ est le moment statique de l'arc s par rapport à l'axe x ;

$y_c = \frac{S_x}{s}$ l'ordonnée du centre de gravité de l'arc s ; et

$$I_x = \int_0^s \rho^2 y\, ds.$$

Pour déterminer la variation de la dimension b, on applique dans la section A du quart d'anneau une force verticale $P_t = 1$ dirigée vers le bas.

Le moment fléchissant dû à cette force est $\overline{M} = a - x$. Par conséquent :

$$\Delta b = \frac{q}{2EI}\int_0^s \left(\frac{I_p}{s} - \rho^2\right)(a - x)\,ds = \frac{q}{2EI}\left(\frac{I_p}{s}a\int_0^s ds - \right.$$

$$\left. - a\int_0^s \rho^2\,ds - \frac{I_p}{s}\int_0^s x\,ds + \int_0^s \rho^2 x\,ds\right) = \frac{q}{2EI}\left(\frac{I_p}{s}as - \right.$$

$$\left. - aI_p - \frac{I_p}{s}S_y + I_y\right) = \frac{q}{2EI}(I_y - x_c I_p),$$

où $I_y = \int_0^s \rho^2 x\,ds$, $S_y = \int_0^s x\,ds$ est le moment statique de l'arc s par rapport à l'axe y ;

$x_c = \frac{S_y}{s}$ l'abscisse du centre de gravité de l'arc s.

Cas particulier. Anneau composé de deux demi-circonférences de rayon a et de deux droites de longueur $2a$ (fig. 201,a).

Puisque (fig. 201,b) $s = \frac{2+\pi}{2}a$; $x_1 = a$; $y_1 = y$;

$$ds_1 = dy; \quad x_2 = a\cos\varphi; \quad y_2 = a(1 + \sin\varphi);$$

$$ds_2 = a\,d\varphi; \quad \rho_1^2 = a^2 + y^2; \quad \rho_2^2 = 2a^2(1 + \sin\varphi),$$

on a :

$$S_x = \int_0^a y_1\,ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y_2\,ds_2 =$$

$$= \int_0^a y\,dy + a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi)\,d\varphi = \frac{3+\pi}{2}a^2,$$

$$S_y = \int_0^a x_1\,ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} x_2\,ds_2 = a\int_0^a dy + a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = 2a^2,$$

$$x_c = \frac{S_y}{s} = \frac{4a}{2+\pi}; \quad y_c = \frac{S_x}{s} = \frac{3+\pi}{2+\pi}a,$$

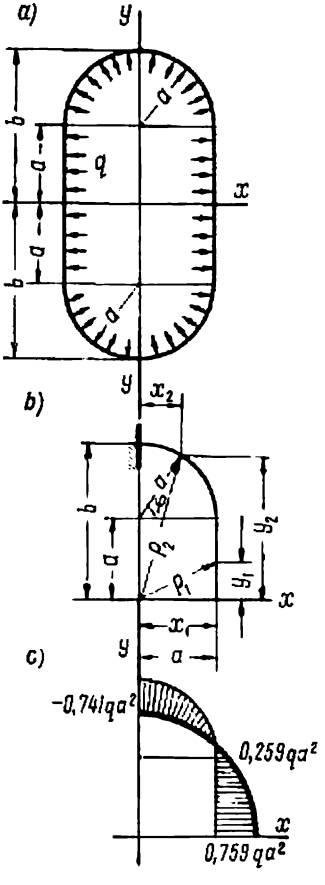


Fig. 201

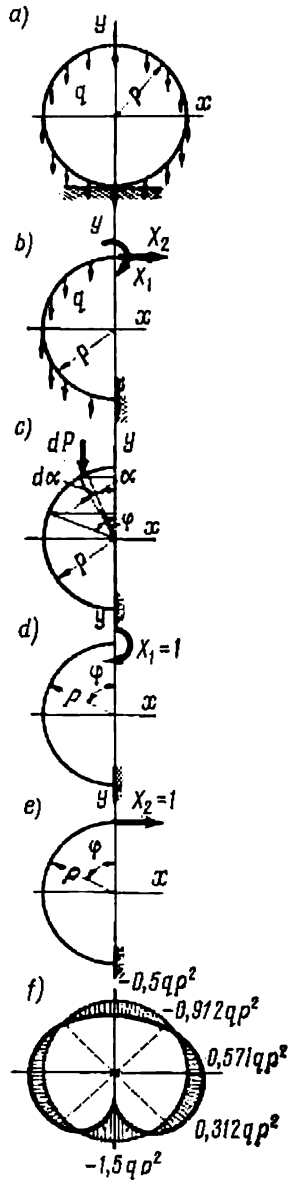


Fig. 202

$$I_x = \int_0^a y_1^2\, ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y_2^2\, ds_2 = \int_0^a y^2\, dy +$$

$$+ a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi)^2\, d\varphi = \frac{28 + 9\pi}{12}\, a^4,$$

$$I_y = \int_0^a x_1^2\, ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} x_2^2\, ds_2 =$$

$$= a^2 \int_0^a dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{4 + \pi}{4}\, a^3;$$

$$I_p = I_x + I_y = \frac{10 + 3\pi}{3}\, a^3;$$

$$I_x = \int_0^a \rho_1^2 y_1\, ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} \rho_2^2 y_2\, ds_2 = \int_0^a (a^2 + y^2)\, y dy +$$

$$+ 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi)^2\, d\varphi = \frac{19 + 6\pi}{4}\, a^4;$$

$$I_y = \int_0^a \rho_1^2 x_1\, ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} \rho_2^2 x_2\, ds_2 = a \int_0^a (a^2 + y^2)\, dy +$$

$$+ 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi) \cos\varphi\, d\varphi = \frac{13}{3}\, a^4.$$

Pour le tronçon rectiligne on a :

$$M_1 = \frac{q}{2}\left(\frac{I_p}{s} - \rho_1^2\right) = \frac{qa^2}{2}\left(\frac{14+3\pi}{6+3\pi} - \frac{y^2}{a^2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{qa^2}{2}\left(1{,}519 - \frac{y^2}{a^2}\right);$$

$$M_{1y=0} = \frac{14+3\pi}{6(2+\pi)}qa^2 \approx 0{,}759qa^2;$$

$$M_{1y=a} = \frac{4}{3(2+\pi)}qa^2 \approx 0{,}259qa^2.$$

Pour le tronçon curviligne :

$$M_2 = \frac{q}{2}\left(\frac{I_p}{s} - \rho^2\right) = qa^2\left(\frac{4}{6+3\pi} - \sin\varphi\right) \approx$$

$$\approx qa^2(0{,}259 - \sin\varphi);$$

$$M_{2\varphi=0} = \frac{4}{3(2+\pi)}qa^2 \approx 0{,}259qa^2;$$

$$M_{2\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{2+3\pi}{3(2+\pi)}qa^2 \approx -0{,}741qa^2.$$

Le diagramme du moment fléchissant pour un quart de l'anneau est représenté fig. 201,*c*.

La variation de la dimension a est :

$$\Delta a = \frac{q}{2EI}(y_c I_p - I_x) = \frac{6 - 17\pi - 6\pi^2}{24(2+\pi)} \cdot \frac{qa^4}{EI} \approx -0{,}864\frac{qa^4}{EI}.$$

La variation de la dimension b est :

$$\Delta b = \frac{q}{2EI}(I_y - x_c I_p) = -\frac{\pi - 14}{12(2+\pi)} \cdot \frac{qa^4}{EI} \approx -0{,}160\frac{qa^4}{EI}.$$

Exemple 111. Etant donnés : q, ρ, E, I et un anneau mince symétriquement chargé par rapport à l'axe y (fig. 202,*a*) ;

calculer la variation δ de la longueur du diamètre vertical de l'anneau.

Solution. On étudie une moitié de l'anneau (fig. 202,*b*). Dans la section qui coïncide avec l'axe y, l'effort tranchant est nul, et le moment fléchissant X_1 et l'effort longitudinal X_2 sont les forces généralisées inconnues surabondantes.

Les équations canoniques de la méthode des forces prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{1p}=0,\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{2p}=0.\end{aligned}\right\}$$

On détermine le moment fléchissant dans une section droite arbitraire définie par l'angle φ dû à la charge donnée q (fig. 202,*c*).

Puisque la force élémentaire agissant sur l'élément d arc ds de l'axe géométrique de la paroi de l'anneau est: $dp = qds = q\rho d\alpha$, le moment fléchissant élémentaire dans la section d'angle φ dû à cette force élémentaire sera:

$$dM = \rho dp\,(\sin\varphi - \sin\alpha) = q\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha.$$

Le moment fléchissant dans cette section dû à toutes les forces agissant sur l'arc d'angle φ vaut:

$$M = q\rho^2\int_0^{\varphi}(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha = q\rho^2(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1).$$

Pour les systèmes auxiliaires (fig. 202,*d*, *e*) les moments fléchissants dans cette même section sont: $\overline{M}_1 = 1$, $\overline{M}_2 = \rho\,(1 - \cos\varphi)$.

Puisque:

$$EI\delta_{1p} = \int_0^s M\overline{M}_1\,ds = q\rho^3\int_0^{\pi}(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)\,d\varphi = 0;$$

$$EI\delta_{2p} = \int_0^s M\overline{M}_2\,ds = q\rho^4\int_0^{\pi}(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)\times$$

$$\times(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi}{4}q\rho^4;$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^s \overline{M}_1^2\,ds = \rho\int_0^{\pi}d\varphi = \pi\rho;$$

$$EI\delta_{22} = \int_0^s \overline{M}_2^2\,ds = \rho^3\int_0^{\pi}(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{3\pi}{2}\rho^3;$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^s \overline{M}_1\overline{M}_2\,ds = \rho^2\int_0^{\pi}(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = \pi\rho^2,$$

on peut écrire les équations canoniques de la méthode des forces sous la forme:

$$\left.\begin{aligned}X_1+\rho X_2=0,\\ X_1+\frac{3}{2}\rho X_2=\frac{q\rho^2}{4},\end{aligned}\right\}$$

d'où l'on tire:

$$X_1 = -\frac{q\rho^2}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{q\rho}{2}.$$

Le moment fléchissant dans une section arbitraire de la paroi de l'anneau est:

$$M = q\rho^2(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - \frac{q\rho^2}{2} + \frac{q\rho^2}{2}(1 - \cos \varphi) =$$

$$= q\rho^2\left(\varphi \sin \varphi + \frac{1}{2}\cos \varphi - 1\right).$$

Par conséquent:

$$M_{\varphi=0} = -0{,}5q\rho^2; \quad M_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = q\rho^2\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx -0{,}0912q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = q\rho^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0{,}571q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} = q\rho^2\left(\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 0{,}312q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\pi} = -1{,}5q\rho^2.$$

Le diagramme du moment fléchissant est représenté fig. 202, *f*.

Pour déterminer la valeur de la variation de la longueur du diamètre vertical de l'anneau, on applique dans la section coïncidant avec l'axe y dans le système principal (fig. 202,*b*) la force verticale $P_t = 1$ dirigée vers le bas. Le moment fléchissant dans une section arbitraire dû à cette force est:

$$\bar{M} = \rho \sin \varphi.$$

Par conséquent, le déplacement cherché sera:

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^s M\bar{M}\,ds = \frac{q\rho^4}{EI}\int_0^\pi \left(\varphi \sin \varphi + \frac{1}{2}\cos \varphi - 1\right)\sin \varphi\, d\varphi =$$

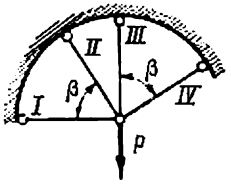
$$= \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)\frac{q\rho^4}{EI} \approx 0{,}467\frac{q\rho^4}{EI}.$$

Problèmes 834-835. Calculer les efforts longitudinaux dans les barres numérotées des systèmes.

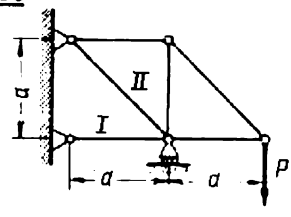
Toutes les barres ont la même rigidité EF.

Dans ces problèmes et les problèmes hyperstatiques suivants utiliser (à volonté) le principe du travail minimum ou la méthode des forces.

834

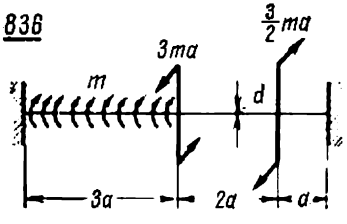


835

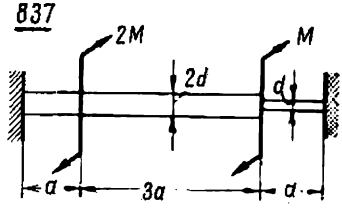


Problèmes 836-837. Déterminer les moments réactifs dans les encastrements des extrémités gauches des barres.

836



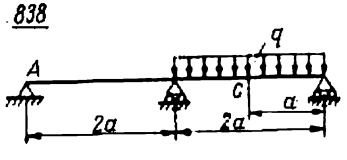
837



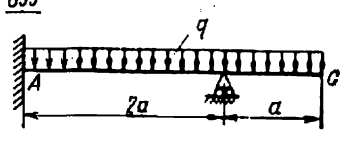
Problèmes 838-841. Calculer les réactions dans les sections encastrées A et les déplacements verticaux δ de la section C des poutres.

Dans le problème 841 déterminer aussi le moment réactif M_A dans la section A. Les rigidités EI sont supposées connues.

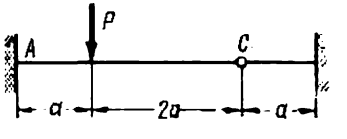
838



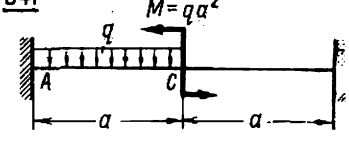
839



840



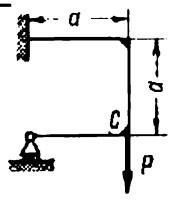
841



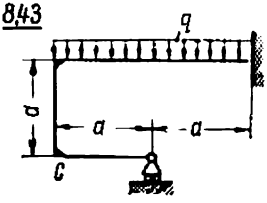
Problemes 842-845. Calculer les réactions dans les articulations des systèmes et les déplacements linéiques de la section C.

Dans les problèmes 842-843 calculer les déplacements verticaux δ_v, dans les problèmes 844-845 les déplacements horizontaux * δ_h.

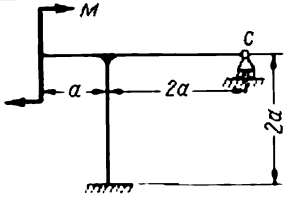
842



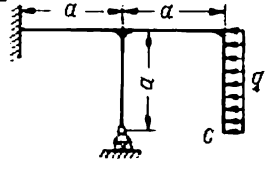
843



844

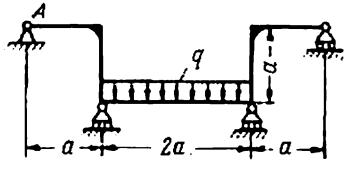


845

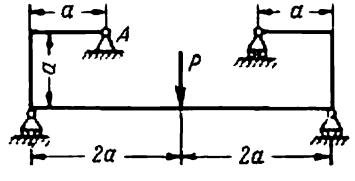


Problèmes 846-847. Calculer les réactions de l'appui A et les déplacements verticaux δ de la section sur l'axe de symétrie des systèmes.

846

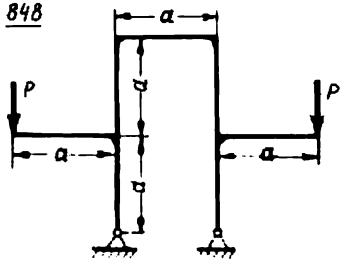


847

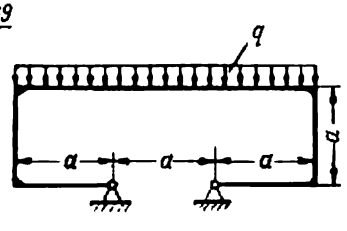


Problèmes 848-851. Calculer les réactions horizontales des appuis dans les systèmes.

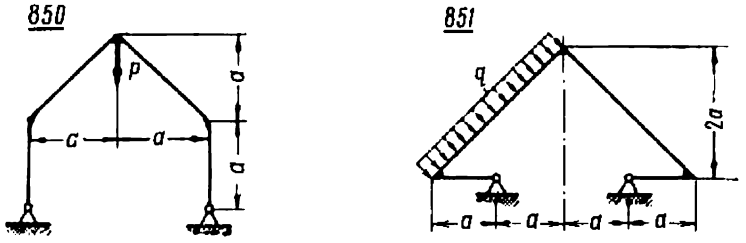
848



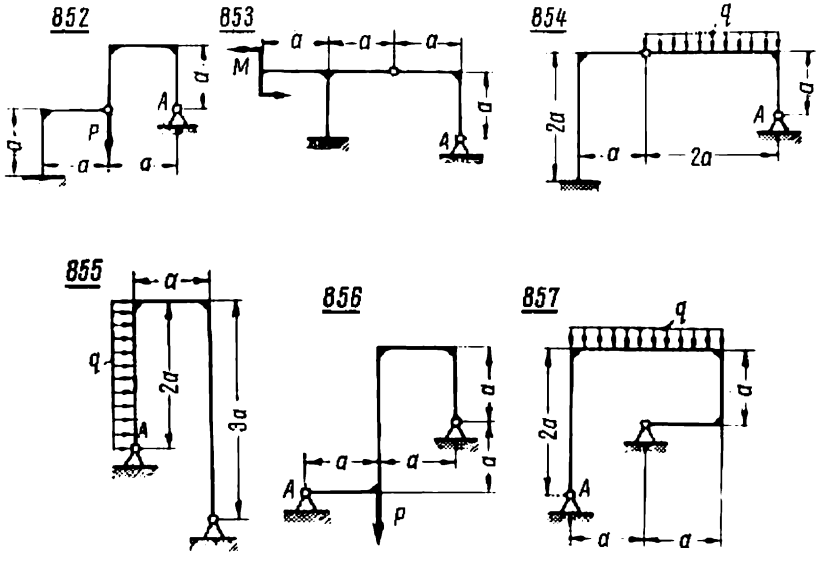
849



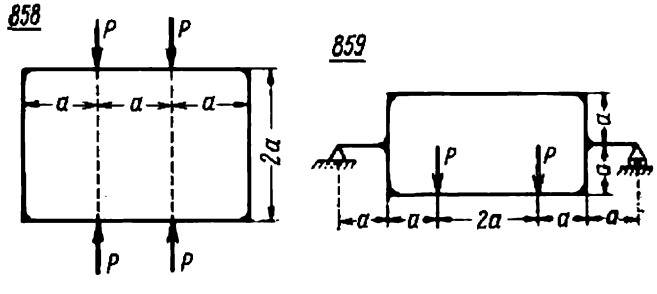
* Dans les problèmes 842-866 négliger les déformations longitudinales des barres du système ; les rigidités EI des barres fléchies sont supposées les mêmes.



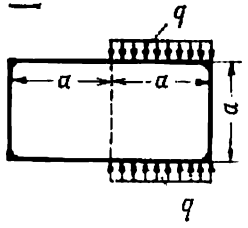
Problèmes 852-857. Calculer les composantes de la réaction de l'appui A des systèmes.



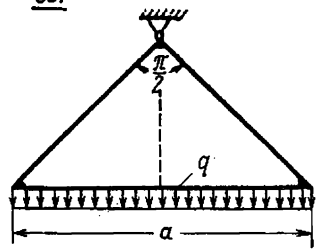
Problèmes 858-861. Calculer la valeur absolue maximale du moment fléchissant dans les portiques.



860



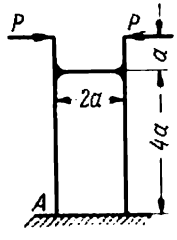
861



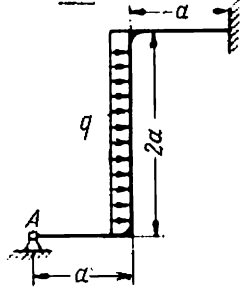
Problèmes 862-870. Calculer les composantes de la réaction dans la section encastrée A des systèmes.

Dans les problèmes 868-870 calculer aussi les déplacements verticaux δ de la section C en supposant que dans tous les tronçons des systèmes la section est circulaire et le matériau le même; $G = 0{,}4E$.

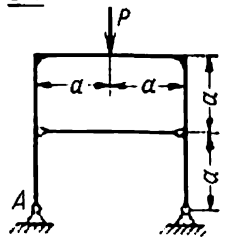
862



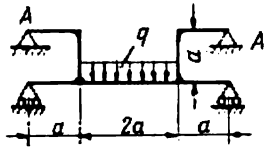
863



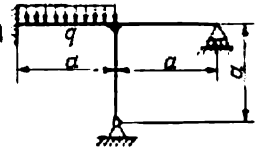
864



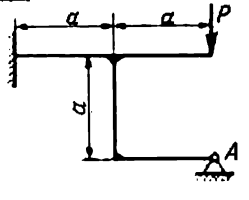
865



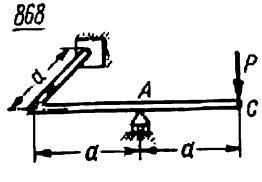
866



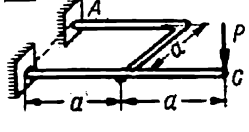
867



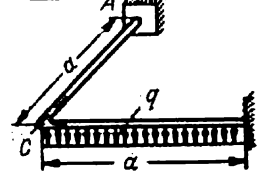
868



869

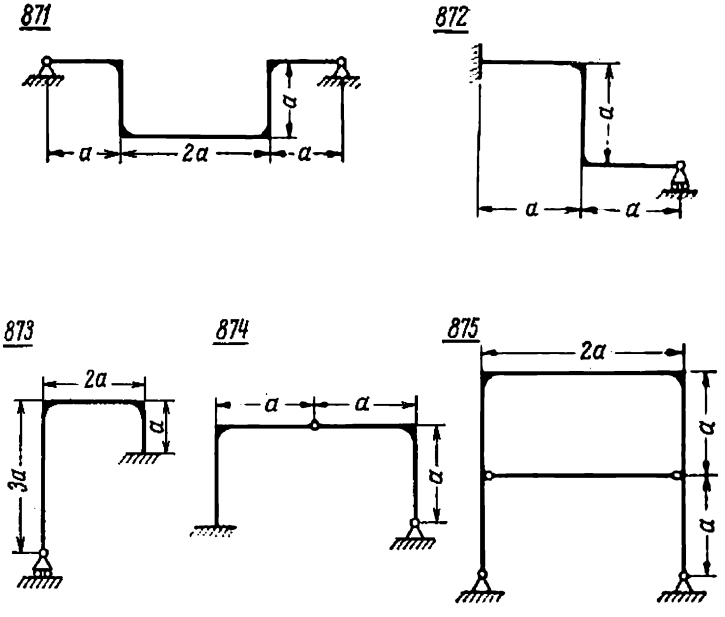


870



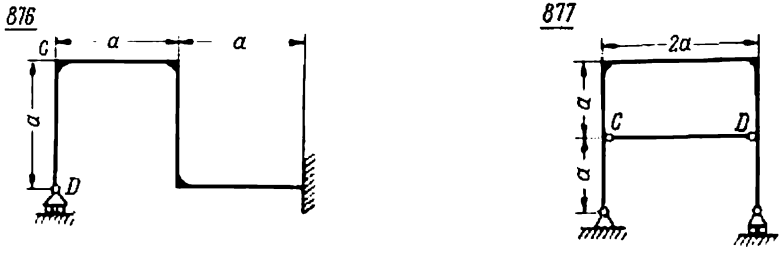
Problèmes 871-875. Calculer les contraintes normales maximales développées dans les barres des systèmes par suite d'une élévation de température de Δt °C.

Tenir compte seulement de la déformation de flexion. Même section symétrique de hauteur h et même matériau avec E et α donnés pour toutes les barres de chaque système.

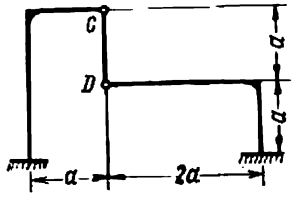


Problèmes 876-879. Calculer les contraintes maximales dues aux défauts de montage dans les systèmes, si la longueur de la barre CD est supérieure de Δ à la longueur de projet.

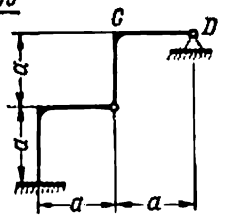
Tenir compte seulement de la déformation de flexion. Même section symétrique de hauteur h et même matériau avec E donné pour toutes les barres de chaque système.



878



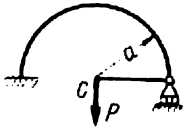
879



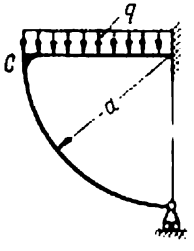
Problèmes 880-884. Calculer la réaction de l'articulation droite et le déplacement vertical δ de la section C dans les systèmes *.

Dans le problème 882 la charge q est uniformément répartie suivant l'horizontale.

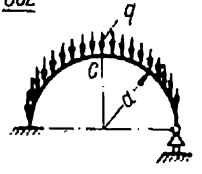
880



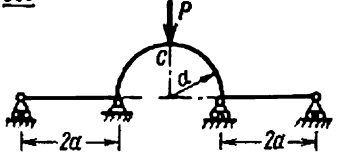
881



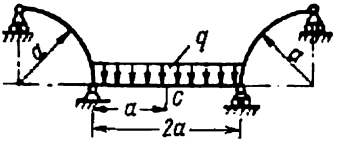
882



883

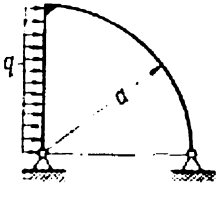


884

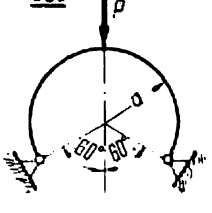


Problèmes 885-889. Calculer les composantes des réactions dans les encastrements de l'extrémité gauche des systèmes.

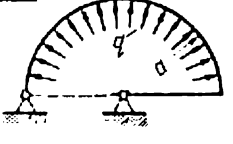
885



886

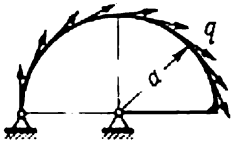


887

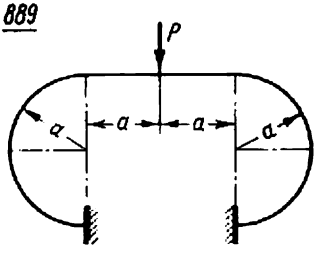


* Dans les problèmes 880-915 tenir compte seulement de la déformation due au moment fléchissant; les rigidités EI de toutes les barres du système sont supposées les mêmes.

888

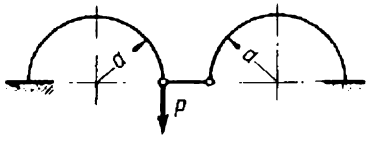


889

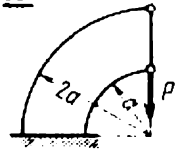


Problèmes 890-895. Calculer le déplacement vertical de la section où la force P est appliquée aux systèmes.

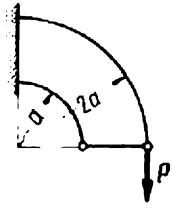
890



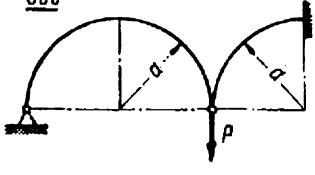
891



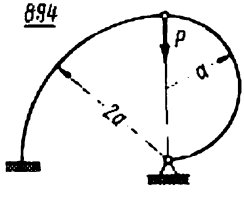
892



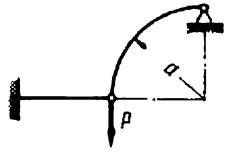
893



894

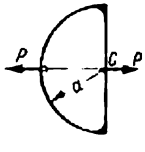


895

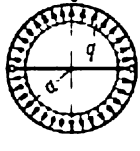


Problèmes 896-899. Calculer les moments fléchissants dans la section C des systèmes.

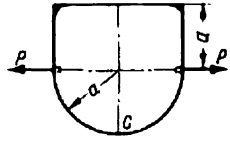
896



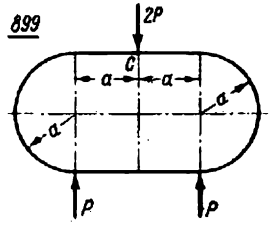
897



898

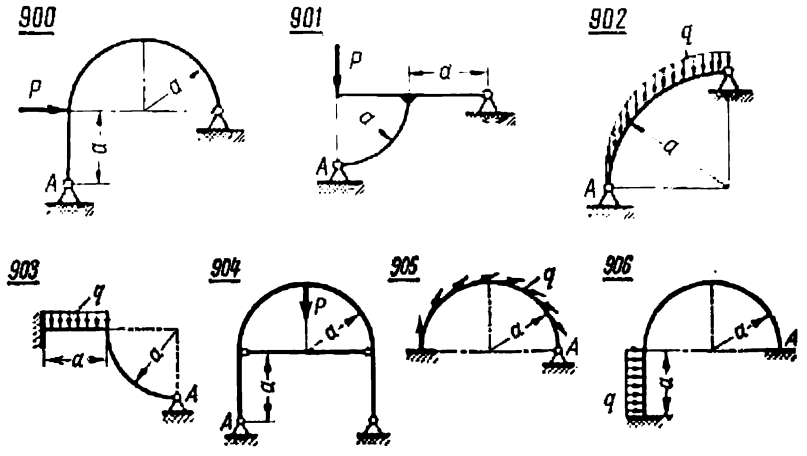


899

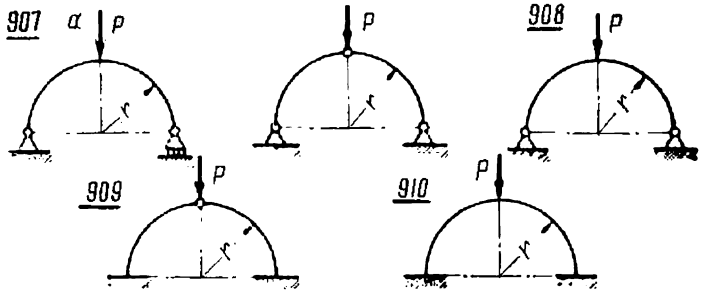


Problèmes 900-906. Calculer les composantes de la réaction dans la section encastrée A des systèmes.

Dans le problème 902 la charge q est uniformément répartie suivant l'horizontale.

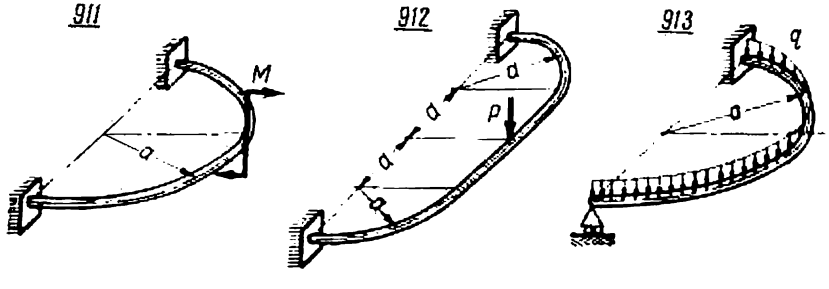


Problèmes 907-910. Déterminer dans les systèmes indiqués de combien la valeur absolue maximale du moment fléchissant et le déplacement vertical de la section médiane sont plus petits que dans la poutre à courbure initiale isostatique (fig. 907,*a*).



Problèmes 911-913. Calculer les moments réactifs dans l'encastrement et les déplacements verticaux de la section médiane des poutres à courbure initiale.

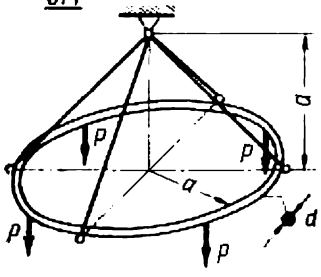
Les sections droites des barres sont circulaires; $G = 0{,}4E$.



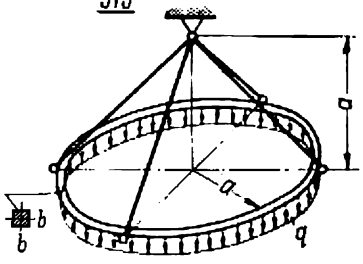
Problèmes 914-915. Déterminer les dimensions nécessaires des sections droites des anneaux circulaires.

La contrainte normale admissible du matériau des anneaux est $[\sigma]$.

914



915



XIII. CALCUL DES TUBES ÉPAIS

§ 1. Tube cylindrique

Pour les tubes de longueur illimitée sans fonds, soumis à des pressions constantes radiales intérieure p_1 et extérieure p_2 (fig. 203), les contraintes circonférencielles (tangentielles) σ_τ et radiales normales σ_r en un point arbitraire de la paroi situé à une distance ρ

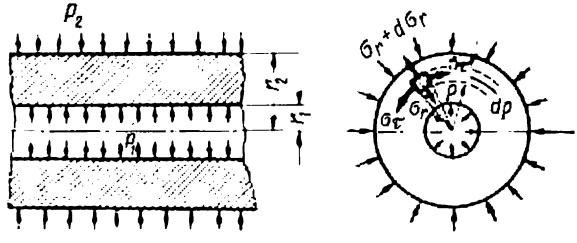


Fig. 203

du centre, sont déterminées par les formules:

$$\sigma_\tau = \frac{p_1 r_1^2\left(1+\frac{r_2^2}{\rho^2}\right) - p_2 r_2^2\left(1+\frac{r_1^2}{\rho^2}\right)}{r_2^2 - r_1^2}, \tag{202}$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2\left(1-\frac{r_2^2}{\rho^2}\right) - p_2 r_2^2\left(1-\frac{r_1^2}{\rho^2}\right)}{r_2^2 - r_1^2}. \tag{203}$$

La contrainte $\sigma_r < 0$ pour toute valeur de p_1 et p_2, et σ_τ peut être plus grand ou plus petit que zéro, selon le rapport des quantités p_1 et p_2.

Si $p_1 > \frac{p_2}{2}\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}+1\right)$ alors $\sigma_\tau > 0$. On a dans ce cas des diagrammes de σ_r et de σ_τ d'après l'épaisseur de la paroi du tube de la forme représentée fig. 204.

Les valeurs maximales et minimales des contraintes sont:

$$\left.\begin{aligned} \max \sigma_r &= \sigma_{r_{\rho=r_2}} = -p_2, \\ \min \sigma_r &= \sigma_{r_{\rho=r_1}} = -p_1, \\ \max \sigma_\tau &= \sigma_{\tau_{\rho=r_1}} = \frac{p_1(r_1^2+r_2^2)-2p_2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}, \\ \min \sigma_\tau &= \sigma_{\tau_{\rho=r_2}} = \frac{2p_1r_1^2-p_2(r_2^2+r_1^2)}{r_2^2-r_1^2}. \end{aligned}\right\} \quad (204)$$

Si $p_1 = \frac{p_2}{2}\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}+1\right)$, alors $\min \sigma_\tau = 0$.

Aux points dangereux de la surface intérieure du tube (fig. 205), l'équation de calcul, selon la cinquième hypothèse de résistance

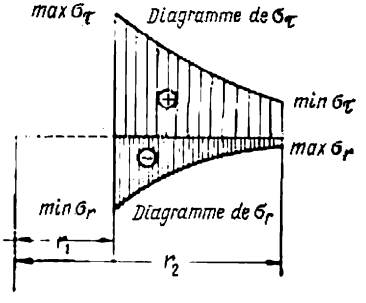


Fig. 204

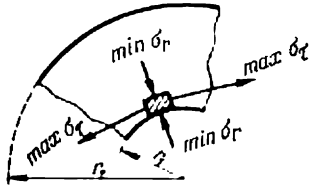


Fig. 205

(l'hypothèse de Mohr), est:

$$\max \sigma_\tau - \nu \min \sigma \leqslant [\sigma_t],$$

d'où

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_t]+(1-\nu)p_1}{[\sigma_t]-(1+\nu)p_1+2p_2}}, \quad (205)$$

avec:

$$\nu = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}.$$

Pour un matériau de même résistance en traction et compression $[\sigma_t] = [\sigma_c] = [\sigma]$, $\nu = 1$, et l'équation (205) prend la forme:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma]-2p_1+2p_2}}. \quad (206)$$

Si $p_1 < 2p_2/(1 + r_1^2/r_2^2)$, alors $\sigma_\tau < 0$. On a dans ce cas les diagrammes de σ_r et de σ_τ de la forme représentée fig. 206.

Les valeurs maximales et minimales des contraintes sont:

$$\left.\begin{aligned} \max \sigma_r &= \sigma_{r_{\rho=r_1}} = -p_1, \\ \min \sigma_r &= \sigma_{r_{\rho=r_2}} = -p_2, \\ \max \sigma_\tau &= \sigma_{\tau_{\rho=r_2}} = \frac{2p_1 r_1^2 - p_2(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \min \sigma_\tau &= \sigma_{\tau_{\rho=r_1}} = \frac{p_1(r_2^2 + r_1^2) - 2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (207)$$

Si $p_1 = 2p_2/(1 + r_1^2/r_2^2)$, alors $\max \sigma_\tau = 0$.

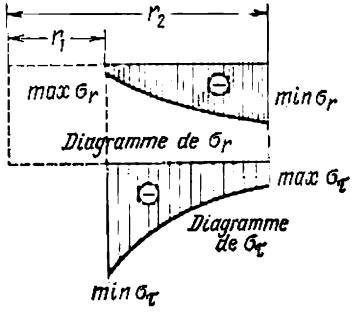


Fig. 206

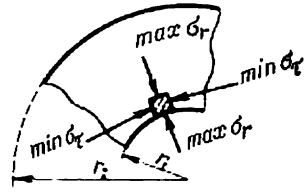


Fig. 207

Aux points dangereux de la surface intérieure du tube (fig. 207), l'équation de calcul, selon la cinquième hypothèse de résistance, s'écrit sous la forme:

$$-\nu \min \sigma_\tau = [\sigma_t],$$

d'où:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_c] - p_1}{[\sigma_c] + p_1 - 2p_2}}. \qquad (208)$$

Pour un rapport des pressions dans l'intervalle:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} + 1\right) < \frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{r_2^2} + 1\right)$$

les valeurs de σ_τ ont des signes différents selon l'épaisseur de la paroi du tube. Si $p_1 = p_2 = p$, alors $\sigma_\tau = \sigma_r = -p$.

Le déplacement radial δ d'un point arbitraire de la paroi du tube est déterminé par la formule:

$$\delta = \frac{\rho}{E}(\sigma_\tau - \mu\sigma_r) = \frac{\rho}{E(r_2^2 - r_1^2)}\left\{p_1 r_1^2\left[1 + \frac{r_2^2}{\rho^2} - \mu\left(1 - \frac{r_2^2}{\rho^2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - p_2 r_2^2\left[1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} - \mu\left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2}\right)\right]\right\}, \qquad (209)$$

où E et μ sont le module d'élasticité longitudinale et le coefficient de Poisson du matériau du tube.

La variation du rayon intérieur du tube est:

$$\Delta r_1 = \delta_{\rho=r_1} = \frac{r_1}{E}\left[p_1\left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \mu\right) - 2p_2\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]. \qquad (210)$$

La variation du rayon extérieur:

$$\Delta r_2 = \delta_{\rho=r_2} = \frac{r_2}{E}\left[2p_1\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2\left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu\right)\right]. \qquad (211)$$

Si le tube est soumis seulement à une pression intérieure p_1, dans les formules (202-211) il faut poser $p_2 = 0$.

Les diagrammes de σ_τ et σ_r seront semblables aux diagrammes de la fig. 204, mais avec $p_2 = 0$.

Si le tube est soumis seulement à une pression extérieure p_2, dans les formules (202-211) il faut poser $p_1 = 0$.

Les diagrammes de σ_τ et σ_r seront semblables aux diagrammes de la fig. 206, mais avec $p_1 = 0$.

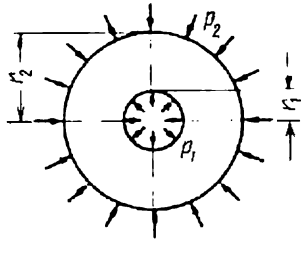


Fig. 208

Exemple 112. Soient: $p_2 = 1$ MN/m^2, $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 8$ cm, $[\sigma_t] = 30$ MN/m^2, $[\sigma_c] = 120$ MN/m^2, $E = 1{,}2 \cdot 10^5$ MN/m^2, $\mu = 0{,}24$ (fig. 208).

Calculer p_1, Δr_1 et Δr_2; supposer que $p_1 > p_2$.

Solution. D'après la formule (205), on a:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_t] + (1 - \nu)p_1}{[\sigma_t] - (1 + \nu)p_1 + 2p_2}}.$$

Puisque $\nu = [\sigma_t]/[\sigma_c] = 0{,}25$ et $r_2/r_1 = 2$, en reportant les valeurs numériques et en élévant au carré les deux membres de

l'équation, on obtient:

$$4 = \frac{30 + 0{,}75p_1}{30 - 1{,}25p_1 + 2},$$

d'où l'on tire: $p_1 = \frac{98}{5{,}75} \approx 17$ MN/m².

D'après la formule (210):

$$\Delta r_1 = \frac{4}{1{,}2 \cdot 10^5}\left[17\left(\frac{64+16}{64-16} + 0{,}24\right) - 2\frac{64}{64-16}\right] \approx$$

$$\approx 0{,}99 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \approx 0{,}01 \text{ mm}.$$

D'après la formule (211):

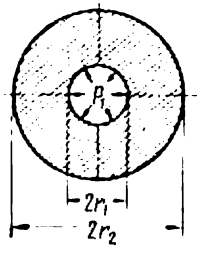
$$\Delta r_2 = \frac{8}{1{,}2 \cdot 10^5}\left[2 \cdot 17 \cdot \frac{16}{64-16} - \left(\frac{64+16}{64-16} - 0{,}24\right)\right] \approx$$

$$\approx 0{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \approx 0{,}007 \text{ mm}.$$

Problèmes 916-918. Calculer les quantités inconnues.

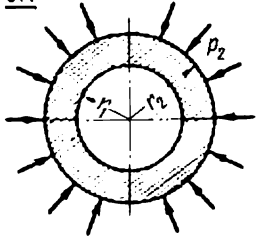
Dans les problèmes 916, 917, 918,*a* utiliser la troisième hypothèse de résistance, dans le problème 918,*b*, la cinquième.

916



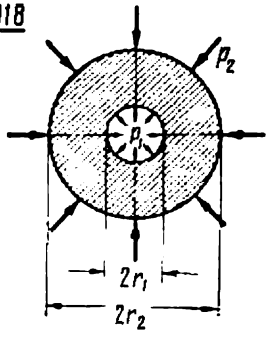
$p_1 = 2000$ kgf/cm²
$r_1 = 10$ cm
$[\sigma] = 6000$ kgf/cm²
$E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm²
$\mu = 0{,}3$
$r_2 = ?$
$\Delta r_1 = ?$

917



$r_1 = 10$ cm
$r_2 = 15$ cm
$[\sigma] = 400$ MN/m²
$\mu = 0{,}3$
$E = 2 \cdot 10^5$ MN/m²
$p_2 = ?$
$\Delta r_2 = ?$

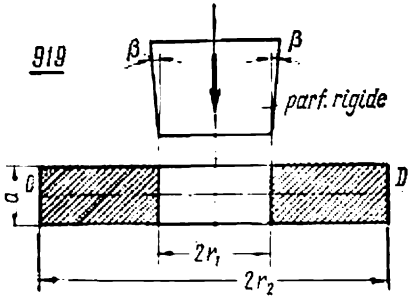
918



a)
$p_1 = 2000$ kgf/cm²
$p_2 = 500$ kgf/cm²
$r_1 = 10$ cm
$E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm²
$\mu = 0{,}3$
$[\sigma] = 6000$ kgf/cm²
$r_2 = ?$
$\Delta r_1 = ?$ $\Delta r_2 = ?$

b)
$p_1 \gg p_2$
$p_2 = 1{,}5$ MN/m²
$r_1 = 5$ cm; $r_2 = 10$ cm
$[\sigma_t] = 30$ MN/m²
$[\sigma_c] = 120$ MN/m²
$E = 1{,}2 \cdot 10^5$ MN/m²
$\mu = 0{,}25$
$p_1 = ?$

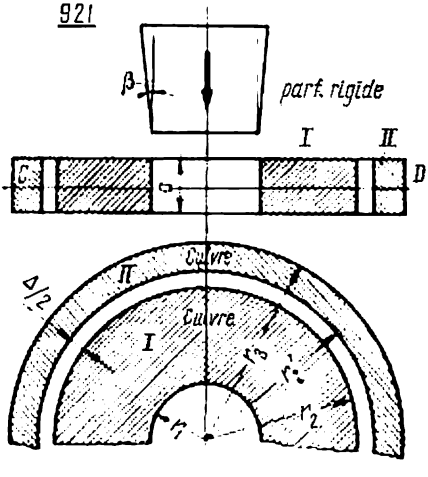
Problème 919. Un poinçon conique parfaitement rigide de faible ouverture β est enfoncé dans un anneau épais de longueur a. Déterminer la pression p_0 engendrée entre le poinçon et l'anneau dans la section moyenne CD de l'anneau, lorsque le poinçon a avancé de toute la hauteur a de l'anneau. Trouver aussi les contraintes maximales dans la section CD de l'anneau.



Problème 920. Déterminer pour quelle ouverture β du poinçon du problème précédent l'accroissement du rayon de la surface extérieure dans la section moyenne de l'anneau sera de $\Delta r_2 = 0{,}2$ mm, si $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 30$ cm, $E = 10^6$ kgf/cm², $\mu = 0{,}34$, $a = 5$ cm.

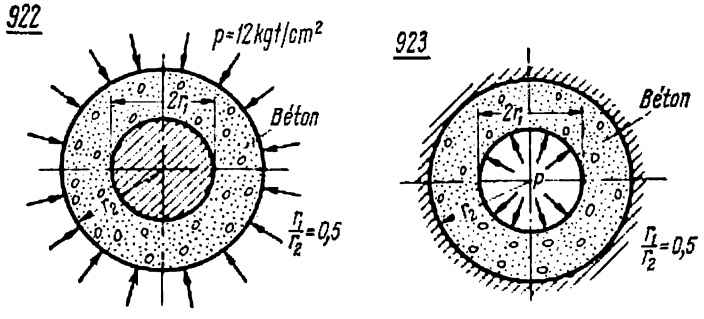
Problème 921. Déterminer pour quelle ouverture β du poinçon conique s'enfonçant d'une longueur a dans l'orifice intérieur, le jeu entre les tubes I et II sera éliminé et une pression $p = 100$ kgf/cm² développée entre des tubes.

Effectuer le calcul pour la section moyenne CD; prendre $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 30$ cm, $r_3 = 40$ cm, $E = 10^6$ kgf/cm², $\mu = 0{,}34$, $a = 5$ cm, $\Delta = 0{,}4$ mm.



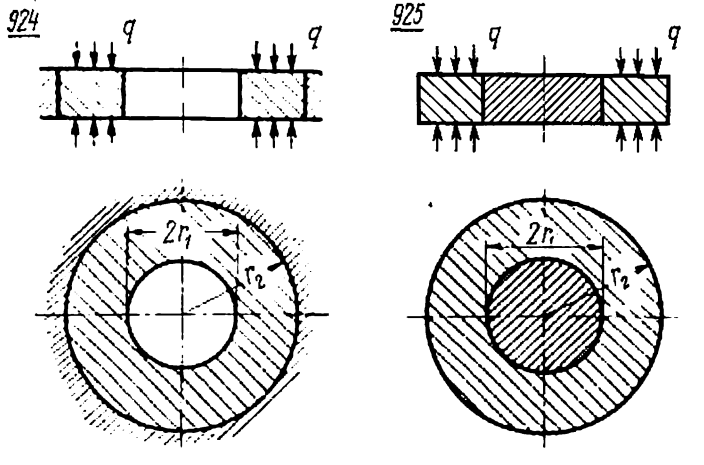
Problème 922. Calculer la pression p_0 entre un tube en béton et un noyau parfaitement rigide, vérifier aussi la résistance du tube à l'aide de la cinquième hypothèse de résistance. On prendra : $E_b = 2 \cdot 10^5$ kgf/cm², $\mu_b = 0{,}16$, $[\sigma_c]_b = 20$ kgf/cm², $[\sigma_t]_b = 4$ kgf/cm².

Problème 923. Calculer la valeur de la pression intérieure maximale p qui peut être appliquée à un tube en béton entouré d'une enveloppe mince parfaitement rigide, et la pression limite p_0 entre l'enveloppe et le béton, si $E_b = 2 \cdot 10^5$ kgf/cm², $\mu_b = 0{,}16$, $[\sigma_c]_b = 50$ kgf/cm², $[\sigma_t]_b = 5$ kgf/cm².



Problème 924. Calculer la pression limite p_0 entre l'anneau et l'enveloppe mince parfaitement rigide, si les valeurs de q, r_1, r_2 et μ sont connues. Supposer que la valeur du module d'élasticité du matériau de l'anneau est petite.

Problème 925. Calculer la pression p_0 entre l'anneau et le noyau en supposant q, r_1, r_2 et μ connues.



§ 2. Tubes cylindriques composés

Dans le cas d'une pression intérieure très grande, on utilise des tubes obtenus par frettage de deux ou plusieurs cylindres. La cohésion des cylindres et le développement dans leurs parois de contraintes initiales sont dus au fait que le diamètre intérieur du cylindre extérieur est plus petit que le diamètre extérieur du cylindre intérieur d'une grandeur Δ (fig. 209).

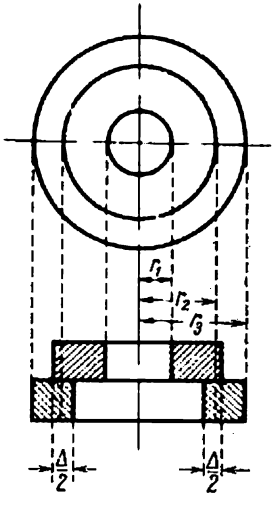


Fig. 209

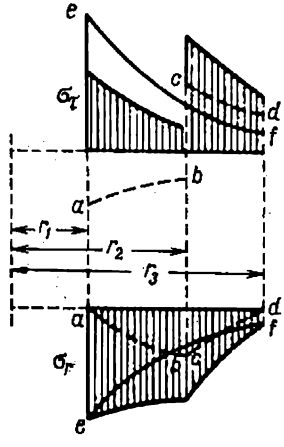


Fig. 210

Pour une même longueur des cylindres, la pression de serrage p_0 est uniformément répartie sur les surfaces en contact et est égale à:

$$p_0 = \frac{\dfrac{\Delta}{2r_2}}{\dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}-\mu_1\right)+\dfrac{1}{E_2}\left(\dfrac{r_3^2+r_2^2}{r_3^2-r_2^2}+\mu_2\right)}, \qquad (212)$$

où E_1, E_2, μ_1, μ_2 sont les modules d'élasticité longitudinale et les coefficients de Poisson des matériaux des cylindres intérieur et extérieur.

Si les cylindres sont fabriqués d'un même matériau:

$$E_1 = E_2 = E, \qquad \mu_1 = \mu_2$$

et

$$p_0 = \frac{\Delta E}{4r_2^3} \cdot \frac{(r_3^2-r_2^2)(r_2^2-r_1^2)}{r_3^2-r_1^2}. \qquad (213)$$

Dans les parois des cylindres unis, les contraintes initiales dues à la pression p_0 sont déterminées par les formules (202) et (203), compte tenu du fait que pour le cylindre intérieur de rayons r_1 et r_2 la pression de serrage p_0 est une pression extérieure (la pression intérieure est nulle), et pour le cylindre extérieur de rayons r_2 et r_3 la pression de serrage est une pression intérieure (la pression extérieure est nulle).

Les diagrammes approximatifs des contraintes σ_τ et σ_r dues à la pression p_0 dans les cylindres unis sont représentés fig. 210 par les lignes pointillées *ab* et *cd*.

Les contraintes σ_τ et σ_r dans un tube composé, soumis à une grande pression intérieure p_1 et à une faible pression extérieure p_2, sont déterminées d'après les formules (202) et (203) comme pour un tube unique de rayons r_1 et r_3.

Les diagrammes approximatifs de ces contraintes sont représentés fig. 210 par des lignes *ef*.

Les contraintes résultantes dans un tube composé sont déterminées par la méthode de superposition des contraintes représentées par les diagrammes *ab*, *cd* et *ef*.

Sur la fig. 210 les diagrammes approximatifs des contraintes résultantes σ_τ et σ_r sont hachurés.

Si les cylindres dont est composé le tube sont fabriqués de matériaux de même résistance en traction et en compression, le rapport optimal entre les rayons et la quantité Δ, selon la troisième hypothèse de résistance, est établi par les formules:

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3}, \tag{214}$$

$$\Delta = \frac{2r_2}{E}(p_1 - p_2). \tag{215}$$

La pression maximale intérieure excédente est:

$$\max(p_1 - p_2) = \frac{r_3 - r_1}{r_3}[\sigma]. \tag{216}$$

Cette même méthode de calcul s'applique aussi à des tubes composés de trois ou plusieurs cylindres. D'après la quantité Δ pour les deux premiers cylindres, on détermine la pression de serrage entre eux et ensuite les contraintes initiales dans ces cylindres. D'après la seconde quantité Δ entre le bloc composé de deux cylindres (considéré comme un cylindre de dimensions globales) et le troisième cylindre, on détermine d'une manière analogue la nouvelle pression de serrage sur la surface de contact commune et ensuite

les contraintes initiales dans le bloc composé de deux cylindres et dans le troisième cylindre.

Les contraintes initiales résultantes dans le bloc composé de trois cylindres sont déterminées par la méthode de superposition des contraintes initiales trouvées pour le premier et le second frettage. Les contraintes dues à la pression de service dans le bloc composé de trois cylindres sont déterminées comme pour un tube entier unique de dimensions globales. La somme algébrique des contraintes trouvées donne les valeurs de calcul selon lesquelles on vérifie la résistance.

L'addition d'un quatrième cylindre, etc., conduit à la nécessité de trouver la nouvelle pression de serrage et les contraintes initiales supplémentaires.

La pression de serrage pour le frettage d'un cylindre entier et d'un cylindre creux est déterminée par la formule (212) ou (213), à condition que $r_1 = 0$.

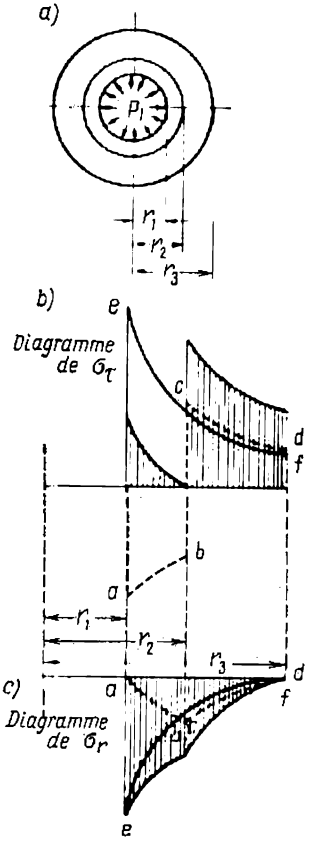


Fig. 211

Exemple 113. Projeter un tube composé de deux cylindres de dimensions rationnelles et vérifier sa résistance à l'aide de la troisième hypothèse de résistance. On prendra : $p_1 = 2\,000$ kgf/cm², $p_2 = 0$, $r_1 = 8$ cm, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $[\sigma] = 3\,000$ kgf/cm² (fig. 211,*a*).

Solution. D'après la formule (216) on calcule le rayon extérieur du tube composé :

$$r_3 = \frac{[\sigma] r_1}{[\sigma] - p_1} = \frac{3\,000 \cdot 8}{3\,000 - 2\,000} = 24 \text{ cm}.$$

D'après la formule (214) on trouve le rayon de la surface de contact commune des cylindres :

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3} = \sqrt{8 \cdot 24} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}856 \text{ cm}.$$

Pour simplifier les calculs, on prend $r_2 = 14$ cm. D'après la formule (215), on trouve la valeur nécessaire de Δ :

$$\Delta = \frac{2r_2}{E} p_1 = \frac{2 \cdot 14}{2 \cdot 10^6} \cdot 2 \cdot 10^3 = 0{,}028 \text{ cm},$$

et à l'aide de la formule (213) on calcule la valeur de la pression de serrage :

$$p_0 = \frac{\Delta E}{4r_2} \cdot \frac{\left[1-\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]}{1-\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2} = \frac{0{,}028 \cdot 2 \cdot 10^6}{4 \cdot 14} \times$$

$$\times \frac{\left[1-\left(\frac{7}{12}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \approx 500 \text{ kgf/cm}^2.$$

Déterminons les contraintes initiales dues à la pression de serrage p_0.

Dans la paroi du cylindre intérieur.

D'après les formules (207), pour $p_1 = 0$ et $p_2 = p_0$, on a :

$$\max \sigma_\tau = \sigma_{\tau_{\rho=r_2}} = -p_0 \frac{1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = -500 \frac{1+\left(\frac{4}{7}\right)^2}{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2} \approx$$

$$\approx -985 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\min \sigma_\tau = \sigma_{\tau_{\rho=r_1}} = -2p_0 \frac{1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = -10^3 \frac{1}{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2} \approx$$

$$\approx -1\,485 \text{ kgf/cm}^2.$$

$$\max \sigma_r = \sigma_{r_{\rho=r_1}} = 0,$$

$$\min \sigma_r = \sigma_{r_{\rho=r_2}} = -p_0 = -500 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les diagrammes de σ_τ et σ_r sont représentés fig. 211,*b*, *c* par les lignes pointillées *ab*.

Dans la paroi du cylindre extérieur.

Selon les formules (204) pour $p_1 = p_0$ et $p_2 = 0$ et en supposant $r_1 = r_2$, $r_2 = r_3$, on a :

$$\max \sigma_\tau = \sigma_{\tau_{\rho=r_2}} = p_0 \frac{1+\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2}{1-\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2} = 500 \frac{1+\left(\frac{7}{12}\right)^2}{1-\left(\frac{7}{12}\right)^2} \approx$$

$$\approx 1\,016 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\min \sigma_\tau = \sigma_{\tau_{\rho=r_3}} = 2p_0 \frac{1}{\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 - 1} = 10^3 \frac{1}{\left(\frac{12}{7}\right)^2 - 1} \approx 516 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\max \sigma_r = \sigma_{r_{\rho=r_3}} = 0, \quad \min \sigma_r = \sigma_{r_{\rho=r_2}} = -p_0 = -500 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les diagrammes de σ_τ et σ_r sont représentés fig. 211,*b*, *c* par les lignes pointillées *cd*.

On détermine les contraintes dans la paroi du bloc composé de deux cylindres (considéré comme un tube entier) dues à la pression intérieure p_1.

D'après les formules (204) pour $p_1 = 2\,000$ kgf/cm² et $p_2 = 0$, en supposant $r_1 = r_1$, $r_2 = r_3$, on a :

$$\max \sigma_\tau = \sigma_{\tau_{\rho=r_1}} = p_1 \frac{1 + \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2\,500 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\min \sigma_\tau = \sigma_{\tau_{\rho=r_3}} = 2p_1 \frac{1}{\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 - 1} = 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \frac{1}{3^2 - 1} = 500 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\max \sigma_r = \sigma_{r_{\rho=r_3}} = 0,$$

$$\min \sigma_r = \sigma_{r_{\rho=r_1}} = -p_1 = -2\,000 \text{ kgf/cm}^2.$$

Selon les formules (202) et (203) pour $p_1 = 2\,000$ kgf/cm² et $p_2 = 0$, en supposant pour les points de la surface commune de contact $r_1 = r_1$ et $r_2 = r_3$, on a :

$$\sigma_{\tau_{\rho=r_2}} = p_1 \frac{1 + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2}{\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 - 1} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 + \left(\frac{12}{7}\right)^2}{3^2 - 1} \approx 985 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_2}} = p_1 \frac{1 - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2}{\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 - 1} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 - \left(\frac{12}{7}\right)^2}{3^2 - 1} \approx -485 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les diagrammes de σ_τ et σ_r sont représentés fig. 211,*b*, *c* par des lignes *ef*.

On trouve les contraintes résultantes dans la paroi du cylindre intérieur :

$$\sigma_{\tau_{\rho=r_1}} = -1\,485 + 2\,500 = 1\,015 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{\tau_{\rho=r_2}} = -985 + 985 = 0,$$

$\sigma_{r_{\rho=r_1}} = -2\,000$ kgf/cm^2; $\sigma_{r_{\rho=r_2}} = -500 - 485 = -985$ kgf/cm^2;

et dans la paroi du cylindre extérieur :

$$\sigma_{\tau_{\rho=r_2}} = 1\,016 + 985 = 2\,001 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{\tau_{\rho=r_3}} = 516 + 500 = 1\,016 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_2}} = -500 - 485 = -985 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_3}} = 0.$$

Les diagrammes des contraintes résultantes σ_τ et σ_r sont hachurés sur la fig. 211, *b*, *c*.

Les valeurs des contraintes équivalentes selon la troisième hypothèse de résistance sont les suivantes :

aux points de la surface intérieure du cylindre intérieur :

$$\sigma_{éq_{III}} = \sigma_{\tau_{\rho=r_1}} - \sigma_{r_{\rho=r_1}} = 1\,015 + 2\,000 = 3\,015 \text{ kgf/cm}^2;$$

aux points de la surface intérieure du cylindre extérieur :

$$\sigma_{éq_{III}} = \sigma_{\tau_{\rho=r_2}} - \sigma_{r_{\rho=r_2}} = 2\,001 + 985 = 2\,986 \text{ kgf/cm}^2.$$

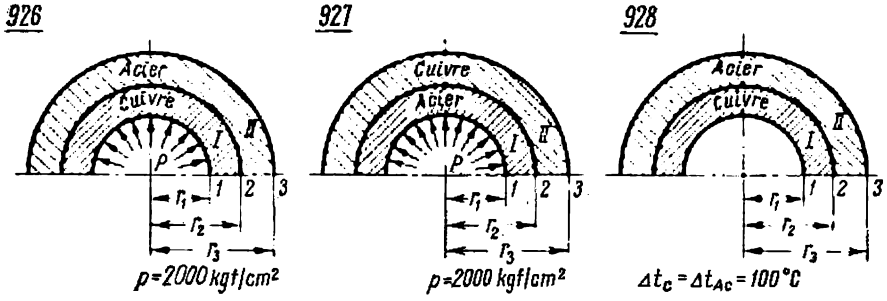
Le léger écart par rapport à la condition d'égale résistance du matériau, aux points dangereux des cylindres, est dû à l'arrondissement de la dimension r_2.

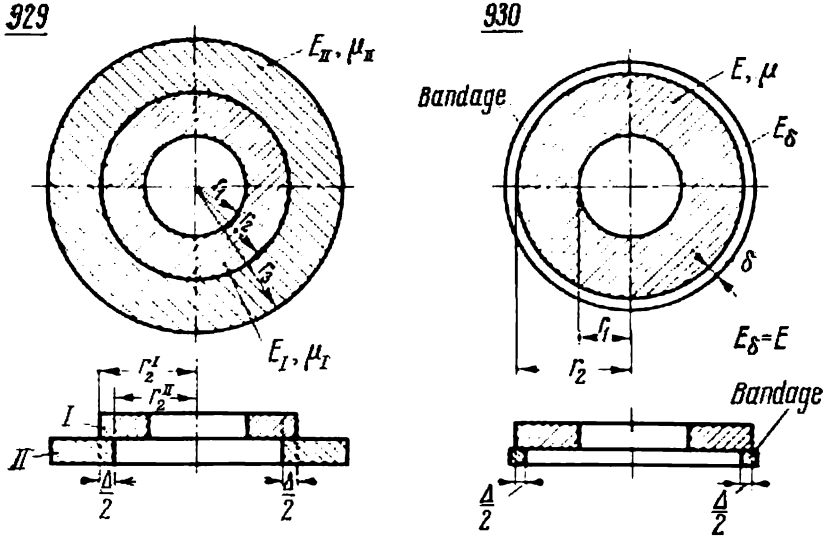
On peut admettre que la condition de résistance $\sigma_{éq_{III}} = [\sigma]$ est vérifiée, car la surtension n'est que de 0,5 %.

Problèmes 926-930. Calculer les contraintes normales radiale σ_r et tangentielle σ_τ, et la pression limite p_0 dans les tubes composés, dues à la pression intérieure p_1 (problèmes 926, 927), à l'échauffement de Δt °C (problème 928), et au frettage à froid, la différence des diamètres des cylindres étant Δ (problèmes 929, 930).

Dans les problèmes 926-928 on prendra : $E\text{Ac} = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2 ; $\mu\text{Ac} = 0{,}3$; $\alpha\text{Ac} = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$; $E_c = 1 \cdot 10^6$ kgf/cm^2 ; $\mu_c = 0{,}34$; $\alpha_c = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$; $r_1 = 10$ cm ; $r_2 = 20$ cm ; $r_3 = 40$ cm.

Dans les problèmes 929, 930 calculer seulement p_0.



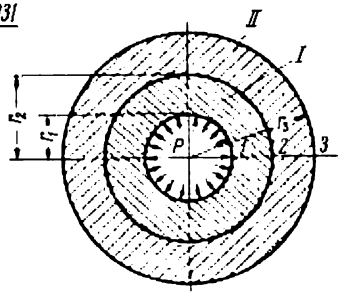


Problème 931. Calculer pour un tube composé de deux cylindres: 1) les contraintes dues au frettage à froid avec $\Delta = 0{,}4$ mm; 2) les contraintes dues à la pression intérieure $p_0 = 2\,000$ kgf/cm²; 3) les contraintes totales; 4) en pour-cent la diminution de la contrainte calculée selon la troisième hypothèse de résistance dans le tube composé, par rapport à un tube unique à âme pleine de mêmes dimensions. On prendra: $r_1 = 10$ cm; $r_2 = 25$ cm; $r_3 = 50$ cm.

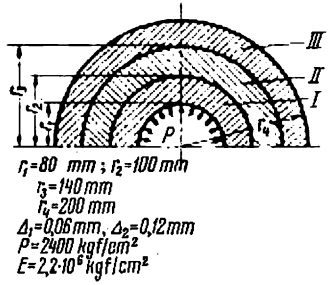
Problème 932. Projeter un tube composé de deux cylindres de dimensions rationnelles à l'aide de la troisième hypothèse de résistance.

On prendra: $r_1 = 10$ cm; $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm²; $\mu = 0{,}3$; $[\sigma] = 4\,000$ kgf/cm²; $p = 3\,000$ kgf/cm².

931



933



r_1=80 mm ; r_2=100 mm
r_3=140 mm
r_4=200 mm
Δ_1=0,06 mm, Δ_2=0,12 mm
p=2400 kgf/cm²
E=2,2·10⁶ kgf/cm²

Problème 933. Calculer pour un tube composé de trois cylindres :

1) les contraintes dues au frettage Δ_1 et Δ_2 ;

2) les contraintes dues à la pression intérieure p ;

3) les contraintes de calcul selon la troisième hypothèse de résistance ;

4) en pour-cent la diminution des contraintes de calcul dans le tube composé par rapport à un tube à âme pleine de mêmes dimensions.

XIV. L'ACTION DYNAMIQUE DES FORCES

§ 1. Calcul des corps (systèmes) en mouvement compte tenu des forces d'inertie

L'action dynamique des forces est caractérisée par la présence d'accélérations dans les éléments du corps (système) considéré. Le caractère de la déformation et de la rupture du corps varie selon les types d'accélérations provoquées.

Les accélérations sont dues aux forces d'inertie, dirigées dans un sens opposé à celui des accélérations. La valeur de la force d'inertie élémentaire dP_i est définie par le produit de la masse dm de l'élément du volume dV du corps par son accélération a, c'est-à-dire:

$$dP_i = dm \cdot a = \frac{\gamma}{g} a \cdot dV,$$

où γ est le poids spécifique du matériau du corps;

g l'accélération de la pesanteur.

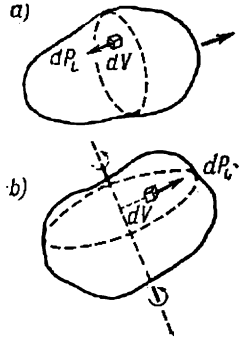


Fig. 212

La fig. 212,*a* montre un mouvement de translation non-uniforme et la fig. 212,*b* un mouvement de rotation uniforme du corps.

On ne remarque aucune particularité dans le comportement du matériau du corps, si pendant le mouvement les éléments du corps sont soumis à une accélération constante. Dans ce cas les contraintes et les déformations peuvent être déterminées comme pour le cas d'une application statique des charges de forces extérieures et de forces d'inertie.

Si le corps (le système) en mouvement est assez rigide et supporte certaines charges, d'après le mouvement donné on détermine les accélérations de ses éléments et des charges, et ensuite les forces d'inertie en fonction de ces accélérations. En ajoutant les forces d'inertie au poids des charges, au poids propre du corps et à toutes les forces extérieures qui agissent sur le corps, on considère le corps comme étant au repos et on le calcule d'après les règles établies pour une application statique des charges.

Si les poids des charges supportées par le corps sont grands par rapport à son poids propre et les forces d'inertie du corps petites devant les forces d'inertie des charges, dans le calcul de résistance et de rigidité du corps on néglige l'effet de son poids propre.

Quand les directions des accélérations a du mouvement donné du corps coïncident avec la ligne d'action de l'accélération de la pesanteur g, la déformation du corps due aux forces d'inertie correspond à la déformation due au poids propre du corps et aux charges qu'il supporte. Si, à part ces dernières, aucune charge n'est appliquée au corps, il est commode de déterminer les efforts dynamiques généralisés P_d, les contraintes p_d (normales σ_d et tangentielles τ_d) et les déplacements δ_d (compte tenu des forces d'inertie) en fonction des quantités P, p et δ, correspondant à l'application statique des charges (sans les forces d'inertie), et le coefficient dynamique:

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}, \tag{217}$$

selon les formules:

$$\left.\begin{aligned} P_d &= k_d P, \\ p_d &= k_d p, \\ \delta_d &= k_d \delta. \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

Quand les directions des accélérations a d'un mouvement donné du corps ne coïncident pas avec la ligne d'action de l'accélération de la pesanteur g, la déformation du corps due aux forces d'inertie ne correspondra pas à la déformation due à son poids propre et aux charges supportées. Dans le calcul d'un tel corps, il faut tenir compte des contraintes et des déformations dues à chaque type de sollicitation obtenue, comme pour l'application statique des charges.

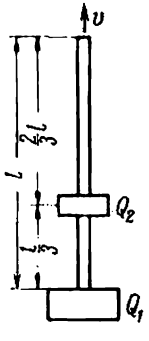


Fig. 213

Exemple 114. Une barre prismatique de longueur l qui supporte deux charges de poids Q_1 et Q_2 est animée d'un mouvement uniformément accéléré vertical vers le haut, et parcourt une distance S pendant les t premières secondes (fig. 213).

Calculer l'aire nécessaire F de la section droite de la barre et son allongement dynamique, si le poids spécifique du matériau de la barre est γ, le module d'élasticité longitudinale E et la contrainte admissible en traction $[\sigma]$.

Solution. L'effort longitudinal statique maximal est développé dans la section supérieure de la barre:

$$\max N = Q_1 + Q_2 + \gamma F l.$$

La contrainte normale statique maximale est:

$$\max \sigma = \frac{\max N}{F} = \frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l.$$

Puisque l'accélération du mouvement étudié $a = \frac{2S}{t^2}$ est dirigée verticalement vers le haut, le coefficient dynamique est:

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}.$$

La contrainte dynamique maximale:

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma = k_d \left(\frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l \right).$$

Selon la condition de résistance, on a:

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma \leqslant [\sigma]$$

ou

$$\max \sigma = \frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l \leqslant \frac{[\sigma]}{k_d}.$$

D'où pour l'aire nécessaire de la section droite de la barre:

$$F \geqslant \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{[\sigma]}{k_d} - \gamma l}.$$

L'allongement de la barre d'aire F lors de l'application statique des forces est:

$$\Delta l = \left(Q_1 + \frac{2}{3} Q_2 + \frac{1}{2} \gamma F l \right) \frac{1}{EF}.$$

L'allongement dynamique de la barre $\Delta l_d = k_d \Delta l$.

Exemple 115. Un ressort cylindrique hélicoïdal de faible pas dont la longueur est $l = 30$ cm, le rayon des spires $R = 2$ cm, le rayon de la section du fil $r = 0{,}2$ cm, le nombre de spires $n_0 = 10$ supporte une charge de poids $Q = 1$ kgf à son extrémité et est animé dans le plan vertical d'un mouvement de rotation autour d'une articulation fixe faisant $n = 200$ tr/mn (fig. 214).

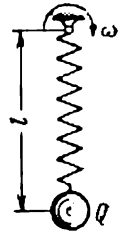


Fig. 214

Calculer la contrainte tangentielle dynamique maximale dans la section du fil du ressort et le déplacement maximal de la charge Q, si le module d'élasticité transversale du matériau du fil est $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, le poids du ressort étant très petit devant le poids Q de la charge.

Solution. Dans la position extrême basse de la charge Q le ressort est soumis à une force dynamique maximale de traction $P_d = k_d Q$.

Par suite de la faible rigidité du ressort, dans le calcul de la force centrifuge il faut tenir compte de l'allongement de l'axe du ressort.

Par conséquent, le coefficient dynamique est :

$$k_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{\omega^2}{g}(l + \Delta l),$$

où ω est la vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 200}{30} = 21 \text{ rad/sec} ; \quad \frac{\omega^2}{g} = \frac{21^2}{981} \approx 0{,}45 \text{ 1/sec},$$

et

$$\Delta l = \frac{4P_d R^3 n_0}{Gr^4} = P_d \frac{4 \cdot 8 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = \frac{P_d}{4} \text{ cm}.$$

Donc :

$$P_d = Q\left[1 + \frac{\omega^2}{g}\left(l + \frac{4P_d R^3 n_0}{Gr^4}\right)\right] =$$

$$= Q[1 + 0{,}45(30 + 0{,}25P_d)] \approx Q(14{,}5 + 0{,}11P_d),$$

d'où l'on tire :

$$P_d = \frac{14{,}5\,Q}{1 - 0{,}11\,Q} \approx 17{,}1 \text{ kgf}.$$

La valeur de la contrainte tangentielle dynamique maximale dans la section droite du fil du ressort est :

$$\max \tau_d = \frac{2P_d R}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 17{;}1 \cdot 2}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3}} \approx 2\,720 \text{ kgf/cm}^2.$$

Le déplacement dynamique maximal de la charge est :

$$\Delta l = \frac{1}{4} P_d = \frac{17{,}1}{4} \approx 4{,}3 \text{ cm}.$$

Exemple 116. Une barre prismatique de longueur l supporte en son extrémité supérieure une charge de poids Q et est encastrée à son extrémité inférieure dans un corps parfaitement rigide, animé d'un mouvement uniformément accéléré (d'accélération a) dans un plan faisant un angle α avec le plan horizontal (fig. 215,*a*).

Calculer les contraintes normales dynamiques maximale et minimale dans la section dangereuse de la barre, si l'aire et le module de résistance en flexion de la section sont F et W, le poids de l'unité de longueur de la barre étant q.

Solution. Quand le système est en mouvement, la barre est soumise : à la charge Q, à son poids propre q, dirigés verticalement vers le bas ; à la force d'inertie concentrée $\frac{Qa}{g}$ et à la charge

d'inertie uniformément répartie $\frac{qa}{g}$, dirigées sous un angle $\frac{\pi}{2}-\alpha$ à l'axe géométrique dans le sens opposé au mouvement (fig. 215,*b*).

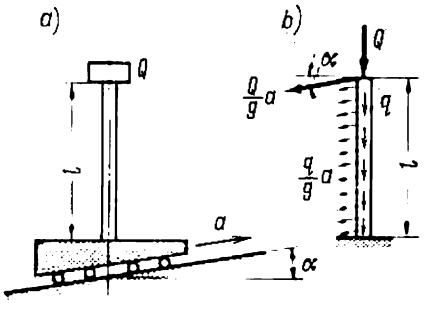


Fig. 215

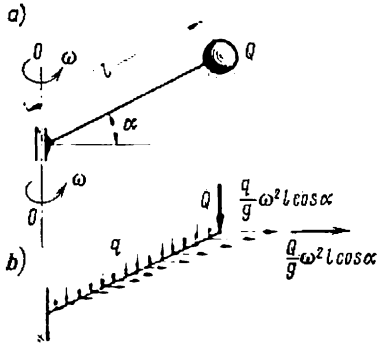


Fig. 216

Dans la section dangereuse encastrée de la barre agissent des contraintes normales dues:

aux poids Q et q qui provoquent une compression axiale:

$$\sigma' = -\frac{Q+ql}{F};$$

aux composantes des forces d'inertie appliquées le long de l'axe géométrique de la barre qui provoquent une compression axiale:

$$\sigma'' = -\frac{(Q+ql)\,a\sin\alpha}{gF};$$

aux composantes des forces d'inertie appliquées perpendiculairement à l'axe géométrique de la barre qui provoquent une flexion:

$$\sigma''' = \pm\frac{\left(Ql+\frac{1}{2}ql^2\right)a\cos\alpha}{gW}.$$

Les valeurs maximale et minimale des contraintes normales dynamiques dans la section dangereuse de la barre sont:

$$\max_{\min}\sigma = \pm\frac{\left(Q+\frac{1}{2}ql\right)al\cos\alpha}{gW} - \frac{Q+ql}{F}\left(1+\frac{a}{g}\sin\alpha\right).$$

Exemple 117. Une barre de longueur l, inclinée au plan horizontal sous un angle α, supporte en son extrémité libre une charge

de poids Q et est animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical OO d'une vitesse angulaire constante ω (fig. 216,*a*).

Calculer la contrainte normale dynamique maximale dans la section dangereuse de la barre, si le poids de l'unité de longueur de la barre est q, l'aire de sa section droite F, et le module de résistance de la section en flexion W.

S o l u t i o n. Compte tenu des forces centrifuges développées, le schéma de calcul a la forme indiquée fig. 216,*b*.

Dans la section dangereuse encastrée de la barre agiront:

1) des moments fléchissants dus:

à son poids propre q:

$$M_1 = \frac{ql^2}{2} \cos \alpha ;$$

au poids Q de la charge:

$$M_2 = Ql \cos \alpha ;$$

à la force centrifuge concentrée $\frac{Q}{g} \omega^2 l \cos \alpha$:

$$M_3 = \frac{Q\omega^2}{2g} l^2 \sin 2\alpha ;$$

à la force centrifuge linéairement répartie, d'intensité maximale $\frac{q}{g} \omega^2 l \cos \alpha$:

$$M_4 = \frac{q\omega^2}{6g} l^3 \sin 2\alpha;$$

2) des forces de compression dues:

au poids propre q:

$$N_1 = -ql \sin \alpha ;$$

au poids Q de la charge:

$$N_2 = -Q \sin \alpha ;$$

3) des forces de traction dues:

à la force centrifuge concentrée $\frac{Q}{g} \omega^2 l \cos \alpha$:

$$N_3 = \frac{Q\omega^2}{g} l \cos^2 \alpha ;$$

à la force centrifuge linéairement répartie d'intensité maximale $\frac{q}{g}\omega^2 l\cos\alpha$:

$$N_4 = \frac{q\omega^2}{2g} l^2 \cos^2\alpha.$$

Le moment fléchissant résultant est :

$$M_d = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \left(Q + \frac{1}{2}ql\right) l\cos\alpha + \left(Q + \frac{1}{3}ql\right)\frac{\omega^2 l^2}{2g}\sin 2\alpha.$$

L'effort longitudinal résultant :

$$N_d = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \left(Q + \frac{1}{2}ql\right)\frac{\omega^2 l}{g}\cos^2\alpha - (Q + ql)\sin\alpha.$$

La valeur de la contrainte normale dynamique maximale dans la section dangereuse de la barre :

$$\max\sigma_d = \frac{N_d}{F} + \frac{M_d}{W} = \frac{1}{F}\left[\left(Q + \frac{1}{2}ql\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\omega^2 l}{g}\cos^2\alpha - (Q + ql)\sin\alpha\right] + \frac{l}{W}\times$$

$$\times\left[\left(Q + \frac{1}{3}ql\right)\frac{\omega^2 l}{2g}\sin 2\alpha + \left(Q + \frac{ql}{2}\right)\cos\alpha\right].$$

Exemple 118. Le système indiqué fig. 217,*a* est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical *OO* d'une vitesse angulaire constante ω.

Calculer le nombre de tours par minute admissible *n* de rotation du système, si $m = 1$ kg, $\rho = 10$ cm, $d = 1$ cm, $[\sigma] = 160$ MN/m².

Négliger le poids propre du système et l'effet de la variation de la distance entre les charges *m* sur la valeur de la force centrifuge.

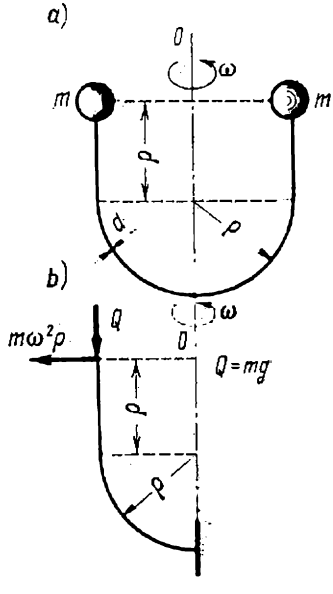


Fig. 217

S o l u t i o n. Compte tenu de la force centrifuge, on peut prendre le schéma de calcul indiqué fig. 217,*b*.

Dans la section dangereuse encastrée agissent un effort longitudinal de traction $N_d = m\omega^2\rho$ et un moment fléchissant :

$$M_d = mg\rho + m\omega^2\rho 2\rho = m\rho\,(g + 2\omega^2\rho).$$

La valeur maximale de la contrainte de traction dynamique dans la fibre intérieure de la section encastrée est :

$$\max\sigma_d = \frac{N_d}{F} + \frac{M_d}{W}\alpha_1 = \frac{m\omega^2\rho}{F} + \frac{m\rho\,(g + 2\omega^2\rho)}{W}\alpha_1.$$

Puisque pour $\frac{d}{\rho} = \frac{1}{10}$ le coefficient $\alpha_1 = \frac{1 - \frac{d}{8\rho}}{1 - \frac{d}{2\rho}} \approx 1$,

la condition de résistance dans la section dangereuse est :

$$\max\sigma_d = m\omega^2\rho\left(\frac{1}{F} + \frac{2\rho}{W}\right) + \frac{m\rho g}{W} \leqslant [\sigma],$$

d'où l'on tire :

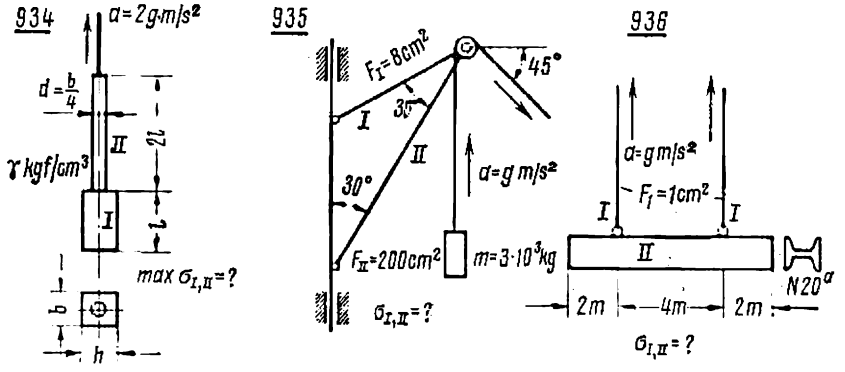
$$\omega = \frac{\pi n}{30} \leqslant \sqrt{\frac{[\sigma] - \frac{m\rho g}{W}}{m\rho\left(\frac{1}{F} + \frac{2\rho}{W}\right)}} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{160\cdot 10^6 - \frac{1\cdot 0{,}1\cdot 9{,}81}{0{,}1\cdot 10^{-6}}}{1\cdot 0{,}1\left(\frac{1}{0{,}8\cdot 10^{-4}} + \frac{2\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot 10^{-6}}\right)}} \approx \sqrt{750},$$

$$n \approx \frac{30}{\pi}\sqrt{750} \approx 270 \text{ tr/mn}.$$

Problèmes 934-936. Dans les sections droites des éléments indiqués des systèmes en mouvement calculer les contraintes normales, provoquées par l'action simultanée de la pesanteur et des forces d'inertie.

Le sens du mouvement est indiqué sur les figures par une flèche et la lettre *a*.

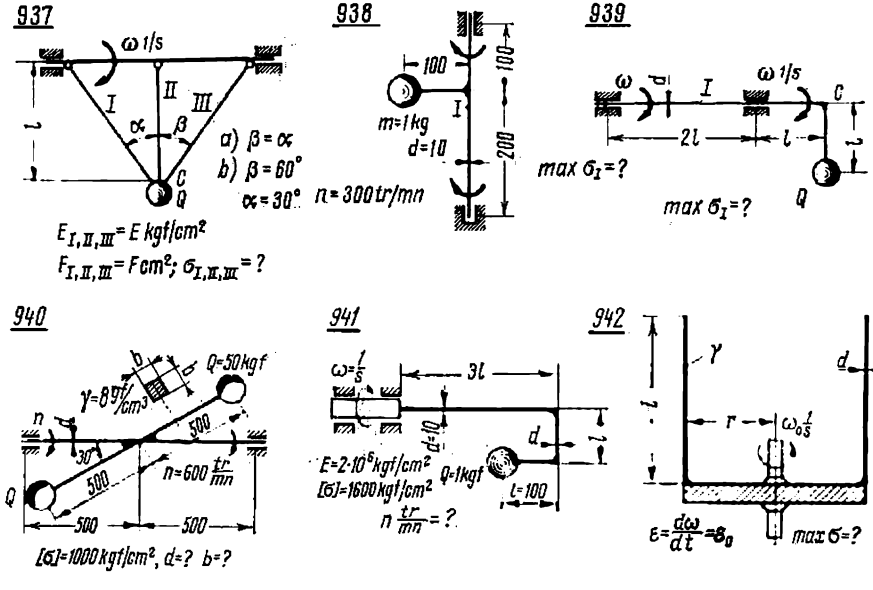


Problèmes 937-950. Calculer les quantités dues aux forces d'inertie développées dans les systèmes en rotation.

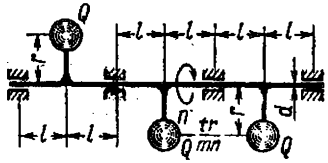
L'axe autour duquel tourne le système est indiqué sur les figures par une flèche et les lettres ω ou n. Quand les dimensions de la section droite et la valeur de E pour l'axe de rotation ne sont pas données, supposer l'axe parfaitement rigide. Les éléments parfaitement rigides du système, sauf les axes de rotation, sont dessinés par une double ligne avec hachure.

Dans tous les problèmes, sauf 942, la rotation est supposée uniforme. Dans les calculs des forces d'inertie, négliger les déformations des éléments du système.

Dans les problèmes 937, 938, à part les forces d'inertie, tenir aussi compte des forces de la pesanteur.

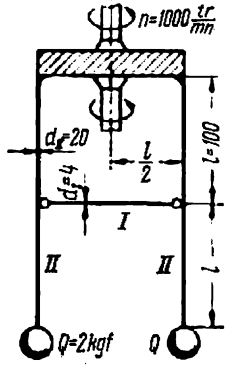


943



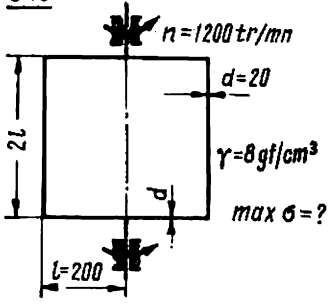
[6], d=?

944

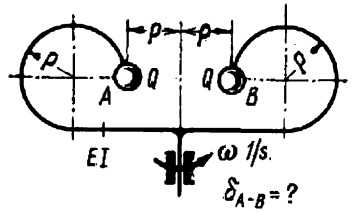


$E_I = E_{II}$ $max_{I,II} = ?$

945

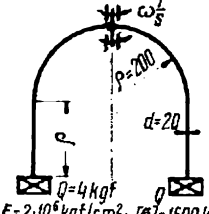


946



$\delta_{A-B} = ?$

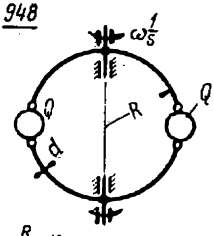
947



$E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm²; [σ]=1600 kgf/cm²

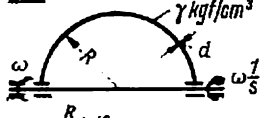
$n = ?$, $\delta_{A-B} = ?$

948



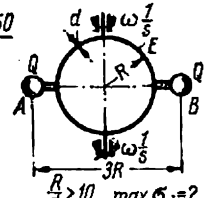
$\frac{R}{d} > 10$ $max\ \sigma_d = ?$

949



$\frac{R}{d} > 10$, $max\ \sigma_d = ?$

950



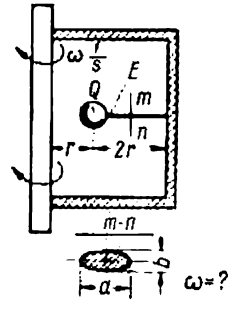
$\frac{R}{d} > 10$, $max\ \sigma_d = ?$

$\delta_{A-B} = ?$

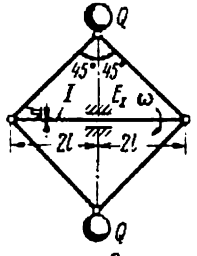
Problèmes 951-953. Calculer la vitesse angulaire ω 1/s (ou le nombre de tours par minute n) de rotation de l'axe pour laquelle la stabilité de l'élément comprimé des systèmes est rompue.

Supposer que les valeurs des contraintes critiques ne dépassent pas la limite de proportionnalité du matériau.

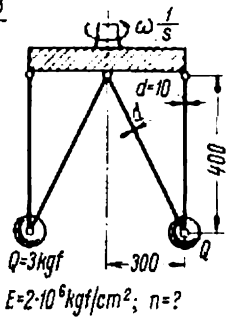
951



952



953



§ 2. Oscillations élastiques

On appelle *oscillations élastiques* les déviations périodiques du système élastique de sa position d'équilibre stable. Si le système a été sorti de sa position d'équilibre par suite d'une seule action de la force impulsive, les oscillations engendrées s'appellent *oscillations libres* ou *propres* du système. Si le système est soumis à l'action d'une force généralisée, variant périodiquement avec le temps (une force excitante), les oscillations engendrées s'appellent *oscillations forcées.*

Les oscillations libres, par suite de l'existence des forces de résistance, sont des oscillations amorties, c'est-à-dire des oscillations dont l'amplitude diminue avec le temps. Si la fréquence des oscillations propres est égale à la fréquence de la force excitante, il y a résonance, phénomène d'accroissement rapide et continu de l'amplitude avec le temps. L'accroissement de l'amplitude des oscillations étant lié à l'accroissement des contraintes, le phénomène de résonance peut causer la rupture prématurée du système.

Chaque système élastique a un nombre infini de degrés de liberté, puisque le nombre de coordonnées indépendantes définissant la position dans l'espace des masses réparties dans le système est infiniment grand.

Si l'on néglige totalement la masse propre du système ou si l'on en tient compte d'une manière approchée en la rapportant à un ou plusieurs points, le système peut être conventionnellement considéré comme ayant un ou plusieurs degrés de liberté. En négligeant la masse propre, le système élastique peut être considéré comme ayant un degré de liberté, si le système supporte une charge dont la position

dans l'espace est definie par une seule coordonnée. Compte tenu de la masse propre, le système est conventionnellement considéré comme ayant un degré de liberté, si sa masse propre peut être rapportée, avec une approximation suffisante, au point de suspension de la charge.

Nous étudierons seulement les oscillations non amorties des systèmes à un degré de liberté sans considération de la masse propre. On tiendra compte de la masse propre seulement dans les problèmes simples d'oscillations des barres prismatiques.

Dans tous les cas, on supposera la masse oscillante constante et le système élastique linéaire, avec la force généralisée de restauration P, engendrée en un moment arbitraire, proportionnelle au déplacement généralisé correspondant δ, c'est-à-dire:

$$P = C\delta, \tag{219}$$

où C est la rigidité du système, c'est-à-dire la force généralisée provoquant un déplacement généralisé unitaire.

On admet que la forme dû système déformé pendant les oscillations est la même que celle obtenue par suite de l'action statique sur ce système de la force généralisée correspondante appliquée au point de suspension de la charge et agissant dans la direction de l'oscillation.

Oscillations libres des systèmes élastiques sans considération de la masse propre

Puisque pour un système linéairement déformé il est aisé de déterminer, par l'une des méthodes connues, le déplacement généralisé δ du point de suspension de la charge dû à une application statique en ce même point de la force généralisée correspondante P, on calcule la rigidité du système C de l'expression:

$$C = \frac{P}{\delta}. \tag{220}$$

Il est commode de déterminer la rigidité des systèmes dont les éléments élastiques sont montés en parallèle, en série ou d'une façon mixte à l'aide des règles connues suivantes.

Si dans le système les éléments élastiques de rigidités C_i sont montés en parallèle (schémas indiqués fig. 218,*a*, *b*), la rigidité du système sera:

$$C = \sum C_i. \tag{221}$$

Si dans le système les éléments élastiques de rigidités C_i sont montés en série (fig. 218,*c*), la rigidité du système sera:

$$C = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}}. \tag{222}$$

Si dans le système les liaisons des éléments élastiques sont mixtes (fig. 218,*d*), une partie des éléments de rigidités C_i étant montés en parallèle, l'autre partie de rigidités C'_i en série, la rigidité du système est :

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\sum C_i} + \sum \frac{1}{C'_i}}. \qquad (223)$$

Pour un système où l'on ne tient pas compte de la masse propre, la fréquence circulaire d'oscillations libres ω (le nombre d'oscillations en 2π secondes), la fréquence d'oscillations N (le nombre d'oscillations en une seconde) et la période d'oscillations T (le temps d'une oscillation complète) sont déterminées par les formules suivantes :

a) pour un mouvement de translation alternatif de la charge :

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}}, \\ N &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}}, \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}, \end{aligned}\right\} \qquad (224)$$

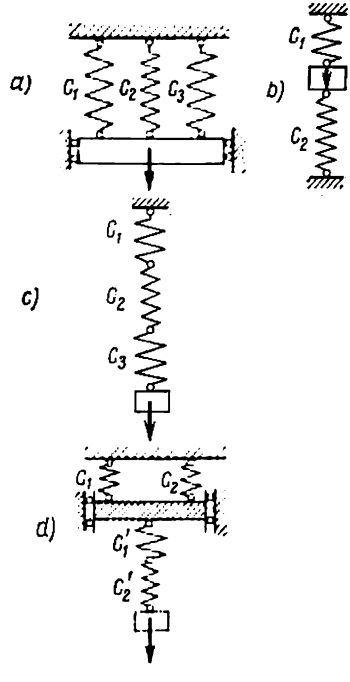


Fig. 218

où $m = \frac{Q}{g}$ est la masse de la charge de poids Q en kgf·s²/cm (dans le SI la masse m de la charge kg est déterminée par pesage, c'est-à-dire par comparaison avec la masse étalon de 1 kg ; le poids de la charge Q est mesuré en newtons, $Q = mg$) ;

δ le déplacement linéique du point de suspension de la charge dû à une application statique de la force Q dans le sens de l'oscillation en cm (m) ;

$C = \frac{Q}{g}$ la rigidité du système en kgf/cm (N/m ou kN/m) ;

b) pour un mouvement de rotation alternatif de la charge:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{C}{I_m}}, \\ N &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{I_m}}, \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{I_m}{C}}, \end{aligned}\right\} \qquad (225)$$

où $I_m = \int\limits_m \rho^2 dm = \frac{\gamma}{g}\int\limits_V \rho^2 dV$ est le moment d'inertie de la masse de la charge m par rapport à son axe de rotation en kgf·cm·s² (dans le SI $I_m = \int\limits_m \rho^2 dm = \rho_0 \int\limits_V \rho^2 dV$ kg·m²);

γ le poids spécifique de la charge Q en kgf/cm³;

ρ_0 la densité, la masse spécifique en kg/m³ (dans le SI);

ρ la distance de l'élément de volume dV à l'axe de rotation en cm (m);

$C = \frac{M}{\varphi}$ la rigidité du système en kgf·cm (N·m), où M est le moment agissant statiquement dans la section de suspension de la charge dans le sens de l'oscillation en kgf·cm (N·m);

φ le déplacement angulaire en rad de la section où est appliqué le moment M dû à son action statique.

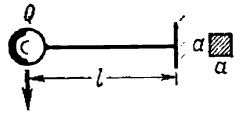


Fig. 219

Exemple 119. Soient: $Q = 16$ kgf, $a = 2$ cm, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $T = 0{,}1$ s (fig. 219).

Calculer l.

Solution. Puisque la période d'oscillation $T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}$, on a $\delta = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$.

D'autre part, par suite de l'action statique de la force Q, le déplacement vertical de l'extrémité libre de la poutre $\delta = \frac{Ql^3}{3EI}$.

D'où :

$$\frac{Ql^3}{3EI} = \frac{T^2 g}{4\pi} \quad \text{et} \quad l = \sqrt[3]{\frac{T^2 g \cdot 3EI}{4\pi^2 Q}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 981 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2^4}{10^2 \pi^2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 12}} = 50 \text{ cm}.$$

Exemple 120. Etant donnés : $m = 20$ kg, $b = 8$ cm, $l = 40$ cm, $N = 20$ osc/s, $G = 8 \cdot 10^4$ MN/m² (fig. 220) ;
calculer a.

Solution. Puisque $N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{I_m}}$ et $I_m = 2mb^2$, on a

$$C = 4\pi^2 N^2 I_m = 8\pi^2 N^2 mb^2.$$

D'autre part, la rigidité de la barre en torsion est :

$$C = \frac{GI_t}{l} \approx \frac{G \cdot 0{,}14a^4}{l}.$$

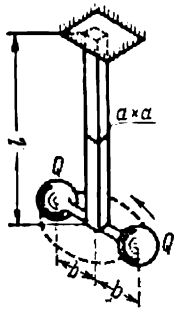


Fig. 220

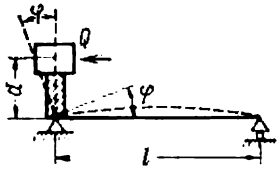


Fig. 221

où $I_t = 0{,}14a^4$ est le moment d'inertie en torsion de la section carrée de côté a. Donc :

$$\frac{0{,}14a^4 G}{l} = 8\pi^2 N^2 mb^2 \quad \text{et} \quad a = \sqrt[4]{\frac{8\pi^2 N^2 mb^2 l}{0{,}14G}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 20 \cdot 64 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{0{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{11}}} = 1{,}95 \cdot 10^{-2} = 1{,}95 \text{ cm}.$$

Exemple 121. Soient Q, a, l, E, I (fig. 221).
Calculer ω, N, T.

Solution. Puisque la rotation de la charge Q autour du centre de l'articulation de l'appui gauche $\varphi = \frac{Ml}{3EI}$, la rigidité de la poutre sera :

$$C = \frac{M}{\varphi} = \frac{3EI}{l}.$$

Le moment d'inertie de la masse de la charge par rapport à l'axe de sa rotation :

$$I_m = \frac{Q}{g} a^2.$$

D'après les formules (225), la fréquence circulaire sera :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{3EIg}{Ql}};$$

la fréquence d'oscillation :

$$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3EIg}{Ql}}$$

et la période d'oscillation :

$$T = \frac{1}{N} = 2\pi a \sqrt{\frac{Ql}{3EIg}}.$$

Exemple 122. Etant donnés : Q, l et pour le ressort : D, d, n (n est le nombre de spires), G. La barre AB étant parfaitement rigide et impondérable (fig. 222) ;

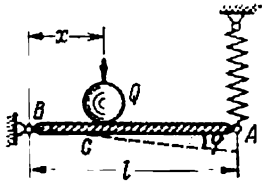


Fig. 222

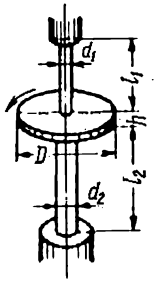


Fig. 223

calculer la fréquence circulaire d'oscillation ω en fonction de la position de la charge Q, c'est-à-dire de la distance x.

Solution. La force de traction du ressort est :

$$P = Q\frac{x}{l}.$$

Le déplacement vertical du point A :

$$\delta_A = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{8QD^3n}{Gd^4} \cdot \frac{x}{l}.$$

Le déplacement vertical du point C :

$$\delta_C = \delta_A \frac{x}{l} = \frac{8QD^3n}{Gd^4} \cdot \frac{x^2}{l^2}.$$

La fréquence circulaire d'oscillation de la charge sera :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_C}} = \frac{ld^2}{2Dx} \sqrt{\frac{Gg}{2QDn}}.$$

On peut résoudre autrement ce problème, en partant non du mouvement de translation mais du mouvement de rotation de la charge Q. On aura alors pour :

le déplacement angulaire de la charge $\varphi = \frac{\delta_A}{l}$;

le moment de restauration $M = Pl$;

la rigidité du système $C = \frac{M}{\varphi} = \frac{Pl^2}{\delta_A}$;

le moment d'inertie de la masse de la charge par rapport à son axe de rotation

$$I_m = \frac{Q}{g} x^2 ;$$

la fréquence circulaire d'oscillation de la charge

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{l}{x} \sqrt{\frac{Pg}{Q\delta_A}} = \frac{ld^2}{2Dx} \sqrt{\frac{Gg}{2QDn}}.$$

Exemple 123. Etant donnés : l_1, d_1, G_1, l_2, d_2, G_2 pour les barres ; γ (le poids spécifique), D et h pour le disque (fig. 223) ;
calculer la fréquence circulaire d'oscillation ω du disque.

Solution. Les rigidités des barres en torsion sont :

$$C_1 = \frac{G_1 I_{p_1}}{l_1} = \frac{G_1 \pi d_1^4}{32 l_1} ; \quad C_2 = \frac{G_2 I_{p_2}}{l_2} = \frac{G_2 \pi d_2^4}{32 l_2}.$$

Puisque les barres sont liées parallèlement, la rigidité du système oscillant, selon la formule (221), sera :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\pi}{32} \left(\frac{G_1 d_1^4}{l_1} + \frac{G_2 d_2^4}{l_2} \right).$$

Le moment d'inertie de la masse du disque cylindrique par rapport à son axe de rotation :

$$I_m = \frac{\gamma}{g} \int_V \rho^2 \, dV = \frac{\gamma}{g} \int_0^{D/2} \rho^2 2\pi\rho h \, d\rho = 2\pi \frac{\gamma}{g} h \int_0^{D/2} \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{32} \frac{\gamma h D^4}{g}.$$

Selon la formule (225) la fréquence circulaire d'oscillation du disque sera :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{1}{D^2}\sqrt{\frac{\dfrac{G_1 d_1^4}{l_1} + \dfrac{G_2 d_2^4}{l_2}}{\dfrac{\gamma}{g} h}}.$$

Exemple 124. Etant donnés : l_1, E_1, I_1 pour la poutre ; l_2, E_2, F_2 et Q pour la barre (fig. 224) ;
calculer T.

S o l u t i o n. La rigidité d'une poutre sur appuis, sous l'action d'une force fléchissante dans la section médiane, est :

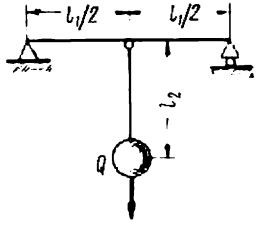


Fig. 224

$$C_1 = \frac{48 E_1 I_1}{l_1^3}.$$

La rigidité de la barre en traction est :

$$C_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2}.$$

Puisque la poutre et la barre sont montées en série, la rigidité du système en oscillation, selon la formule (224), sera :

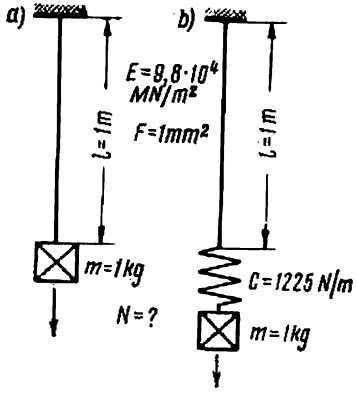
$$C = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \frac{1}{\dfrac{l_1^3}{48 E_1 I_1} + \dfrac{l_2}{E_2 F_2}}.$$

La fréquence d'oscillation du système, d'après la formule (224), sera :

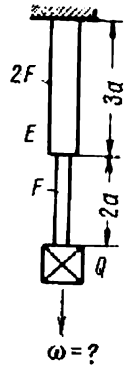
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{g}\left(\frac{l_1^3}{48 E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 F_2}\right)}$$

Problèmes 954-965. Calculer les quantités indiquées dans les conditions des problèmes pour les systèmes oscillants.
La direction de l'oscillation est indiquée sur les figures par une flèche près de la charge.

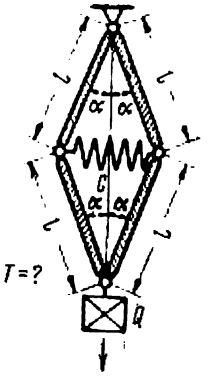
954



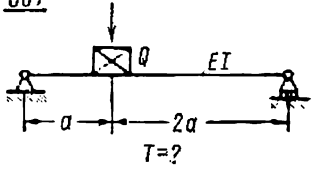
955



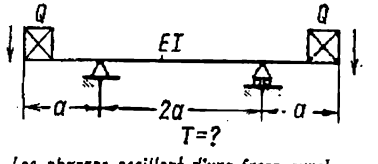
956



957

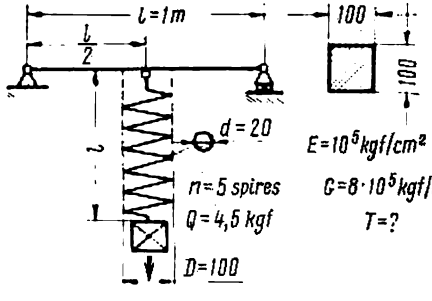


958

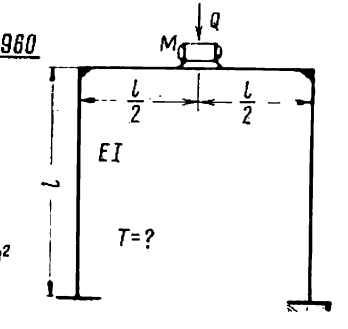


Les charges oscillent d'une façon synchrone

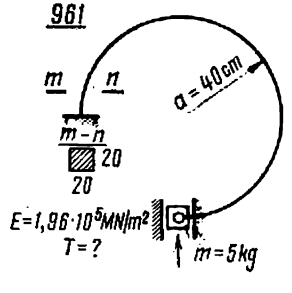
959



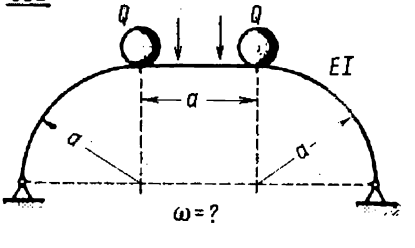
960

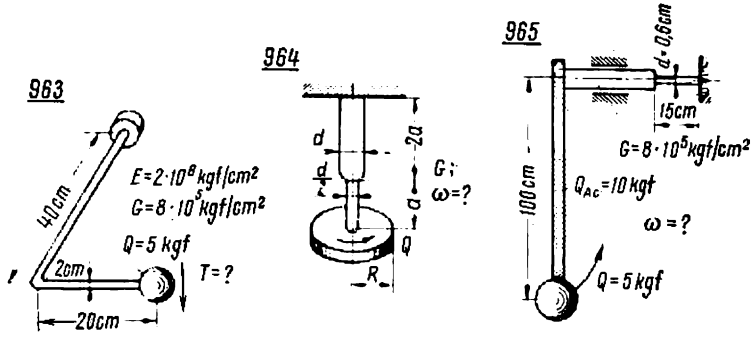


961



962





Oscillations libres des systèmes élastiques compte tenu de la masse propre

Dans le calcul des oscillations libres des systèmes élastiques, la masse propre répartie m_0 peut être considérée d'une manière approchée en la rapportant au point de suspension de la charge et en l'additionnant avec la masse m de cette dernière.

La *masse réduite* $m_{\text{réd}}$ est une masse concentrée au point de suspension de la charge, dont l'énergie cinétique du mouvement est égale à l'énergie cinétique du mouvement de la masse m_0 du système. La valeur de la masse réduite est proportionnelle à la valeur de la masse réelle et est définie par la formule:

$$m_{\text{réd}} = k_m m_0. \tag{226}$$

Le coefficient de réduction de masse k_m dépend de la loi de variation des vitesses du mouvement des éléments de masse m_0; on établit sa valeur d'après la condition d'égalité des énergies cinétiques du mouvement des masses $m_{\text{réd}}$ et m_0. Cette condition nous conduit à l'expression:

$$k_m = \frac{1}{m_0} \int_V \left(\frac{\delta_x}{\delta}\right)^2 dm_0, \tag{227}$$

où δ et δ_x sont les déplacements généralisés du point de suspension de la charge et d'un point arbitraire du système, soumis à l'action statique de la force généralisée, correspondant à la déformation du système pendant les oscillations et appliquée au point de suspension de la charge dans le sens de l'oscillation.

Les coefficients de réduction de masse pour des barres droites de section droite constante peuvent être déterminés à l'aide de la formule:

$$k_m = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{\delta_x}{l}\right)^2 dx, \tag{228}$$

où dx est l'élément de longueur de la barre;

l sa longueur.

La fréquence circulaire ω, la fréquence N et la période T d'oscillations libres du système élastique, compte tenu de la masse propre, sont calculées d'après les formules suivantes :

a) pour un mouvement de translation alternatif :

$$\left.\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{C}{m + k_m m_0}} = \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \dfrac{Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \dfrac{m_0}{m}}}, \\
N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m + k_m m_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{\delta} \cdot \frac{1}{\left(1 + k_m \dfrac{Q_0}{Q}\right)}} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \dfrac{m_0}{m}}}, \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{m + k_m m_0}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g}\left(1 + k_m \frac{Q_0}{Q}\right)} = \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g}\left(1 + k_m \frac{m_0}{m}\right)},
\end{aligned}\right\} \qquad (229)$$

où $Q = mg$ et $Q_0 = m_0 g$ sont les poids de la charge et du système ;

$\delta = \dfrac{Q}{C}$ le déplacement linéique du point de suspension de la charge lors de l'application statique sur le système de la force Q dans le sens de l'oscillation,

b) pour un mouvement de rotation alternatif

$$\left.\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{C}{I_m + k_m I_{m_0}}}, \\
N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{I_m + k_m I_{m_0}}}, \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{I_m + k_m I_{m_0}}{C}},
\end{aligned}\right\} \qquad (230)$$

où I_m et I_{m_0} sont les moments d'inertie de la masse m de la charge et de la masse m_0 du système par rapport à l'axe de rotation.

Nous donnons quelques exemples où l'on tient compte de la masse propre des barres prismatiques pour des cas simples d'oscillations libres.

Exemple 125. Oscillations longitudinales. Soient : Q, γ, F, a, b, E (dans le SI, on a : la masse m en kg, la densité de la barre ρ_0 en kg/m^3, F, a, b, E fig. 225,*a*) ; calculer T.

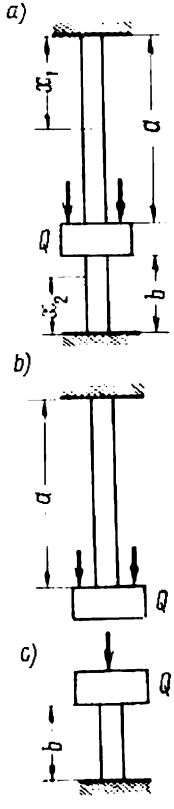


Fig. 225

S o l u t i o n. Quand la charge Q est appliquée statiquement, les rapports des déplacements linéiques (allongements et raccourcissements) des sections arbitraires (définies par les coordonnées x_1 et x_2) et de la section où est appliquée la charge sont respectivement :

$$\frac{\delta_{x_1}}{\delta} = \frac{x_1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_{x_2}}{\delta} = \frac{x_2}{b}.$$

Selon l'expression (228) le coefficient de réduction de masse est :

$$k_m = \frac{1}{a+b}\left[\int_0^a \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 dx_1 + \int_0^b \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 dx_2\right] = \frac{1}{3}.$$

Puisque les tronçons de la barre sont montés en parallèle, la rigidité du système, selon la formule (221), sera :

$$C = \frac{EF}{a} + \frac{EF}{b} = EF\frac{a+b}{ab}.$$

La masse propre de la barre $m_0 = \frac{\gamma F}{g}(a+b)$, la masse de la charge :

$$m = \frac{Q}{g} \text{ [dans le SI, } m_0 = \rho_0 F(a+b)\text{]}.$$

La période d'oscillations libres du système, selon la formule (229), sera :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + k_m m_0}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{EFg}\cdot\frac{ab}{a+b}\left(1 + \frac{\gamma F}{3}\cdot\frac{a+b}{Q}\right)};$$

dans le SI :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + k_m m_0}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{EF}\cdot\frac{ab}{a+b}\left(1 + \frac{\rho_0 F}{3}\cdot\frac{a+b}{m}\right)}.$$

Cas particuliers (considérés dans le système technique).

Si la charge Q est suspendue à une barre de longueur a et la barre de longueur b est absente (fig. 225,*b*), en posant $\frac{EF}{b} = 0$, on obtient :

$$C = \frac{EF}{a}, \quad m_0 = \frac{\gamma F}{g} a \quad \text{et} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Qa}{EFg}\left(1 + \frac{\gamma Fa}{3Q}\right)}.$$

Si la charge Q est supportée par une barre de longueur b et la barre de longueur a est absente (fig. 225,*c*), on a :

$$\frac{EF}{a} = 0, \quad C = \frac{EF}{b}, \quad m_0 = \frac{\gamma F}{g} b \text{ et } T = 2\pi \sqrt{\frac{Qb}{EFg}\left(1 + \frac{\gamma Fb}{3Q}\right)}.$$

Exemple 126. Oscillations transversales. Etant donnés : Q, γ, F, l, E, I (fig. 226) ;

calculer T.

S o l u t i o n. Le déplacement linéique (le déplacement vertical) d'une section arbitraire à une distance x de l'encastrement

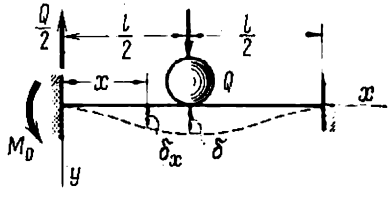


Fig. 226

gauche dû à l'action statique de la charge Q est déterminé par la méthode des paramètres initiaux :

$$\delta_x = \frac{1}{EI}\left(M_0 \frac{x^2}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{x^3}{6}\right).$$

Par suite de la symétrie de la poutre :

$$\left(\frac{d\delta_x}{dx}\right)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{EI}\left(\frac{M_0 l}{2} - \frac{Ql^2}{16}\right) = 0 \quad \text{et} \quad M_0 = \frac{Ql}{8}.$$

Donc :

$$\delta_x = \frac{Ql^3}{48EI}\left(3\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x^3}{l^3}\right); \quad \delta = \delta_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Ql^3}{192EI}$$

et

$$\frac{\delta_x}{\delta} = 4\left(3\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Le coefficient de réduction de masse, selon la formule (228), est :

$$k_m = \frac{2}{l}\int_0^{l/2}\left(\frac{\delta_x}{\delta}\right)^2 dx = \frac{32}{l}\int_0^{l/2}\left(3\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x^3}{l^3}\right)^2 dx = \frac{13}{35}.$$

Le poids propre de la poutre $Q = \gamma Fl$.

La période d'oscillations libres de la poutre est déterminée de l'expression (229) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}\left(1 + k_m\frac{Q_0}{Q}\right)} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{Ql^3}{3EIg}\left(1 + \frac{13}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}\right)}.$$

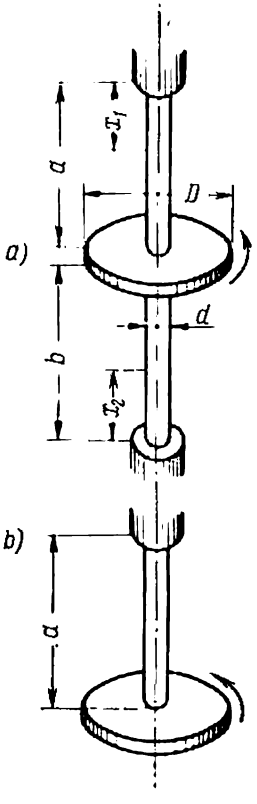


Fig. 227

Exemple 127. Oscillations de torsion. Etant donnés : Q, D, γ, d, a, b, G (fig. 227,*a*) ; calculer T.

Solution. Quand le moment de rotation dans la section de suspension du disque est appliqué statiquement, les rapports des déplacements angulaires (des rotations) de sections arbitraires (définies par les coordonnées x_1 et x_2) et de la section de suspension du disque sont respectivement :

$$\frac{\delta_{x_1}}{\delta} = \frac{\varphi_{x_1}}{\varphi} = \frac{x_1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_{x_2}}{\delta} = \frac{\varphi_{x_2}}{\varphi} = \frac{x_2}{b}.$$

Selon la formule (228) le coefficient de réduction de masse est :

$$k_m = \frac{1}{a+b}\left[\int_0^a\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 dx_1 + \int_0^b\left(\frac{x_2}{b}\right)^2 dx_2\right] = \frac{1}{3}.$$

Puisque les tronçons de la barre sont liés parallèlement, la rigidité du système, selon la formule (221), sera :

$$C = \frac{GI_p}{a} + \frac{GI_p}{b} = GI_p\frac{a+b}{ab} = G\frac{\pi d^4}{32}\cdot\frac{a+b}{ab}.$$

Le moment d'inertie de la masse de la barre cylindrique par rapport à son axe géométrique est :

$$I_{m_0} = \frac{\pi}{32}\cdot\frac{\gamma}{g}d^4(a+b).$$

Le moment d'inertie de la masse du disque cylindrique, de poids Q et de diamètre D, est :

$$I_m = \frac{Q}{g} \cdot \frac{D^2}{8}.$$

La période d'oscillations libres du système, d'après la formule (230), sera :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_m + k_m I_{m_0}}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_m ab}{GI_p (a+b)} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{I_{m_0}}{I_m}\right)} =$$

$$= 4\pi \frac{D}{d^2} \sqrt{\frac{Q}{\pi G g} \cdot \frac{ab}{a+b} \left(1 + \frac{\pi d^4 \gamma}{12Q} \cdot \frac{a+b}{D^2}\right)}.$$

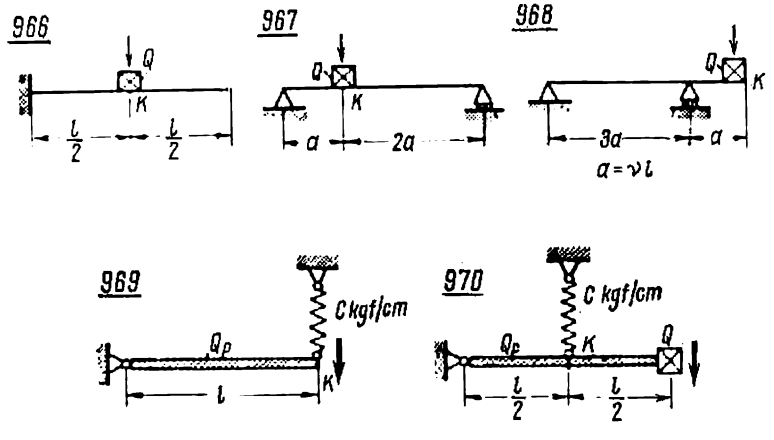
Cas particulier. Si $(GI_p/b) = 0$ (fig. 227,*b*), on a :

$$C = \frac{GI_p}{a}, \quad I_{m_0} = \frac{\pi d^4 \gamma a}{32g}$$

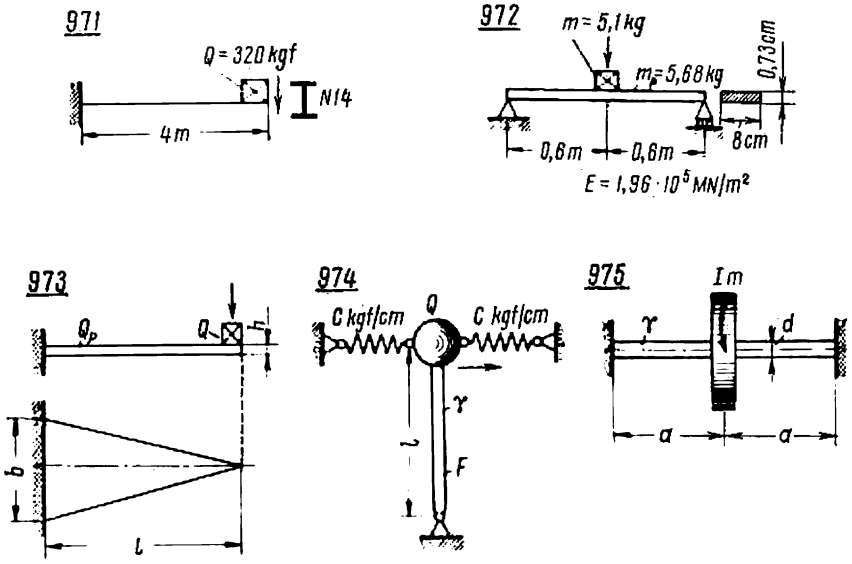
et

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_m a}{GI_p} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{I_{m_0}}{I_m}\right)} = 4\pi \frac{D}{d^2} \sqrt{\frac{Qa}{\pi G g} \left(1 + \frac{\pi d^4 \gamma a}{12QD^2}\right)}.$$

Problèmes 966-970. Calculer les coefficients de réduction de masse k_m pour les poutres ; le point de réduction de la masse est la section K.



Problèmes 971-975. Calculer les périodes T d'oscillations libres des systèmes.



Oscillations forcées sans considération des forces de résistance

Si les oscillations forcées du système à un degré de liberté sont dues à une force généralisée excitante harmonique, appliquée à la charge:

$$P_e = P_0 \sin \omega_0 t, \tag{231}$$

où P_0 est la valeur maximale de la force excitante P_e;
ω_0 la fréquence circulaire de cette force;
t le temps;
l'amplitude A d'oscillations excitées est déterminée par la formule:

$$A = \frac{\delta_0}{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \beta \delta_0. \tag{232}$$

Dans la formule (232) δ_0 est le déplacement généralisé du point de suspension de la charge pour une action statique de la force P_0, ω la fréquence circulaire d'oscillations libres du système, et $\beta = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ le coefficient d'accroissement des oscillations. (233)

Si $\omega_0 \gg \omega$, on a $A \to 0$, et la charge sur le système élastique est pratiquement immobile.

Si $\omega_0 \ll \omega$, $A \to \delta_0$, et la charge oscille avec une amplitude égale à son déplacement, dû à l'action statique de la force P_0.

Si ω_0 tend vers ω, l'amplitude A croît rapidement.

Lorsque $\omega_0 = \omega$, il y a résonance, et $A = \infty$. En réalité, à cause de l'existence de forces de résistance, A ne tend pas vers l'infini, mais peut atteindre une très grande valeur.

Dans la zone de résonance, quand $0{,}7 \leqslant \frac{\omega_0}{\omega} \leqslant 1{,}3$, des forces excitantes relativement petites peuvent provoquer dans les éléments du système oscillant des déformations importantes et, par conséquent, des contraintes importantes.

Si la fréquence de la force excitante, en croissant, passe rapidement la zone de résonance, l'amplitude n'a pas le temps d'atteindre sa valeur maximale.

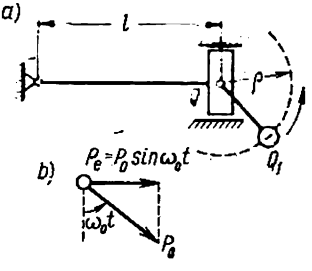


Fig. 228

Exemple 128. Une charge $Q_1 = 2$ kgf, tournant à l'extrémité d'un levier $\rho = 8$ cm à $n = 2\,400$ tr/mn, est suspendue à une charge $Q = 100$ kgf, attachée à l'extrémité d'une barre prismatique de longueur $l = 1$ m et dont l'aire de la section droite $F = 1$ cm^2 (fig. 228,*a*). Le module d'élasticité longitudinale du matériau de la barre $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2.

Calculer l'amplitude des oscillations forcées de la charge sans considération de la masse de la barre et des forces de résistance.

Solution. Puisque le déplacement linéique (allongement) du point de suspension de la charge dû à l'action statique de la force Q dans le sens de l'oscillation est :

$$\delta = \frac{Ql}{EF} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0{,}005 \text{ cm},$$

la fréquence circulaire d'oscillations libres longitudinales, d'après la formule (224), sera :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{981 \cdot 2 \cdot 10^2} \approx 443 \frac{1}{\text{s}}.$$

La rotation de la charge non équilibrée Q_1 engendre la force centrifuge $P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho$ dont la composante dans la direction de l'oscillation sera une force excitante harmonique (fig. 228,*b*) $P_e = P_0 \sin \omega_0 t$, produisant les oscillations forcées.

La vitesse angulaire de rotation de la charge Q_1 est la fréquence circulaire d'oscillations forcées; elle est égale à:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 2\,400}{30} \approx 251 \text{ 1/s.}$$

La valeur maximale de la force excitante est:

$$P_0 = \frac{Q_1}{g}\omega_0^2 \rho = \frac{2 \cdot 251^2 \cdot 8}{981} \approx 1\,030 \text{ kgf.}$$

L'allongement de la barre dû à l'action statique de la force P_0 dans le sens de l'oscillation est égal à:

$$\delta_0 = \frac{P_0 l}{EF} = \frac{1\,030 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} \approx 0{,}052 \text{ cm.}$$

D'après la formule (233) le coefficient d'accroissement des oscillations:

$$\beta = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \dfrac{251^2}{443^2}} \approx 1{,}47,$$

la valeur de l'amplitude des oscillations forcées du système sera donc:

$$A = \beta\delta_0 = 1{,}47 \cdot 0{,}052 \approx 0{,}08 \text{ cm.}$$

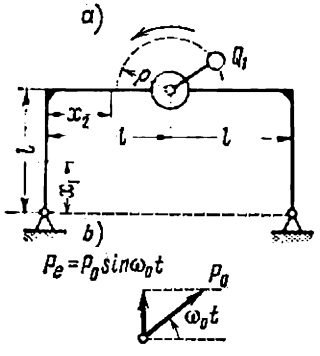


Fig. 229

Exemple 129. Un moteur électrique de masse $m = 96$ kg est situé dans la section médiane de la traverse d'un portique représenté fig. 229,*a*. La partie non équilibrée du moteur peut être représentée par une charge concentrée de masse $m_1 = 4$ kg, appliquée à l'extrémité d'un levier $\rho = 4$ cm et tournant autour de l'axe du moteur en faisant $n = 1\,500$ tr/mn.

Déterminer l'amplitude des oscillations forcées du portique, si $l = 1$ m, le moment d'inertie de la section droite de la traverse et des béquilles $I = 400$ cm^4, et $E = 2 \cdot 10^5$ MN/m^2.

On peut négliger le poids propre du portique.

Solution. Les poids du moteur électrique et de sa partie non équilibrée sont:

$$Q = mg = 940 \text{ N}; \qquad Q_1 = m_1 g = 39{,}2 \text{ N.}$$

Les réactions horizontales des appuis du portique dues à l'action statique de la charge Q sont déterminées d'après la formule (200) de l'équation canonique de la méthode des forces $X_1 = -\dfrac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$.

Puisque :

$$EI\delta_{1P} = -2\int_0^l \frac{Q}{2} l x_2\, dx_2 = -\frac{Ql^3}{2},$$

et $$EI\delta_{11} = 2\int_0^l x_1^2\, dx_1 + 2l^2 l = \frac{8}{3} l^3,$$

on a :

$$X_1 = \frac{Ql^3 \cdot 3}{2 \cdot 8l^3} = \frac{3}{16} Q = \frac{3}{16} 940 = 176 \text{ N}.$$

Le déplacement vertical du point de suspension de la charge Q dû à l'action statique de cette charge est déterminé par la méthode de la force fictive unitaire :

$$\delta = \frac{2}{EI}\int_0^l \left(-X_1 l + \frac{Q}{2} x_2\right)\frac{x_2}{2}\, dx_2 = \frac{7}{96}\cdot\frac{Ql^3}{EI} =$$

$$= \frac{7 \cdot 940 \cdot 1^3}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-8}} = 0{,}857 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}857 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

La fréquence circulaire des oscillations libres du portique sera :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}857 \cdot 10^{-4}}} = 338 \text{ 1/s}.$$

La rotation de la charge non équilibrée Q_1 engendre une force centrifuge $P_0 = m_1 \omega_0^2 \rho$ dont la composante dans la direction de l'oscillation (fig. 229,*b*) sera la force excitante harmonique $P_e = P_0 \sin \omega_0 t$, produisant les oscillations forcées de fréquence circulaire :

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1\,500}{30} = 157 \text{ 1/s}.$$

La valeur maximale de la force excitante est :

$$P_0 = 4 \cdot 157^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 3\,940 \text{ N}.$$

Le déplacement vertical de la section médiane de la traverse dû à l'action statique de cette force est :

$$\delta_0 = \frac{7}{96}\cdot\frac{P_0 l^3}{EI} = \frac{7 \cdot 3\,940 \cdot 1}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-8}} = 3{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

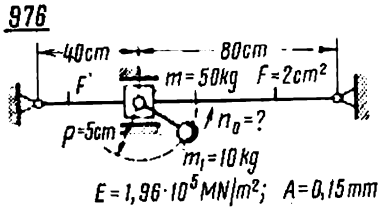
Puisque le coefficient d'accroissement des oscillations:

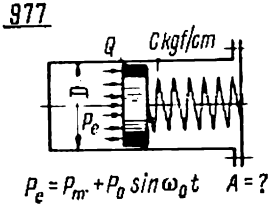
$$\beta = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \dfrac{157^2}{338^2}} \approx 1{,}28,$$

la valeur de l'amplitude des oscillations forcées du système sera:

$$A = \beta\delta_0 = 1{,}28 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-4} = 4{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{m} = 0{,}047\ \text{cm}.$$

Problème 976. Déterminer le nombre de tours n_0 du moteur (pouvant se déplacer dans la glissière) à l'axe duquel est attaché un excentrique de poids Q_1, si l'amplitude A des oscillations forcées du moteur est connue. Le poids Q comprend le poids du moteur et de l'excentrique Q_1. Négliger la masse des barres.



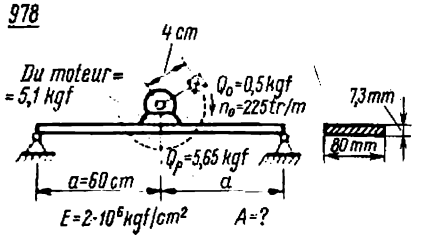


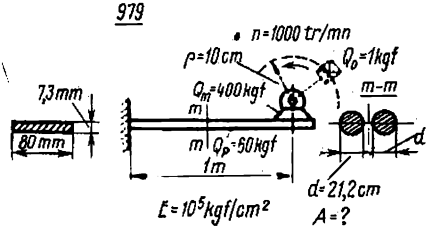
Problème 977. Déterminer l'amplitude A des oscillations du piston de l'indicateur d'une machine à vapeur se déplaçant sans friction dans un cylindre de diamètre D, si la pression sur le piston varie selon la loi:

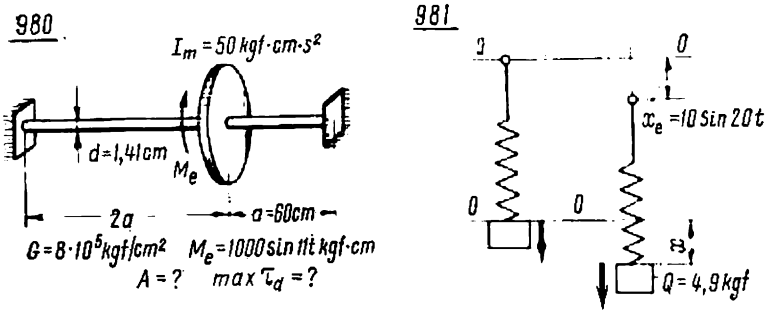
$$P_e = P_m + P_0 \sin \omega_0 t.$$

Problèmes 978-980. Déterminer les amplitudes des oscillations forcées des systèmes.

Dans les problèmes 978 et 979 tenir compte de la masse des poutres.







Problème 981. Le point de suspension d'un ressort hélicoïdal effectue un mouvement oscillatoire harmonique selon l'équation: $x_B = 10 \sin 20t$.

Déterminer l'amplitude A des oscillations forcées de la charge et les contraintes dynamiques $\max \tau_d$, si le diamètre d'une spire du ressort $D = 10$ cm, le diamètre du fil du ressort $d = 1$ cm, le nombre de spires $n = 25$ et $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2.

Détermination des contraintes et calcul de résistance

Le déplacement généralisé dynamique δ_d d'un point quelconque d'un système en un moment arbitraire t du mouvement oscillatoire est la somme du déplacement généralisé constant δ correspondant à la déformation du système pendant les oscillations, due à l'action statique de la charge Q et du poids propre du système, et du déplacement généralisé variable dû à la force excitante:

$$P_e = P_0 \sin \omega_0 t, \text{ c'est-à-dire } \delta_d = \delta + \beta\delta_0 \sin \omega_0 t. \qquad (234)$$

Pour les systèmes linéaires, on détermine d'une façon analogue les contraintes généralisées dynamiques p_d (σ_d ou τ_d) aux points des éléments du système, à savoir:

$$p_d = p + \beta p_0 \sin \omega_0 t, \qquad (235)$$

où p est la contrainte généralisée (σ ou τ), correspondant à la déformation pendant les oscillations, due à l'action statique de la charge Q et du poids propre du système, et p_0 la contrainte généralisée, due à l'action statique de la force excitante maximale P_0.

Les valeurs extrémales des contraintes ont lieu aux moments des déviations maximales du système de la position d'équilibre statique; elles sont égales à:

$$\max_{\min} p_d = p \pm \beta p_0. \qquad (236)$$

Puisque pendant les oscillations la valeur des contraintes varie périodiquement (fig. 230), dans le cas d'un long processus, le calcul

de résistance d'un système oscillant doit être effectué par des méthodes établies pour les calculs à la charge cyclique.

Pour les processus oscillatoires de brèves durées, quand l'amplitude des contraintes variables $\left(\frac{\max p_d - \min p_d}{2}\right)$ est petite, le calcul de résistance peut être effectué selon les contraintes maximales, comme pour le cas d'une charge constante.

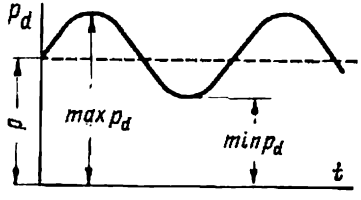


Fig. 230

Le déplacement généralisé dynamique maximal est:

$$\max \delta_d = \delta + \beta\delta_0 = \delta\left(1 + \beta\frac{\delta_0}{\delta}\right) = \delta k_d, \tag{237}$$

où:

$$k_d = 1 + \beta\frac{\delta_0}{\delta} = 1 + \frac{A}{\delta} \tag{238}$$

est le coefficient dynamique du mouvement oscillatoire, et donc la contrainte dynamique maximale est:

$$\max p_d = pk_d. \tag{239}$$

La condition de résistance peut être écrite sous la forme suivante:

$$\max p_d = pk_d \leqslant [p] \tag{240}$$

ou

$$p \leqslant \frac{[p]}{k_d} \tag{241}$$

où $[p]$ est la contrainte généralisée admissible ($[\sigma]$ ou $[\tau]$).

Exemple 130. Un moteur électrique de poids $Q = 20$ kgf est situé au milieu de la poutre de section rectangulaire $F = b \times h = 12 \times 1$ cm^2 et de longueur $l = 1$ m. La partie non équilibrée du moteur est représentée par une charge concentrée $Q_1 = 1$ kgf, attachée à l'axe du moteur à une distance $\rho = 4$ cm (fig. 231,*a*).

Calculer le nombre de tours par minute n de l'axe du moteur pour lequel la contrainte normale maximale dans la poutre atteint la

valeur max $\sigma_d = 2\,000$ kgf/cm². Le poids spécifique du matériau de la poutre $\gamma = 8$ gf/cm³, le module d'élasticité longitudinale $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm².

Solution. Le poids propre de la poutre est :

$$Q_0 = \gamma F l = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 1 \cdot 10^2 = 9{,}6 \text{ kgf}.$$

Le moment d'inertie de la section droite de la poutre par rapport à l'axe neutre et le module de résistance sont respectivement :

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 1}{12} = 1 \text{ cm}^4;$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 1}{6} = 2 \text{ cm}^3.$$

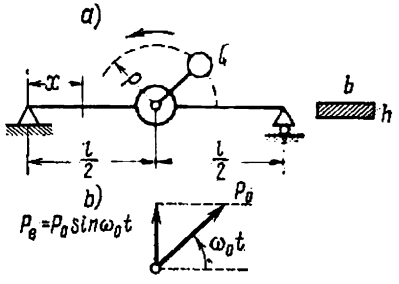


Fig. 231

Les valeurs maximales de la contrainte normale σ_{max} et du déplacement vertical δ_{max}, pour une action statique sur la poutre de la force concentrée Q et de la force répartie Q_0, sont :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{\frac{Ql}{4} + \frac{Q_0 l}{8}}{W} = \frac{l}{4W}\left(Q + \frac{Q_0}{2}\right) =$$

$$= \frac{100}{4 \cdot 2}\left(20 + \frac{9{,}6}{2}\right) = 310 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\delta_{max} = \frac{Ql^3}{48EI} + \frac{5}{384}\frac{Q_0 l^3}{EI} = \frac{l^3}{48EI}\left(Q + \frac{5}{8}Q_0\right) =$$

$$= \frac{10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1}\left(20 + \frac{5 \cdot 9{,}6}{8}\right) \approx 0{,}27 \text{ cm}.$$

D'après la formule (238) le coefficient dynamique :

$$k_d = 1 + \frac{A}{\delta_{max}} = \frac{\max \sigma_d}{\sigma_{max}} = \frac{2\,000}{310} \approx 6{,}45.$$

l'amplitude admissible de l'oscillation sera donc :

$$A = \left(\frac{\max \sigma_d}{\sigma_{max}} - 1\right)\delta_{max} = 5{,}45 \cdot 0{,}27 = 1{,}47 \text{ cm}.$$

Le déplacement vertical δ_x d'une section arbitraire à une distance x de l'appui gauche et le déplacement vertical de la section médiane

de la poutre dus à l'action statique sur la poutre de la force concentrée Q sont respectivement :

$$\delta_x = \frac{Ql^3}{48EI}\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right) \text{ et } \delta = \frac{Ql^3}{48EI} = \frac{20 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} = \frac{5}{24} \text{ cm.}$$

Donc :

$$\frac{\delta_x}{\delta} = 3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3};$$

et le coefficient de réduction de masse d'après la formule (238) est :

$$k_m = \frac{2}{l}\int_0^{l/2}\left(\frac{\delta_x}{\delta}\right)^2 dx = \frac{2}{l}\int_0^{l/2}\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right)^2 dx = \frac{17}{35}.$$

De l'expression (229) on trouve la fréquence circulaire des oscillations libres de la poutre :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \dfrac{Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 24}{5} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{17}{35} \cdot \dfrac{9{,}6}{20}}} \approx 61{,}8 \text{ 1/s.}$$

La rotation de la charge non équilibrée Q_1 engendre une force centrifuge $P_0 = \frac{Q_1}{g}\omega_0^2\rho$ dont la composante verticale (fig. 231,*b*) $P_e = P_0 \sin \omega_0 t$ est la force excitante harmonique, produisant les oscillations forcées de la poutre. La quantité $\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$ est la fréquence circulaire de la force excitante, et P_0 la valeur maximale de cette force.

Le déplacement vertical maximal de la poutre, dû à l'action statique de la force P_0, est :

$$\delta_0 = \frac{P_0 l^3}{48EI} = \frac{Q_1 l^3 \rho}{48EIg}\omega_0^2 = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 4}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 981}\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{24 \cdot 981} \text{ cm.}$$

En partant de la formule (232) nous écrivons :

$$1{,}47 = \frac{\omega_0^2}{24 \cdot 981\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{61{,}8^2}\right)} = \frac{61{,}8^2}{24 \cdot 981} \cdot \frac{\omega_0^2}{61{,}8^2 - \omega_0^2} \approx 0{,}162\frac{\omega_0^2}{61{,}8^2 - \omega_0^2},$$

d'où :

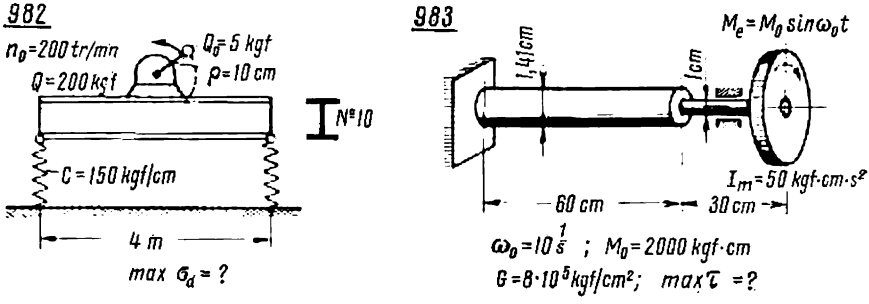
$$\omega_0^2 = \frac{61{,}8^2 \cdot 1{,}47}{1{,}63} \quad \text{et} \quad \omega_0 = 61{,}8\sqrt{\frac{147}{163}} \approx 58{,}6 \text{ 1/s.}$$

Donc, le nombre de tours par minute est :

$$n = \frac{30}{\pi}\omega_0 = \frac{30 \cdot 58{,}6}{\pi} \approx 560 \text{ tr/mn}.$$

Problèmes 982-983. Calculer les contraintes dynamiques maximales dans les systèmes soumis à des oscillations.

Le poids Q_0 est inclus dans le poids Q.



§ 3. Choc

Le phénomène du choc a lieu lors d'une variation rapide des vitesses de mouvement des corps, des systèmes ou de leurs parties au moment de leur contact.

On a en vue d'envisager seulement les cas les plus simples de choc d'un corps mobile (le corps provoquant le choc) avec un corps ou un système immobile (le corps soumis au choc) dans les hypothèses suivantes.

1. Le corps provoquant le choc est parfaitement rigide.
2. Le corps soumis au choc a un degré de liberté, et ses déplacements généralisés sont proportionnels aux forces généralisées correspondantes pour une action statique et dynamique.
3. Le choc n'est pas élastique, au moment du choc il n'y a pas séparation du corps provoquant le choc et du corps soumis au choc, mais les déformations totales de ce dernier sont élastiques.
4. La déformation du corps soumis au choc est la même que celle obtenue par l'application statique de la force généralisée correspondante à l'endroit du choc et dans le sens du choc.
5. La vitesse du corps provoquant le choc est petite devant la vitesse de propagation des ondes de choc, et la durée du choc beaucoup plus grande que celle de la propagation de ces ondes dans tout le volume du corps soumis au choc.

Dans ces hypothèses, les efforts dynamiques généralisés P_d, les contraintes dynamiques généralisées p_d et les déplacements dynamiques généralisés δ_d dans le corps soumis au choc peuvent être

déterminés d'une manière approchée par les formules:

$$\left.\begin{aligned} P_d &= k_d P, \\ p_d &= k_d p, \\ \delta_d &= k_d \delta. \end{aligned}\right\} \tag{242}$$

Dans ces formules les quantités P, p et δ correspondent à l'action statique, sur le corps soumis au choc, d'une force généralisée, appliquée à l'endroit du choc et dans le sens du choc, k_d est un coefficient dynamique sans dimension plus grand que l'unité.

Si un corps de poids Q au moment où il rencontre un corps de poids Q_0, est animé d'un mouvement de vitesse v_0 dans la direction de la pesanteur et provoque dans les éléments de ce corps des déplacements de translation, le coefficient dynamique est:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}}, \tag{243}$$

où $\delta = \frac{Q}{C}$ est le déplacement linéique du point du choc, dû à l'action statique de la charge Q dans le sens du choc;

C la rigidité du corps provoquant le choc pour la déformation considérée de ce corps;

k_m le coefficient de réduction de la masse du corps soumis au choc au point du choc, défini comme pour le cas des oscillations;

$T = \frac{Qv_0^2}{2g}$ l'énergie cinétique du mouvement de la charge Q au moment du choc;

$U = \frac{Q\delta}{2}$ l'énergie potentielle de déformation élastique du corps soumis au choc, due à l'action statique de la charge Q.

Dans le SI l'énergie cinétique $T = \frac{mv^2}{2}$, et le rapport $\frac{Q_0}{Q}$ est mesuré par le rapport $\frac{m_0}{m}$.

La formule (243) montre que plus la rigidité C du corps soumis au choc est grande, plus la valeur du coefficient dynamique k_d est grande.

Pour une application brusque de la charge Q quand $v_0 = 0$:

$$k_d = 2. \tag{244}$$

Dans le cas d'un choc où la masse du corps soumis au choc n'est pas considérée, c'est-à-dire, quand $Q_0 \ll Q$,

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2 C}{Qg}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U}}. \tag{245}$$

Si l'on ne tient pas compte de la masse du corps soumis au choc, la valeur du coefficient dynamique croît par rapport à sa valeur générale (243), ce qui fait croître la valeur du coefficient de sécurité.

Si $\frac{v_0^2}{g\delta} = \frac{v_0^2 C}{Qg} = \frac{T}{U} \geqslant 10$, le coefficient dynamique peut être calculé avec une erreur de 5 % d'après la formule:

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}} = 1 + \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = 1 + \sqrt{\frac{T}{U}}. \tag{246}$$

Si $\frac{v_0^2}{g\delta} \geqslant 110$, on peut admettre, avec une erreur de 10 % que:

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}} = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{\frac{T}{U}}. \tag{247}$$

Notons que l'utilisation des formules (246) et (247) ne renforce pas le coefficient de sécurité.

Dans le cas où le poids propre du corps soumis au choc est très grand ($Q_0 \to \infty$), $k_d \to 2$.

Pour un choc horizontal l'expression (243) doit être remplacée par la formule:

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{Q_0}{Q}}}. \tag{248}$$

Dans ce cas le coefficient de sécurité croît, quand on néglige la masse du corps soumis au choc, bien que k_d soit déterminé par la formule (247).

Si le poids propre du corps soumis au choc est petit et si ce corps supporte une lourde charge Q_1 sur laquelle est porté le choc de la charge Q, la valeur $k_m Q_0$ dans les formules (243) ou (248) doit être remplacée par la valeur Q_1.

Dans le calcul des systèmes soumis au choc dont les éléments sont montés en parallèle, en série ou d'une façon mixte, la rigidité du système C peut être déterminée respectivement selon les formules (221), (222) et (223).

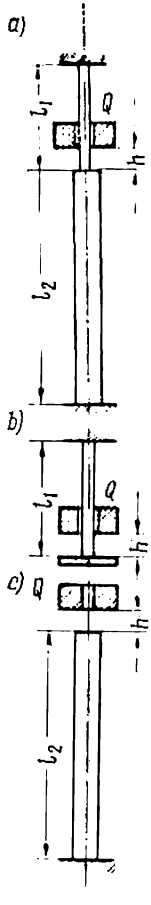


Fig. 232

Si le corps provoquant le choc est animé d'un mouvement de rotation et engendre dans le corps soumis au choc des déformations définies par des déplacements angulaires, on peut utiliser les formules ci-dessus à condition de remplacer dans ces formules la vitesse linéique v_0 par la vitesse angulaire ω_0 et les masses $\frac{Q}{g}$ et $\frac{Q_0}{g}$ par les moments d'inertie des masses I_m et I_{m_0} par rapport à leurs axes de rotation.

Le calcul de résilience (résistance au choc) est effectué selon les formules établies pour les charges statiques.

La condition de résistance peut être écrite sous la forme:

$$\max p_d = k_d p_{max} \leqslant [p_d], \qquad (249)$$

où $\max p_d$ est la contrainte dynamique généralisée maximale de calcul;

p_{max} la contrainte généralisée maximale, due à l'action statique de la charge Q;

$[p_d]$ la contrainte dynamique généralisée admissible correspondante.

Dans les calculs pratiques, il faut tenir compte du fait que sous l'action d'un choc le corps acquiert une tendance à la rupture fragile; cette tendance dépend fortement de la constitution et de la structure du matériau du corps, de la vitesse de chargement, de la température et des concentrations de contraintes.

Dans les problèmes considérés on suppose que les principaux facteurs indiqués affectant la résilience sont pris en considération dans les valeurs données des contraintes admissibles.

Exemple 131. Etant donnés: $m = 10$ kg; $h = 4$ cm; $l_1 = 20$ cm; $F_1 = 2$ cm^2; $l_2 = 40$ cm; $F_2 = 4$ cm^2; $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^5$ Mn/m^2 (fig. 232,*a*);

calculer σ_{d_1}, σ_{d_2}, δ_d. Négliger le poids propre des barres.

Solution. On détermine le poids du corps provoquant le choc :

$$Q = mg = 10 \cdot 9{,}81 = 98{,}1 \text{ N}.$$

Puisque les barres de rigidités $C_1 = \frac{EF_1}{l_1}$ et $C_2 = \frac{EF_2}{l_2}$ sont montées en parallèle, la rigidité du système, d'après la formule (221), sera :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{EF_1}{l_1} + \frac{EF_2}{l_2} = E\left(\frac{F_1}{l_1} + \frac{F_2}{l_2}\right) =$$

$$= 2 \cdot 10^{11}\left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{0{,}20} + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0{,}40}\right) = 4 \cdot 10^8 \text{ N/m}.$$

Compte tenu du fait qu'au moment du choc la vitesse de la charge Q en chute libre d'une hauteur h sera $v_0 = \sqrt{2gh}$, on a :

$$\frac{v_0^2 C}{Qg} = \frac{2hC}{Q} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^8}{98{,}1} \approx 32{,}6 \cdot 10^4.$$

Cette quantité est si grande qu'il est tout à fait admissible de calculer le coefficient dynamique selon la formule (247) :

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{32{,}6 \cdot 10^4} \approx 571.$$

Puisque pour une action statique de la charge Q le déplacement de son point d'application $\delta = \frac{Q}{C} = \frac{N_1}{C_1} = \frac{N_2}{C_2}$, l'effort longitudinal dans les sections droites des barres sera :

$$N_1 = \frac{Q}{C} C_1 = \frac{Q}{1 + \frac{C_2}{C_1}} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{Q}{C} C_2 = \frac{Q}{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

Les valeurs des contraintes normales dynamiques dans les sections droites des barres seront :

$$\sigma_{d_1} = \frac{N_1}{F_1} k_d = k_d \frac{Q}{F_1\left(1 + \frac{F_2 l_1}{F_1 l_2}\right)} = 571 \frac{98{,}1}{2 \cdot 10^{-4}\left(1 + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{0{,}20}{0{,}40}\right)} =$$

$$= 140 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 140 \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_{d_2} = \frac{N_2}{F_2} k_d = \frac{Q}{F_2\left(1 + \frac{F_1 l_2}{F_2 l_1}\right)} k_d = \frac{98{,}1}{4 \cdot 10^{-4}\left(1 + \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}40}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}20}\right)} 571 =$$

$$= 70 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 70 \text{ MN/m}^2.$$

Le déplacement dynamique du point du choc est:

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = \frac{10 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 108} 571 \approx 1{,}40 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}014 \text{ cm}.$$

Cas particuliers.

1) Si $C_2 = 0$ (fig. 232,*b*), on a:

$$C = C_1 = \frac{EF_1}{l_1} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{0{,}20} \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-2} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ N/m};$$

$$k_d = \sqrt{\frac{2hC_1}{Q}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^8}{98{,}1}} \approx 4 \cdot 10^2;$$

$$\sigma_{d_1} = \frac{Q}{F_1} k_d = \frac{98{,}1}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 200 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \approx 200 \text{ MN/m}^2;$$

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = \frac{98{,}1}{2 \cdot 10^8} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0{,}02 \text{ cm}.$$

2) Si $C_1 = 0$ (fig. 232,*c*), on a:

$$C = C_2 = \frac{EF_2}{l_2} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0{,}40} = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}; \quad k_d = 4 \cdot 10^2;$$

$$\sigma_{d_2} = \frac{Q}{F_2} k_d = \frac{10 \cdot 9{,}81}{4} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 200 \text{ MN/m}^2;$$

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

Exemple 132. Etant donnés: $Q = 4$ kgf; $h = 4$ cm; pour les ressorts de faible pas $D = 2$ cm, $d = 0{,}4$ cm, $n = 4$ spires, $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2, pour la poutre $l = 40$ cm, $a = 3$ cm, $b = 1$ cm, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2 (fig. 233);

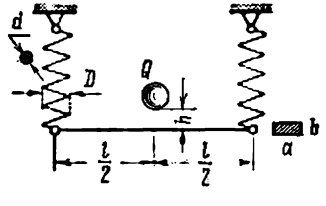


Fig. 233

calculer $\max \tau_d$ dans le ressort, $\max \sigma_d$ dans la poutre, le déplacement δ_d du point du choc. Négliger les poids propres du ressort et de la poutre.

Solution. Puisque les ressorts de rigidités $C_1 = \frac{Gd^4}{8D^3n}$ sont montés en parallèle et la poutre de rigidité $C_2 = \frac{48EI}{l^3}$ est liée aux ressorts en série, la rigidité du système considéré comme un système à liaison

mixte des éléments, d'après la formule (233), sera:

$$C=\frac{1}{\frac{1}{2C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{1}{\frac{4D^3n}{Gd^4}+\frac{l^3}{48EI}}=\frac{1}{\frac{4\cdot 8\cdot 4}{8\cdot 10^5\cdot 256\cdot 10^{-4}}+\frac{64\cdot 10^3\cdot 12}{48\cdot 2\cdot 10^6\cdot 3\cdot 1}}\approx$$

$$\approx 112 \text{ kgf/cm}.$$

D'après la formule (245) pour le coefficient dynamique on a:

$$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2hC}{Q}}=1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 4\cdot 112}{4}}\approx 16.$$

Puisque $\frac{D}{d}=\frac{2}{0{,}4}=5$, dans le ressort, le coefficient d'accroissement des contraintes dû à la courbure de la spire est:

$$k=\frac{\frac{D}{d}-0{,}25}{\frac{D}{d}-1}+\frac{0{,}615}{\frac{D}{d}}=\frac{4{,}75}{4}+\frac{0{,}615}{5}\approx 1{,}31.$$

Les contraintes dynamiques maximales dans les ressorts et la poutre sont:

$$\max\tau_d=k\frac{4QD}{\pi d^3}k_d\approx 1{,}31\,\frac{4\cdot 4\cdot 2}{\pi\cdot 64\cdot 10^{-3}}16\approx 3\,340 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\max\sigma_d=\frac{Ql}{4W}k_d=\frac{4\cdot 40\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 1}16\approx 1\,280 \text{ kgf/cm}^2.$$

Le déplacement dynamique du point du choc est:

$$\delta_d=\frac{Q}{C}k_d=\frac{4}{112}16\approx 0{,}57 \text{ cm}.$$

En l'absence de ressorts on aurait:

$$C=C_2=\frac{48EI}{l^3}=375 \text{ kgf/cm};$$

$$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2hC}{Q}}=1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 4\cdot 375}{4}}\approx 28{,}4;$$

$$\sigma_{max}=\frac{4\cdot 40\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 1}\cdot 28{,}4\approx 2\,270 \text{ kgf/cm}^2.$$

Exemple 133. Soient : $Q = 20$ kgf, $h = 2$ cm, $\rho = 4$ cm, $l_1 = l_2 = l_3 = l = 20$ cm, $d_1 = 1{,}4$ cm, $d_2 = 1{,}2$ cm, $d_3 = 1$ cm, $G = 2{,}8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2 (fig. 234).

Calculer le déplacement dynamique δ_d du point d'application de la charge Q et la contrainte tangentielle dynamique maximale $\max \tau_{d_{1,2,3}}$ dans les tronçons des barres. Négliger le poids propre de la barre à gradins.

Solution. Les rigidités des tronçons de la barre en torsion sont respectivement :

$$C_1 = \frac{GI_{p_1}}{l}, \quad C_2 = \frac{GI_{p_2}}{l}, \quad C_3 = \frac{GI_{p_3}}{l}.$$

Les deux premiers tronçons de la barre sont montés en série et leur rigidité commune est :

$$C_0 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}.$$

Puisque au droit de la section où est appliqué le couple extérieur, le troisième tronçon est monté en parallèle avec les deux premiers,

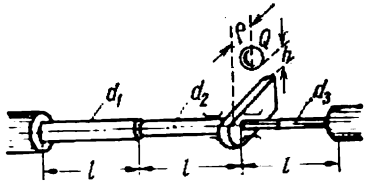


Fig. 234

la rigidité de toute la barre, considérée comme un système à liaison parallèle des éléments, sera :

$$C = C_0 + C_3 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} + C_3 = \frac{1}{\frac{l}{GI_{p_1}} + \frac{l}{GI_{p_2}}} + \frac{GI_{p_3}}{l} =$$

$$= \frac{G}{l}\left(\frac{1}{\frac{1}{I_{p_1}} + \frac{1}{I_{p_2}}} + I_{p_3}\right) \approx 0{,}1\,\frac{G}{l}\left(\frac{1}{\frac{1}{d_1^4} + \frac{1}{d_2^4}} + d_3^4\right) =$$

$$= 0{,}1\,\frac{2{,}8 \cdot 10^5}{20}\left(\frac{1}{\frac{1}{1{,}4^4} + \frac{1}{1{,}2^4}} + 1\right) \approx 3\,290 \text{ kgf/cm}.$$

L'énergie cinétique de la charge provoquant le choc au moment du choc est :

$$T = \frac{Qv_0^2}{2g} = Qh \text{ kgf·cm.}$$

La rotation statique de la section où est appliqué le couple extérieur de moment $M = Q\rho$ est :

$$\varphi = \frac{M}{C} = \frac{Q\rho}{C} = \frac{20 \cdot 4}{3290} = \frac{8}{329} \text{ rad.}$$

L'énergie potentielle de déformation élastique de torsion statique de la barre est égale à :

$$U = \frac{M\varphi}{2} = \frac{Q^2\rho^2}{2C}.$$

Puisque le rapport

$$\frac{T}{U} = \frac{Qh}{Q^2\rho^2} 2C = \frac{2hC}{Q\rho^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3\,290}{20 \cdot 16} \approx 41{,}1$$

n'est pas grand, le coefficient dynamique, selon la formule (246), sera :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U}} = 1 + \sqrt{42{,}1} \approx 7{,}5.$$

La rotation dynamique de la section de la barre où est appliqué le moment extérieur, créé par la charge en chute libre, est :

$$\varphi_d = \varphi k_d = \frac{8 \cdot 7{,}5}{329} \approx 0{,}182 \text{ rad.}$$

Le déplacement linéique dynamique de la charge Q sera :

$$\delta_d = \rho\varphi_d = 0{,}182 \cdot 4 = 0{,}73 \text{ cm.}$$

Le moment réactif dans l'encastrement droit de la barre dû à l'action statique du couple extérieur de moment $M = Q\rho$ est :

$$M_d = \varphi C_3 = \varphi \frac{GI_{p_3}}{l} = \frac{8}{329} \cdot \frac{2{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1}{20} \approx 34 \text{ kgf·cm.}$$

Pour le moment réactif dans l'encastrement gauche de la barre on a :

$$M_g = M - M_d = 20 \cdot 4 - 34 = 46 \text{ kgf·cm.}$$

Les contraintes tangentielles dynamiques maximales dans les tronçons de la barre seront :

$$\max \tau_{d_1} = \frac{M_g}{W_{p_1}} k_d \approx \frac{46}{0{,}2 \cdot 1{,}4^3} 7{,}5 \approx 628 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\max \tau_{d_2} = \frac{M_g}{W_{p_2}} k_d \approx \frac{46}{0{,}2 \cdot 1{,}2^3} 7{,}5 \approx 986 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\max \tau_{d_3} = \frac{M_d}{W_{p_3}} k_d \approx \frac{34}{0{,}2 \cdot 1} 7{,}5 \approx 1\,230 \text{ kgf/cm}^2.$$

Exemple 134. Etant donnés : $m = 1$ kg, $v_0 = 4$ m/s, $m_1 = 20$ kg, $d = 2$ cm, $l = 0{,}4$ m, $E = \frac{5}{2} G = 2 \cdot 10^5$ MN/m² (fig. 235) ; calculer $\max \sigma_d$, $\max \tau_d$, δ_d. Le choc est horizontal. Négliger le poids propre de la barre.

Solution. On détermine le poids correspondant à la masse m : $Q = mg = 9{,}81$ N. Puisque le système est soumis au choc par une masse m en mouvement horizontal, on calculera le coefficient dynamique à l'aide de la formule (248) * en remplaçant la quantité $k_m m_0$ par la valeur de la masse m_1, c'est-à-dire :

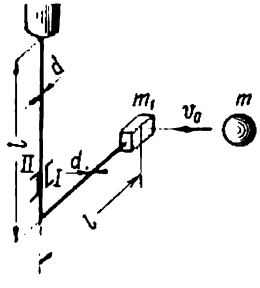


Fig. 235

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m}}}.$$

Puisque le déplacement horizontal du point du choc dû à la torsion de la barre verticale sous l'action statique de la force Q dans la direction du choc est :

$$\delta_0 \approx \varphi l = \frac{Ml}{GI_p} l = \frac{Ql^3}{GI_p},$$

le système soumis au choc peut être considéré comme un système où la barre horizontale en flexion de rigidité $C_1 = \frac{3EI}{l^3}$ est montée en série avec la barre verticale en torsion dont la rigidité par rapport au déplacement linéique du point du choc est $C_2 = \frac{GI_p}{l^3}$.

* Puisque le problème est résolu dans le SI, le rapport $\frac{k_m Q_0}{Q}$ dans la formule (248) est remplacé par $\frac{k_m m_0}{m}$.

La rigidité de tout le système, selon la formule (222), est:

$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{1}{\frac{l^3}{3EI}+\frac{l^3}{GI_p}}=\frac{1}{\frac{l^3}{3\cdot\frac{5}{2}G\cdot\frac{1}{2}\cdot I_p}+\frac{l^3}{GI_p}}\approx$$

$$\approx\frac{GI_p}{1{,}27l^3}\approx\frac{8\cdot10^{10}\cdot0{,}1\cdot0{,}02^4}{1{,}27\cdot0{,}4^3}\approx16\cdot10^3\ \text{N/m}.$$

Le coefficient dynamique:

$$k_d=\sqrt{\frac{16\cdot16\cdot10^3\cdot1}{1\cdot9{,}81}\cdot\frac{1}{1+\frac{20}{1}}}\approx11{,}2.$$

Les valeurs de la contrainte normale maximale σ_{max} dans la barre horizontale, de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} dans la barre verticale et du déplacement linéique δ au point du choc, quand la force Q agit statiquement dans le sens du choc, sont:

$$\sigma_{max}=\frac{Ql}{W}\approx\frac{9{,}81\cdot0{,}4}{0{,}1\cdot0{,}02^3}\approx5\cdot10^6\ \text{N/m}^2=5\ \text{MN/m}^2;$$

$$\tau_{max}=\frac{Ql}{W_p}\approx\frac{9{,}81\cdot0{,}4}{0{,}2\cdot0{,}02^3}\approx2{,}5\cdot10^6\ \text{N/m}^2=2{,}5\ \text{MN/m}^2;$$

$$\delta=\frac{Q}{C}=\frac{9{,}81}{16\cdot10^3}\approx0{,}613\cdot10^{-3}\ \text{m}=0{,}0613\ \text{cm}.$$

Les valeurs des quantités dynamiques cherchées sont égales à:

$$\max\sigma_d=k_d\sigma_{max}=11{,}2\cdot5=56\ \text{MN/m}^2;$$

$$\max\tau_d=k_d\tau_{max}=11{,}2\cdot2{,}5=28\ \text{MN/m}^2;$$

$$\delta_d=k_d\delta=11{,}2\cdot0{,}0613\approx0{,}69\ \text{cm}.$$

En l'absence de la masse m_1, on aurait:

$$k_d=\sqrt{\frac{v_0^2C}{Qg}}=\sqrt{\frac{16\cdot16\cdot10^3}{9{,}81\cdot9{,}81}}\approx51{,}6;$$

$$\max\sigma_d=51{,}6\cdot5=258\ \text{MN/m}^2;$$

$$\max\tau_d=51{,}6\cdot2{,}5=129\ \text{MN/m}^2;\quad\delta_d=51{,}6\cdot0{,}0613\approx3{,}16\ \text{cm}.$$

Exemple 135. Choc longitudinal. Etant donnés: $Q = 8$ kgf, $\gamma = 8$ gf/cm^3, $l = 2$ m, $F = 4$ cm^2, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, $[\sigma_d] = 1\,000$ kgf/cm^2 (fig. 236);

calculer h en prenant en considération et en la négligeant la masse de la barre.

Solution. Puisque pour une action statique de la charge Q:

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \frac{8}{4} = 2 \text{ kgf/cm}^2,$$

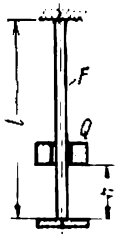


Fig. 236

la valeur du coefficient dynamique, d'après la formule (249), sera:

$$k_d = \frac{[\sigma_d]}{\sigma} = \frac{1\,000}{2} = 500.$$

D'un autre côté, puisque la vitesse de mouvement de la charge Q au moment du choc est $v_0 = \sqrt{2gh}$, la rigidité de la barre en traction $C = \frac{EF}{l}$, le poids propre de la barre $Q_0 = \gamma Fl$ et le coefficient de réduction de la masse de la barre au point du choc $k_m = \frac{1}{3}$ (voir exemple 125), selon la formule (243), on aura:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEF}{Ql} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_0}{Q}}} =$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4}{8 \cdot 2 \cdot 10^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{8}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 10^4}{3{,}8} h}.$$

Donc, $500 = 1 + \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 10^4}{3{,}8} h}$, d'où l'on tire $h = \frac{(499^2 - 1) \cdot 3{,}8}{3 \cdot 10^4} \approx 31{,}5$ cm.

En négligeant la masse de la barre, on aura:

$$k_d = 500 = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{\frac{2hEF}{Ql}} = \sqrt{\frac{2h \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4}{8 \cdot 2 \cdot 10^2}} = 10^2 \sqrt{h}.$$

Donc, $h = 25$ cm.

Cela signifie que le calcul sans considération du poids propre de la barre donne une valeur inférioriséе pour la hauteur de sécurité

de chute de la charge par :

$$\frac{31{,}5-25}{31{,}5}\cdot 100\approx 21\%.$$

Exemple 136. Choc transversal. Etant donnés : $h=5$ cm, $l=1$ m, $I=2\,000$ cm^4, $W=200$ cm^3, $Q_0=25$ kgf, $E=2\cdot 10^6$ kgf/cm^2, $[\sigma_d]=1\,200$ kgf/cm^2 (fig. 237) ;

calculer Q en prenant en considération (et en la négligeant) la masse de la poutre.

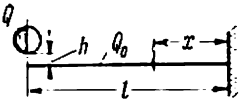


Fig. 237

Solution. Pour une action statique de la charge Q le déplacement vertical de l'extrémité libre de la poutre $\delta=\dfrac{Ql^3}{3EI}$; le déplacement vertical d'une section arbitraire de la poutre à une distance x de l'encastrement, selon la formule de la méthode des paramètres initiaux, est :

$$\delta_x=\frac{1}{EI}\left(\frac{Qlx^2}{2}-\frac{Qx^3}{6}\right)=\frac{Ql^3}{3EI}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Par conséquent, le coefficient de réduction de la masse de la poutre au point du choc sera :

$$k_m=\frac{1}{l}\int_0^l\left(\frac{\delta_x}{\delta}\right)^2dx=\frac{1}{l}\int_0^l\left(\frac{3x^2}{2l^2}-\frac{x^3}{2l^3}\right)^2dx=\frac{33}{140}.$$

D'après la formule (243) le coefficient dynamique est :

$$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2h3EI}{Ql^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{33}{140}\cdot\frac{Q_0}{Q}}}=$$

$$=1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^3}{Q\cdot 10^6}\cdot\frac{1}{1+\frac{33}{140}\cdot\frac{25}{Q}}}\approx$$

$$\approx 1+\sqrt{1+\frac{12\cdot 10^4}{Q+6}}.$$

D'un autre côté, puisque pour une action statique de la charge Q la contrainte normale maximale dans la poutre est:

$$\sigma_{max} = \frac{Ql}{W} = \frac{Q \cdot 100}{200} = \frac{Q}{2} \text{ kgf/cm}^2,$$

pour le coefficient dynamique, selon la formule (249), on aura:

$$k_d = \frac{[\sigma_d]}{\sigma_{max}} = \frac{1\,200 \cdot 2}{Q} = \frac{2\,400}{Q}.$$

Par conséquent, $\frac{2400}{Q} = 1 + \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 10^4}{Q+6}}$ ou:

$$13Q^2 - 6 \cdot 10^2 Q - 36 \cdot 10^2 = 0,$$

d'où l'on tire:

$$Q = \frac{1}{13}\left(3 \cdot 10^2 \pm \sqrt{9 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^2}\right) \approx \frac{3 \pm 3{,}7}{13} \cdot 10^2.$$

Le problème est vérifié seulement pour une valeur de la racine:

$$Q = \frac{6{,}7 \cdot 10^2}{13} \approx 52 \text{ kgf.}$$

Sans considération de la masse de la poutre, on aura:

$$\frac{2400}{Q} = \sqrt{\frac{2h \cdot 3EI}{Ql^3}}.$$

Par conséquent:

$$Q = \frac{24^2 \cdot 10^4 \cdot l^3}{2h \cdot 3 \cdot EI} = \frac{24^2 \cdot 10^4 \cdot 10^6}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3} = 48 \text{ kgf.}$$

Donc, si l'on néglige la masse de la poutre, le poids de sécurité de la charge tombante diminue de $\frac{52-48}{52} 100 \approx 8$ %.

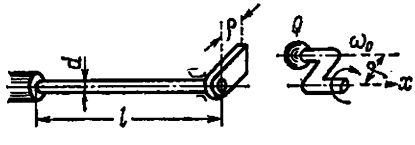


Fig. 238

Exemple 137. Choc de torsion. La charge $Q = 3$ kgf à l'extrémité d'un levier de bras $\rho = 8$ cm est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe horizontal x et frappe sur la partie saillante d'une barre cylindrique de la longueur $l = 40$ cm et de diamètre $d = 6$ cm (fig. 238).

Déterminer le nombre de tours par minute admissible n de rotation de la charge Q, si le poids spécifique du matériau de la barre $\gamma = 8$ gf/cm^3, le module d'élasticité transversale $G = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2 et la contrainte de cisaillement admissible $[\tau_d] = 400$ kgf/cm^2.

Solution. Quand la barre est soumise à l'action statique de la charge Q, la contrainte de cisaillement maximale qui s'y développe est égale à:

$$\tau_{max} = \frac{Q\rho}{W_p} \approx \frac{Q\rho}{0{,}2d^3} = \frac{3 \cdot 8}{0{,}2 \cdot 6^3} = \frac{5}{9} \text{ kgf/cm}^2.$$

Le coefficient dynamique:

$$k_d = \frac{[\tau_d]}{\tau_{max}} = \frac{400 \cdot 9}{5} = 720.$$

Puisque le moment d'inertie de la masse de la charge Q par rapport à l'axe de rotation:

$$I_m = \frac{Q}{g}\rho^2 = \frac{3 \cdot 64}{981} \approx 0{,}2 \cdot \text{kgf} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2,$$

le moment d'inertie de la masse de la barre:

$$I_{m_0} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma}{g} d^4 l \approx 0{,}1 \frac{8 \cdot 10^{-3}}{981} \cdot 6^4 \cdot 40 \approx 0{,}042 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2,$$

le coefficient de réduction de la masse de la barre (voir exemple 127) $k_m = \frac{1}{3}$, l'énergie cinétique du mouvement rotationnel de la charge:

$$T = \frac{I_m \omega_0^2}{2} \approx 0{,}1\omega_0^2 \text{ kgf} \cdot \text{cm},$$

et l'énergie potentielle de déformation élastique de torsion de la barre sous l'action statique de la charge:

$$U = \frac{Q^2\rho^2 l}{2GI_p} \approx \frac{9 \cdot 64 \cdot 40}{2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot 6^4} = \frac{1}{9 \cdot 10^3} \text{ kgf} \cdot \text{cm},$$

le coefficient dynamique, selon la formule (243), sera donc:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{I_{m_0}}{I_m}}} =$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{0{,}1 \cdot \omega_0^2 \cdot 9 \cdot 10^3}{1 + \frac{0{,}042}{3 \cdot 0{,}2}}} \approx 1 + \sqrt{1 + 841\omega_0^2}.$$

En comparant les valeurs calculées du coefficient dynamique on obtient: $719 = \sqrt{1 + 841\omega_2^0}$, d'où l'on tire:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} \approx \sqrt{\frac{719^2}{841}} \approx 25 \quad \text{et} \quad n = \frac{30}{\pi} \cdot 25 \approx 240 \text{ tr/mn.}$$

Sans considération de la masse de la barre, on aurait:

$$k_d = 720 = \sqrt{\frac{T}{U}} = 30\omega_0.$$

Par conséquent:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{720}{30} = 24 \quad \text{et} \quad n = \frac{30 \cdot 24}{\pi} \approx 230 \text{ tr/mn.}$$

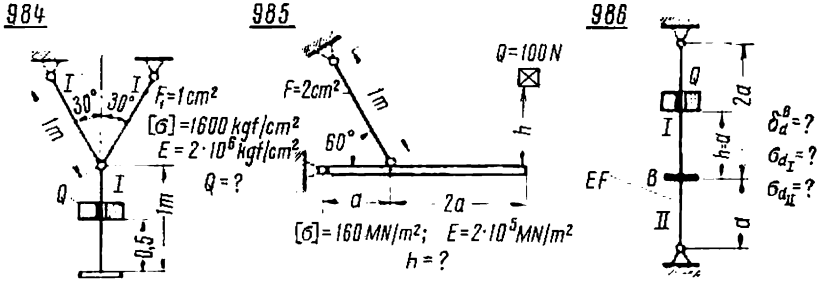
Donc, si l'on néglige la masse de la barre, le nombre de tours admissible de la charge provoquant le choc diminue de $\frac{240-230}{240} \times$ $\times 100 \approx 4$ %

Problèmes 984-1003. Déterminer les quantités inconnues pour les systèmes élastiques soumis au choc.

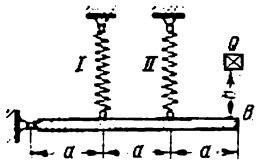
Négliger la masse propre des éléments des systèmes. Dans les problèmes qui sont résolus sous une forme générale, calculer le coefficient dynamique d'après la formule approchée:

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}}.$$

Dans les portiques et dans les poutres à courbure initiale tenir compte seulement de la déformation de flexion.

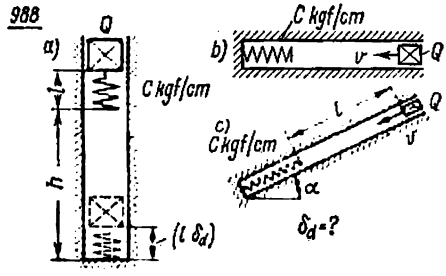


987

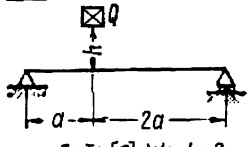


Rigidité du ressort I-C_1 } kgf/cm
Rigidité du ressort II-C_2 }
δ_d^B=?

988

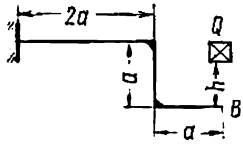


989



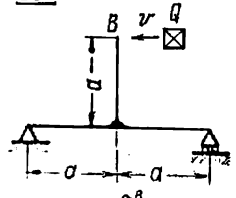
E; I; [σ]; W; h=?

990



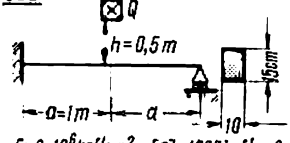
E; I; δ_d^B=?

991



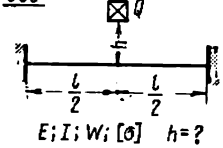
E; I; δ_d^B=?

992



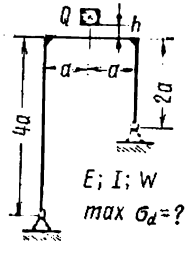
$E=2\cdot10^6$ kgf/cm²; [σ]=1600 kgf/cm²; Q=?

993



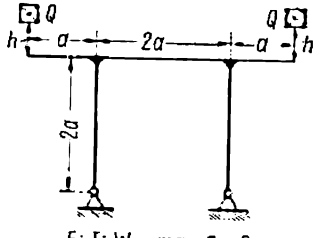
E; I; W; [σ] h=?

994



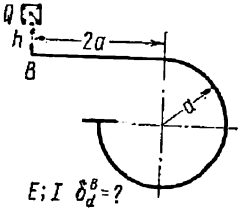
E; I; W
max σ_d=?

995

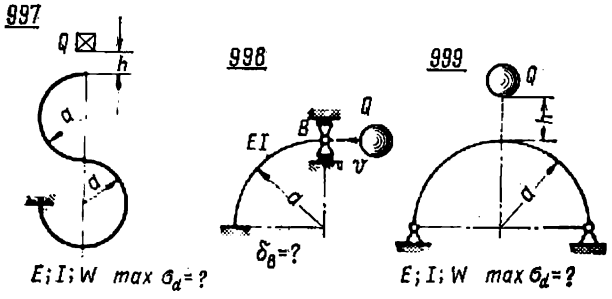


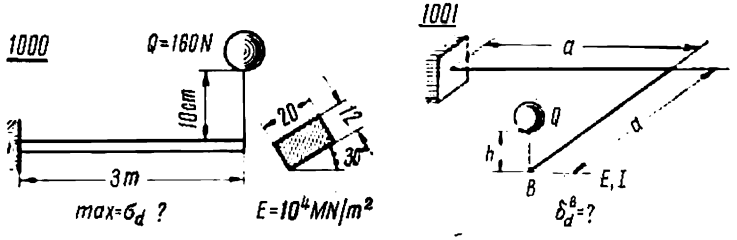
E; I; W max σ_d=?

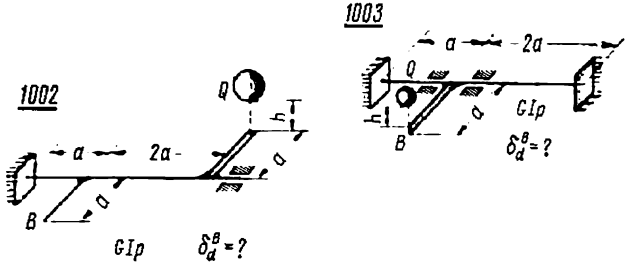
996



E; I δ_d^B=?

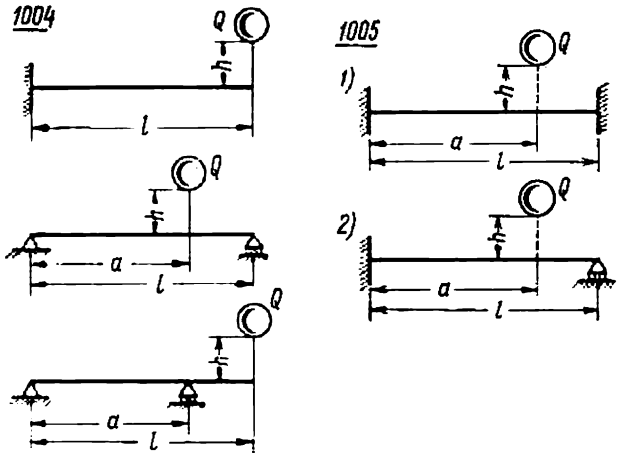






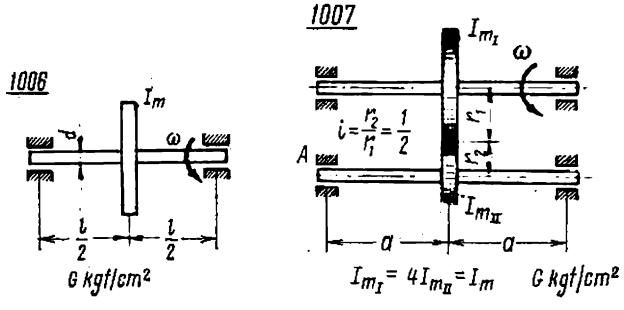
Problème 1004. Démontrer que pour les poutres indiquées, les contraintes dynamiques maximales, calculées sans considération de la masse de la poutre, ne dépendent pas du type de liaison et de la quantité a. Supposer $h \gg \delta$.

Problème 1005. Calculer la valeur de a pour laquelle max σ_d atteint une valeur minimale. Négliger la masse des poutres et supposer $h \gg \delta$.



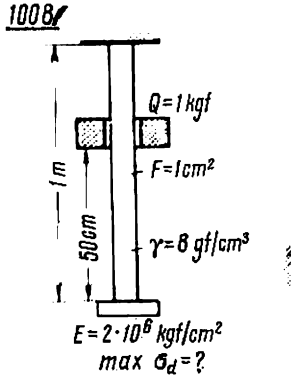
Problème 1006. Calculer max τ_d dans l'arbre animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω et supportant un volant de moment d'inertie I_m, quand on freine brusquement l'extrémité de l'arbre:

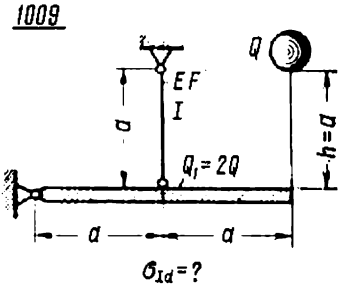
a) dans l'un des paliers; b) dans les deux paliers simultanément.

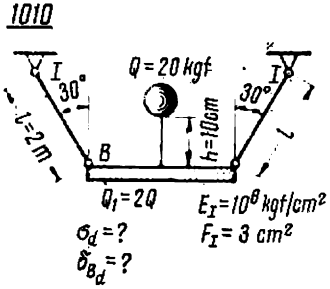


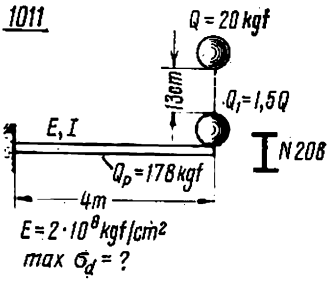
Problème 1007. Calculer max τ_d dans l'arbre d'un système de transmission, quand on freine brusquement l'extrémité de l'arbre dans le palier A.

Problèmes 1008-1011. Déterminer les quantités indiquées dans les conditions des problèmes pour les systèmes soumis au choc. Tenir compte des poids propres des barres pour lesquelles ces quantités sont indiquées. Dans les calculs prendre en considération les remarques faites dans les problèmes 984-1003.





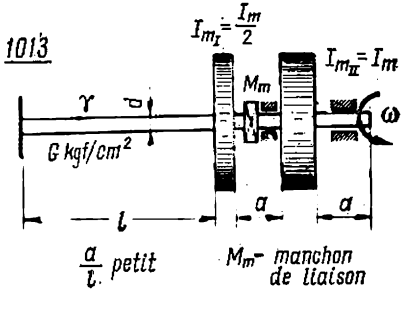


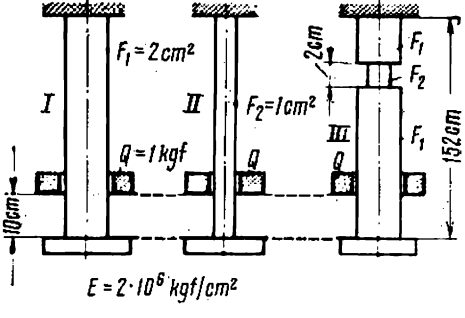


Problème 1012. Résoudre le problème 993 en tenant compte de la masse de la poutre. Le poids de la poutre est Q_0.

Problème 1013. Déterminer max τ_d dans l'arbre due au choc de torsion, provoqué par l'embrayage du manchon M_m. Le manchon d'embrayage assure la liaison du système tournant de la partie droite de l'arbre avec la partie gauche immobile.

Problème 1014. Calculer et comparer σ_{dI}, σ_{dII}, σ_{dIII}, dans les barres *I*, *II*, *III*, quand ces barres sont soumises au choc d'une même charge Q, tombant d'une même hauteur $h = 10$ cm.





XV. CONTRAINTES VARIABLES

Dans ce chapitre on étudie les contraintes dont les valeurs varient périodiquement pendant un temps de longue durée.

L'ensemble des valeurs successives des contraintes variables dans une période du processus de leurs variations s'appelle *cycle de contraintes.*

Quand le corps est systématiquement soumis à l'action des contraintes variables, des criques peuvent se développer aux endroits de concentrations maximales de ces contraintes provoquant la rupture fragile du corps. L'apparition et le développement des criques dans le matériau du corps, par suite de l'action des contraintes variables, s'appelle *fatigue du matériau.*

La résistance du matériau aux contraintes variables s'appelle *endurance du matériau.* La contrainte périodique maximale à laquelle résiste le matériau pendant un temps illimité s'appelle *limite d'endurance du matériau.*

Généralement, on détermine une limite d'endurance conventionnelle (bornée), en prenant comme base un nombre limité de cycles de variation des contraintes, par exemple, pour les métaux sidérurgiques $(5 \div 10) \cdot 10^6$ cycles, pour les métaux non ferreux $(50 \div 100) \cdot 10^6$ cycles, etc.

La quantité caractérisant un cycle est le coefficient d'asymétrie du cycle r, défini comme le rapport algébrique :

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}, \tag{250}$$

où $p_{\max}$ ($\sigma_{\max}$ et $\tau_{\max}$) et $p_{\min}$ ($\sigma_{\min}$ et $\tau_{\min}$) sont les contraintes maximale et minimale du cycle.

La quantité

$$p_m = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \tag{251}$$

s'appelle contrainte moyenne du cycle, et la quantité

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \tag{252}$$

l'amplitude du cycle.

La limite d'endurance est :

$$p_r = p^r_{\max} = p^r_m + p^r_a, \tag{253}$$

où $p^r_{\max}$, p^r_m, p^r_a sont la contrainte maximale, la contrainte moyenne et l'amplitude du cycle, quand le matériau travaille à la limite d'endurance.

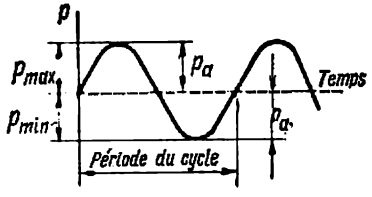


Fig. 239

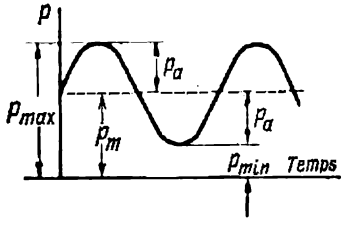


Fig. 240

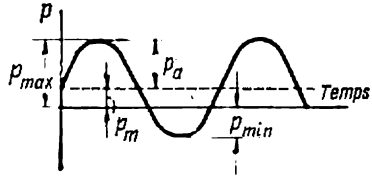


Fig. 241

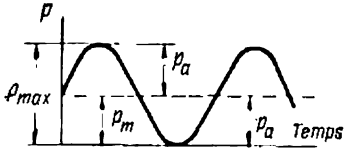


Fig. 242

Pour un cycle symétrique (fig. 239) :

$$p_{\max} = -p_{\min};\quad p_m = 0;\quad r = -1;\quad p_r = p_{-1}$$

Pour un cycle asymétrique de signe constant positif (fig 240) :

$$p_{\max} > 0;\quad p_{\min} > 0;\quad 0 < r < 1.$$

Pour un cycle asymétrique de signe alternatif (fig 241) :

$$p_{\max} > 0;\quad p_{\min} < 0;\quad -1 < r < 0.$$

Pour un cycle pulsatoire positif (fig. 242) :

$$p_{\max} > 0;\quad p_{\min} = 0;\quad p_m = p_a = \frac{p_{\max}}{2};$$

$$r = 0;\quad p_r = p_0.$$

§ 1. Principaux facteurs affectant l'endurance du matériau *

Caractère du cycle et type de déformation

La limite d'endurance a la plus petite valeur (toutes conditions égales) pour un cycle symétrique. La valeur de la limite d'endurance pour un cycle symétrique p_{-1} (σ_{-1} ou τ_{-1}) est déterminée à l'aide d'une courbe (fig. 243) qu'on construit en partant des données expérimentales. Pour cela, on mène une tangente à la partie droite de la courbe tendant à une ligne horizontale. L'ordonnée de cette tangente est considérée comme limite conventionnelle d'endurance.

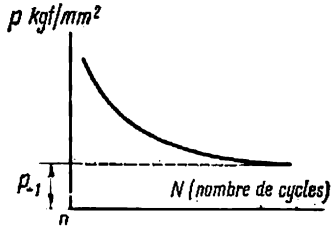


Fig. 243

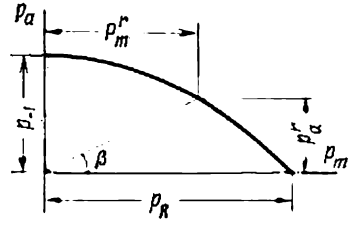


Fig. 244

Les relations approchées suivantes ont été établies entre les limites d'endurance pour la flexion symétrique σ_{-1}, pour la traction-compression axiale symétrique σ_{-1p}, pour la torsion symétrique τ_{-1} et la limite de résistance σ_R :

pour l'acier

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}4 \div 0{,}6)\,\sigma_R;\quad \sigma_{-1p} \approx (0{,}7 \div 0{,}8)\,\sigma_{-1};\quad \tau_{-1} \approx (0{,}4 \div 0{,}7)\,\sigma_{-1};$$

pour la fonte

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}4 \div 0{,}5)\,\sigma_R;\quad \tau_{-1} \approx (0{,}7 \div 0{,}9)\,\sigma_{-1};$$

pour les métaux non ferreux :

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}25 \div 0{,}5)\,\sigma_R.$$

La limite d'endurance pour un cycle asymétrique peut être déterminée à l'aide de la courbe expérimentale des amplitudes limites, construite en coordonnées : $p_m - p_a$ (fig. 244).

La quantité p_R sur la figure désigne la limite de résistance du matériau pour le type de déformation envisagé.

---

* Nous donnons seulement les renseignements nécessaires à la résolution des problèmes dans le manuel.

Pour une valeur donnée du coefficient d'asymétrie du cycle $r = \frac{p_{min}}{p_{max}}$, on calcule la quantité $\text{tg}\,\beta = \frac{p_a}{p_m} = \frac{1-r}{1+r}$ et l'angle β.

De l'origine des coordonnées, on mène une droite faisant un angle β avec l'axe des p_m. En prenant la somme des coordonnées p_m^r et p_a^r du point d'intersection de la droite et de la courbe, on détermine la limite d'endurance:

$$p_r = p_m^r + p_a^r.$$

Exemple 138. Calculer σ_{-1} pour l'acier de marque 40 dans l'état normalisé. Le journal d'observations de l'essai d'endurance à la flexion suivant un cycle symétrique donne les valeurs suivantes:

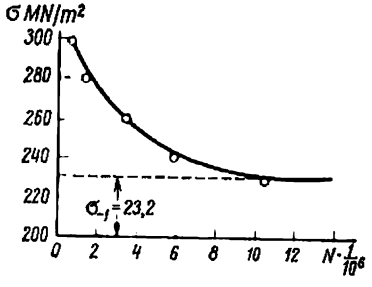


Fig. 245

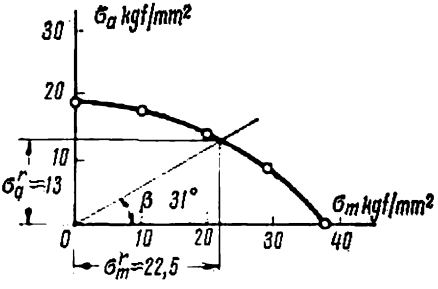


Fig. 246

σ MN/m²: 300; 290; 280; 270; 260; 250; 240; 235; 230; 230;

N $\frac{1}{10^6}$: 0,52; 0,71; 1,21; 2,32; 3,44; 4,82; 5,85; 8,51; >10; >10;

les deux dernières éprouvettes ne se sont pas rompues.

S o l u t i o n. D'après les données expérimentales, on construit la courbe d'endurance en coordonnées σ MN/m² — $\frac{N}{10^6}$ (N est le nombre de cycles) (fig. 245).

On mène une tangente à la partie extrême droite de la courbe; sur l'axe des ordonnées on détermine la valeur de la limite conventionnelle d'endurance $\sigma_{-1} \approx 232$ MN/m².

Exemple 139. Calculer $\sigma_{0,25}$ pour l'acier Ac 3; les valeurs expérimentales de $\sigma_R = 38{,}8$ kgf/mm² et $\sigma_{-1} = 18{,}5$ kgf/mm² et des amplitudes limites du cycle σ_a^r pour les valeurs données de la con-

trainte moyenne σ_m^r sont :

$$\sigma_m^r, \text{ kgf/mm}^2 \quad 10 \quad 20 \quad 30;$$

$$\sigma_a^r, \text{ kgf/mm}^2 \quad 17,5 \quad 14 \quad 8,5$$

S o l u t i o n. D'après les valeurs expérimentales, on construit la courbe des amplitudes en coordonnées $\sigma_m - \sigma_a$ (fig. 246).

Puisqu'il faut déterminer la limite d'endurance pour un coefficient d'asymétrie du cycle $r = 0,25$, on a :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1-0,25}{1+0,25} = 0,6 \quad \text{et} \quad \beta \approx 31°.$$

De l'origine des coordonnées on mène une droite faisant un angle $\beta = 31°$ à l'axe des σ_m. Les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec la courbe des amplitudes limites sont :

$$\sigma_m^{0,25} \approx 22,5 \text{ kgf/mm}^2 \quad \text{et} \quad \sigma_a^{0,25} \approx 13 \text{ kgf mm}^2.$$

La limite d'endurance cherchée sera :

$$\sigma_{0,25} = \sigma_m^{0,25} + \sigma_a^{0,25} \approx 22,5 + 13 = 35,5 \text{ kgf/mm}^2.$$

Concentration de contraintes

On appelle *concentration de contraintes* l'accroissement local des contraintes au voisinage de concentrateurs (c'est-à-dire de modifications locales de la configuration sous forme d'ouvertures, de gorges, de rainures, de congé de raccordement, etc.).

Le rapport de la contrainte locale maximale p_L (σ_L ou τ_L) à la contrainte nominale p (σ ou τ) dans la section diminuée par le concentrateur (mais sans considération de la concentration), calculé pour une charge statique, en admettant que le matériau est parfaitement homogène, isotrope et élastique, s'appelle *coefficient théorique de concentration de contraintes* :

$$\alpha = \frac{p_L}{p}; \qquad \left(\alpha_\sigma = \frac{\sigma_L}{\sigma} \quad \text{et} \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_L}{\tau}\right). \tag{254}$$

Le coefficient $\alpha > 1$ traduit la seule influence de la géométrie du concentrateur sur la valeur maximale de la contrainte locale.

Pour les contraintes variables, on introduit la notion de *coefficient effectif de concentration de contraintes* :

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{p_{-1}}{p_{-1}^k}; \quad \left(\alpha_{\text{eff}}^\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}^k} \quad \text{et} \quad \alpha_{\text{eff}}^\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1}^k}\right), \tag{255}$$

qui est le rapport de la limite d'endurance d'une éprouvette unie pour un cycle symétrique p_{-1} à la limite d'endurance d'une éprouvette de mêmes dimensions ayant un concentrateur p^k_{-1}.

Le coefficient α_{eff} traduit l'influence sur la limite d'endurance non seulement de la géométrie du concentrateur, mais aussi du matériau de l'éprouvette.

Le rapport

$$q = \frac{\alpha_{eff} - 1}{\alpha - 1} \tag{256}$$

s'appelle *coefficient de sensibilité du matériau à la concentration de contraintes.* Sa valeur varie dans l'intervalle $0 \leqslant q \leqslant 1$.

Pour la fonte $q = 0$, pour les aciers de construction $q = 0{,}6 \div 0{,}8$ (les petites valeurs correspondent aux aciers de résistance moyenne, les grandes valeurs aux aciers à haute résistance) pour les aciers avec

$$\sigma_R \geqslant 130 \text{ kgf/mm}^2, \quad q \approx 1$$

(la courbe des valeurs approchées de q pour l'acier en fonction de σ_R et α_σ sans considération de l'influence des dimensions du corps, est représentée fig. 1 de l'appendice).

Puisque q dépend encore de la forme et des dimensions du corps, dans les calculs pratiques il est plus sûr d'utiliser les valeurs de α_{eff} établies dans les essais sur éprouvettes grandeur naturelle.

Facteur d'échelle

L'influence des dimensions absolues du corps sur la limite d'endurance s'appelle *facteur d'échelle.*

La diminution de la limite d'endurance avec l'accroissement des dimensions absolues du corps est évaluée par le coefficient d'échelle $\varepsilon_E < 1$, qui est le rapport de la limite l'endurance de l'éprouvette de diamètre donné D à la limite d'endurance de l'éprouvette standard de diamètre d:

$$\varepsilon_E = \frac{(p_{-1})_D}{(p_{-1})_d} \tag{257}$$

(la courbe des valeurs ε_E en fonction de D pour les aciers au carbone et alliés, pour différents traitements de la surface des éprouvettes, est représentée fig. 2 de l'appendice 5. On peut utiliser cette courbe pour la détermination approchée de ε_E pour la flexion et la torsion).

Si la valeur du coefficient effectif de concentration est prise du graphique construit compte tenu du facteur d'échelle, il n'est pas nécessaire de corriger la valeur de ce coefficient pour les dimensions du corps.

L'influence de l'état de la surface du corps sur la limite d'endurance est caractérisée par un *coefficient de sensibilité superficielle* $\varepsilon_s < 1$, qui est le rapport de la limite d'endurance de l'éprouvette avec un état donné de sa surface (p_{-1}) à la limite d'endurance de cette même éprouvette ayant une surface polie p_{-1}:

$$\varepsilon_s = \frac{(p_{-1})}{p_{-1}} \tag{258}$$

(la dépendance ε_s de σ_R pour différents états de la surface des éprouvettes est représentée fig. 3 de l'appendice 5).

L'effet durcissant de l'écrouissage, de la trempe, de la cémentation, de l'azotation et d'autres facteurs technologiques est évalué par un coefficient β pris des ouvrages de référence et introduit comme facteur du coefficient ε_s.

§ 2. Calcul de résistance dans le cas d'un état de contraintes linéique et de cisaillement pur (de torsion)

On admet que le caractère de l'état de contraintes au point considéré du corps ne change pas quand la charge varie, et que les cycles de variation des contraintes restent semblables ($r = \text{const}$).

Dans le cas d'un *cycle symétrique* de contraintes variables, le coefficient de sécurité est établi d'après la valeur de la limite d'endurance de la pièce. L'influence des principaux facteurs (concentration de contraintes, facteur d'échelle et état de la surface) sur l'endurance de la pièce peut être évaluée par un coefficient général:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_E \beta \varepsilon_s}{\alpha_{eff}}. \tag{259}$$

Par conséquent, le coefficient de sécurité d'une pièce soumise à un cycle symétrique peut être évalué à l'aide de l'expression:

$$n = \frac{\varepsilon p_{-1}}{p_{max}}, \tag{260}$$

où p_{max} est la contrainte maximale (nominale) dans la pièce.

La condition de résistance prend la forme:

$$p_{max} \leqslant [p_{-1}], \tag{261}$$

et la valeur de la contrainte admissible :

$$[p_{-1}] = \frac{\varepsilon p_{-1}}{[n]}, \tag{262}$$

où $[n]$ est le coefficient de sécurité admissible (recommandé).

Dans le cas d'un *cycle asymétrique* de variation des contraintes avec un coefficient d'asymétrie donné r $\left(\text{ou } \operatorname{tg}\beta = \frac{1-r}{1+r}\right)$, le coefficient de sécurité pour la résistance à la fatigue peut être établi à l'aide du diagramme simplifié des amplitudes limites, construit d'après la limite d'endurance p_{-1} pour un cycle symétrique et la limite de résistance p_R en traction statique (fig. 247).

Si le cycle sur ce diagramme est caractérisé par le point C et le cycle limite semblable par le point D, le coefficient de sécurité

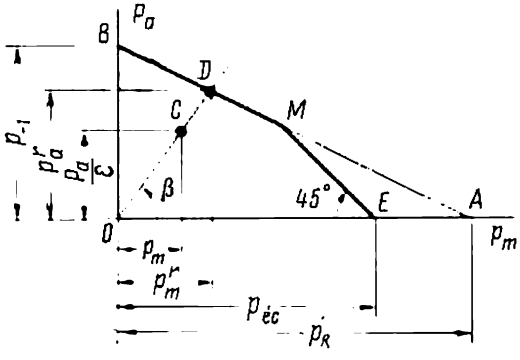


Fig. 247

graphique est exprimé par le rapport $n = \frac{OD}{OC}$ ou, analytiquement :

$$n = \frac{p_{-1}}{\frac{p_{-1}}{p_R} p_m + \frac{p_a}{\varepsilon}}. \tag{263}$$

Il se peut que l'état limite d'un matériau plastique dans le cas de contraintes variables de faible amplitude soit défini non par la fatigue mais par l'écoulement) (portion EM) ; le coefficient de sécurité sera défini alors d'après la limite d'écoulement :

$$n_{éc} = \frac{p_{éc}}{p_{max}} = \frac{p_{éc}}{p_m + p_a}. \tag{264}$$

Quand on vérifie la résistance, il est recommandé de comparer les valeurs des coefficients de sécurité données par les formules (263) et (264) et de prendre la plus petite d'entre elles. Le coefficient de sécurité choisi ne doit pas être plus petit que le coefficient admissible. En posant $n=[n]$, $p_m=[p_m]$ et $p_a=[p_a]$, dans la formule (263) on obtient la valeur de la contrainte admissible $[p_r]$ dans le cas d'un cycle asymétrique :

$$[p_r]=\frac{2[p_{-1}][p]}{(1-r)[p]+(1+r)[p_{-1}]\dfrac{p_{éc}}{p_R}}, \qquad (265)$$

où $[p]$ ($[\sigma]$ ou $[\tau]$) est la contrainte admissible pour une charge statique.

La condition de résistance prend la forme :

$$p_{max}=p_m+p_a\leqslant[p_r]. \qquad (266)$$

Pour simplifier davantage les calculs, mais de manière à augmenter le coefficient de sécurité, on peut utiliser le diagramme rectifié des contraintes admissibles de Soderberg (fig. 248).

D'après ce diagramme le coefficient de sécurité :

$$n=\frac{p_{-1}}{\dfrac{p_{-1}}{p_{éc}}p_m+\dfrac{p_a}{\varepsilon}}, \qquad (267)$$

et la valeur de la contrainte admissible :

$$[p_r]=\frac{2[p][p_{-1}]}{(1-r)[p]+(1+r)[p_{-1}]}. \qquad (268)$$

Exemple 140. Une barre de section circulaire de diamètre $d=40$ mm à surface polie est fabriquée en acier Ac 4, pour lequel $\sigma_R=480$ MN/m² et $\sigma_{-1}=200$ MN/m².

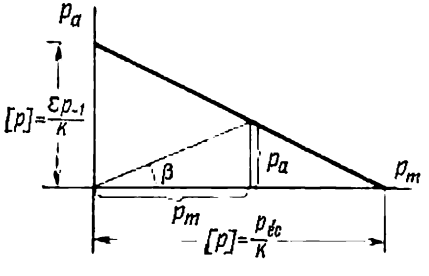


Fig. 248

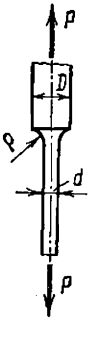


Fig. 249

Calculer le coefficient de sécurité n de la barre en flexion variable suivant un cycle symétrique, si $M_{max} = -M_{min} = 640$ N·m.

Solution. Les contraintes maximale et minimale du cycle sont :

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \frac{M_{max}}{W} \approx \frac{640}{0{,}1 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}} = 10^8 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ MN/m}^2.$$

Pour une barre d'acier au carbone de diamètre $d = 40$ mm à surface polie, la valeur du coefficient d'échelle ε_E, d'après le graphique fig. 2 de l'appendice 5, est 0,86.

Le coefficient de sécurité, selon la formule (260), sera :

$$n = \frac{\varepsilon_E \sigma_{-1}}{\sigma_{max}} \approx \frac{0{,}86 \cdot 200}{100} \approx 1{,}7.$$

Exemple 141. Une barre à gradins de section circulaire de diamètres $D = 80$ mm et $d = 40$ mm (fig. 249) est fabriquée en acier Ac 40X pour lequel $\sigma_R = 1\,000$ MN/m², $\sigma_{-1p} = 250$ MN/m².

Le congé de raccordement $\frac{\rho}{d} = 0{,}2$. La surface de la barre est soigneusement polie.

Déterminer la valeur maximale de la force axiale P_{max} variant suivant un cycle symétrique, pour laquelle on aura un coefficient de sécurité $[n] = 1{,}8$.

Solution. A l'aide du graphique fig. 4 de l'appendice 5, pour $\frac{\rho}{d} = 0{,}2$ et l'acier avec $\sigma_R = 1\,000$ MN/m², en effectuant une interpolation linéaire, on trouve le coefficient effectif de concentration de contraintes $\alpha_{eff} = 1{,}7$. Pour un polissage soigneux $\varepsilon_s = 1$.

La contrainte admissible est :

$$[\sigma_{-1p}] = \frac{\sigma_{-1p}}{[n]\,\alpha_{eff}} = \frac{250}{1{,}8 \cdot 1{,}7} \approx 82 \text{ MN/m}^2.$$

L'aire minimale de la section de la barre :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \pi \cdot 4 \approx 12{,}6 \text{ cm}^2.$$

La force axiale variable maximale :

$$P_{max} = [\sigma_{-1p}]\,F = 82 \cdot 10^6 \cdot 12{,}6 \cdot 10^{-4} = 103\,000 \text{ N} = 103 \text{ kN}.$$

Exemple 142. Un arbre d'acier au carbone, $\sigma_R = 60$ kgf/mm², de section circulaire de diamètre $d = 50$ mm et à surface soigneusement polie, est traversé de part en part par un trou latéral circulaire

de diamètre $a = 10$ mm et est soumis à une torsion alternative à cycle symétrique avec max $M_t = -\min M_t = 90$ kgf·m (fig. 250).

Calculer le coefficient de sécurité de l'arbre.

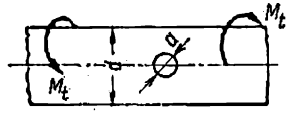


Fig. 250

S o l u t i o n. On prend, d'une manière approchée, $\sigma_{-1} = 0{,}4\sigma_R$ et $\tau_{-1} = 0{,}5\sigma_{-1} = 0{,}2 \cdot 60 = 12$ kgf/mm^2.

D'après la courbe fig. 5 de l'appendice 5, pour l'acier ayant $\sigma_R = 60$ kgf/mm^2, on établit le coefficient effectif de concentration de contraintes, compte tenu des dimensions absolues de l'arbre, $\alpha_{eff} = 1{,}77$.

Le module de résistance en torsion d'une section circulaire diminuée d'une ouverture, pour un rapport $\frac{a}{d} = 0{,}2$, selon les données des ouvrages de référence, est :

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} 0{,}84 \approx 20{,}6 \text{ cm}^3.$$

Sous l'action du moment max $M_t = 90$ kgf·m :

$$\tau_{max} = \frac{\max M_t}{W_t} = \frac{90 \cdot 10^2}{20{,}6} \approx 437 \text{ kgf/cm}^2.$$

Le coefficient de sécurité cherché est :

$$n = \frac{\tau_{-1}}{\alpha_{eff} \tau_{max}} = \frac{12 \cdot 10^2}{1{,}77 \cdot 437} \approx 1{,}55.$$

Exemple 143. Déterminer la contrainte admissible en flexion alternative, quand le caractéristique du cycle $r = -0{,}6$ pour une pièce en acier de construction allié, ayant $\sigma_R = 100$ kgf/mm^2 et $\sigma_m = 80$ kgf/mm^2, et pour un coefficient de sécurité $[n] = 2$. La pièce de section circulaire de diamètre $d = 40$ mm a un concentrateur dont le coefficient théorique de concentration de contraintes $\alpha_\sigma = 1{,}6$. Le coefficient de dureté, dû à l'écrouissage superficiel, $\beta = 1{,}4$.

S o l u t i o n. On prend $\sigma_{-1} = 0{,}4$, $\sigma_R = 0{,}4 \cdot 100 = 40$ kgf/cm^2. En admettant que le coefficient de sensibilité du matériau $q = 0{,}8$, d'après la formule (256), on calcule le coefficient effectif de concentration de contraintes :

$$\alpha_{eff} = 1 + q(\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0{,}8(1{,}6 - 1) = 1{,}48.$$

Le coefficient d'échelle ε_E est déterminé à l'aide de la courbe *5* sur la fig. 2 de l'appendice 5 pour l'acier allié de concentration de contraintes modérée, c'est-à-dire $\varepsilon_E \approx 0{,}65$.

La contrainte admissible pour une charge constante est :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{éc}}{[n]} = \frac{80}{2} = 40 \text{ kgf/mm}^2.$$

Le coefficient d'influence de divers facteurs sur l'endurance pour un cycle symétrique, selon la formule (259), est :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_E \beta \varepsilon_s}{\alpha_{eff}} \approx \frac{0{,}65 \cdot 1{,}4 \cdot 1}{1{,}48} \approx 0{,}615.$$

D'après la formule (262), on calcule la contrainte admissible pour un cycle symétrique :

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\varepsilon \sigma_{-1}}{[n]} \approx \frac{0{,}615 \cdot 40}{2} = 12{,}3 \text{ kgf/mm}^2.$$

D'après la formule (265), la contrainte admissible pour un cycle asymétrique avec un coefficient d'asymétrie $r = -0{,}6$ est égale :

$$[\sigma_{-0,6}] = \frac{2[\sigma][\sigma_{-1}]}{(1-r)[\sigma] + (1+r)[\sigma_{-1}]\frac{\sigma_{éc}}{\sigma_R}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 40 \cdot 12{,}3}{(1+0{,}6)\,40 + (1-0{,}6)\,12{,}3 \cdot 0{,}8} \approx 14{,}5 \text{ kgf/mm}^2.$$

Exemple 144. Calculer la résistance d'un arbre à gradins de section circulaire de diamètres $D = 60$ mm et $d = 30$ mm (fig. 251),

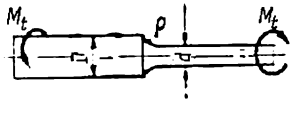


Fig. 251

en acier au carbone de marque 45 ayant $\sigma_R = 70$ kgf/mm², $\tau_{éc} = 22$ kgf/mm², $\tau_{-1} = 16$ kgf/mm², pour un coefficient de sécurité $[n] = 1{,}6$. Le rapport $\frac{\rho}{d} = 0{,}1$ et le coefficient de dureté obtenu

par un soufflage à plomb $\beta = 1{,}1$. L'arbre est soumis à une torsion variable avec $\max M_t = 48$ kgf·m et $\min M_t = -24$ kgf·m.

Solution. La contrainte de cisaillement admissible pour une torsion constante est:

$$[\tau] = \frac{\tau_{éc}}{[n]} = \frac{22}{1{,}6} \approx 13{,}8 \text{ kgf/mm}^2.$$

A l'aide de la courbe fig. 6 de l'appendice 5 et d'une interpolation linéaire, quand $\frac{\rho}{d} = 0{,}1$ pour un acier ayant $\sigma_R = 70$ kgf/mm^2, on calcule le coefficient effectif de concentration de contraintes $\alpha_{eff}^{\tau} \approx 1{,}28$.

Le coefficient d'influence sur l'endurance de tous les facteurs est:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha_{eff}^{\tau}} \approx \frac{1{,}1}{1{,}28} \approx 0{,}86.$$

La contrainte admissible pour un cycle symétrique:

$$[\tau_{-1}] = \frac{\varepsilon\tau_{-1}}{[n]} \approx \frac{0{,}86 \cdot 16}{1{,}6} = 8{,}6 \text{ kgf/mm}^2.$$

Le caractéristique du cycle donné est:

$$r = \frac{\min M_t}{\max M_t} = -\frac{24}{48} = -0{,}5.$$

La contrainte admissible pour $r = -0{,}5$, selon la formule (268), sera:

$$[\tau_{-0,5}] = \frac{2[\tau][\tau_{-1}]}{(1-r)[\tau] + (1+r)[\tau_{-1}]} \approx \frac{2 \cdot 13{,}8 \cdot 8{,}6}{(1+0{,}5)\,13{,}8 + (1-0{,}5) \cdot 8{,}6} \approx$$

$$\approx 9{,}5 \text{ kgf/mm}^2 \approx 950 \text{ kgf/cm}^2.$$

La contrainte maximale, due au moment $\max M_t$, est:

$$\tau_{max} = \frac{\max M_t}{W_p} = \frac{48 \cdot 10^2}{\frac{\pi \cdot 3^3}{16}} \approx 906 \text{ kgf/cm}^2.$$

Donc, la résistance de l'arbre est assurée.

§ 8. Calcul de résistance lorsque l'état de contraintes est composé

Considérons seulement l'état de contraintes plan pour un matériau plastique indiqué fig. 252.

On écrit la condition de résistance selon la troisième ou la quatrième hypothèse de résistance, sous la forme elliptique suivante:

$$\frac{\sigma_{max}^2}{[\sigma_r]^2}+\frac{\tau_{max}^2}{[\tau_r]^2}\leqslant 1. \tag{269}$$

Dans cette formule $\sigma_{max}=\sigma_m+\sigma_a$; $\tau_{max}=\tau_m+\tau_a$, et $[\sigma_r]$ et $[\tau_r]$ sont les contraintes normale et tangentielle admissibles dont les valeurs sont données par les formules (265) et (268) suivant les caractéristiques des cycles de variation des contraintes normales et tangentielles.

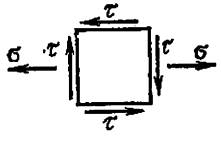


Fig. 252

Le coefficient de sécurité globale n de la pièce, soumise à l'action simultanée de σ et τ variables, a pour expression:

$$n=\frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}, \tag{270}$$

où n_σ et n_τ sont les coefficients de sécurité partiels de la pièce, soumise seulement aux σ variables et seulement aux τ variables respectivement. Ces coefficients de sécurité partiels sont déterminés par les formules (263) ou (267).

Exemple 145. Un arbre en acier (Ac 5) est soumis à l'action variable périodique et synchrone des moments fléchissants $M_{max}=$ $=400$ N·m, $M_{min}=-160$ N·m, et des moments de torsion max $M_t=640$ N·m, min $M_t=320$ N·m. L'arbre est à section variable à gradins de diamètres $D=50$ mm et $d=40$ mm; le rayon du congé de raccordement $\rho=0{,}25$ cm. Pour l'acier Ac 5: $\sigma_R=$ $=540$ MN/m², $\sigma_{éc}=280$ MN/m², $\tau_R=350$ MN/m², $\tau_{éc}=$ $=180$ MN/m², $\sigma_{-1}=240$ MN/m², $\tau_{-1}=140$ MN/m².

Calculer le coefficient de sécurité n de l'arbre.

Solution. A l'aide d'une interpolation linéaire et des courbes fig. 6 et 7 de l'appendice 5, on calcule les coefficients de concentration de contraintes pour $\frac{\rho}{d}=\frac{0{,}25}{4}=0{,}0625$ et $\sigma_R=540$ MN/m²:

$$\alpha_{eff_0}^{\sigma}\approx 1{,}81 \quad \text{et} \quad \alpha_{eff_0}^{\tau}\approx 1{,}42.$$

Puisque dans le cas envisagé $\frac{D}{d}=\frac{5}{4}=1{,}25<2$, il est nécessaire de corriger les valeurs de $\alpha_{eff_0}^{\sigma}$ et $\alpha_{eff_0}^{\tau}$.

Les valeurs des coefficients de correction $\xi_\sigma = 0{,}83$ et $\xi_\tau = 0{,}79$ sont déterminées d'après les courbes fig. 8 de l'appendice 5.

Les valeurs définitives de $\alpha^\sigma_{eff_0}$ et $\alpha^\tau_{eff_0}$ sont déterminées à l'aide de la formule indiquée fig. 8 de l'appendice 5:

$$\alpha^\sigma_{eff} = 1 + \xi_\sigma (\alpha^\sigma_{eff_0} - 1) \approx 1 + 0{,}83\,(1{,}81 - 1) \approx 1{,}67$$

et

$$\alpha^\tau_{eff} = 1 + \xi_\tau (\alpha^\tau_{eff_0} - 1) \approx 1 + 0{,}79\,(1{,}42 - 1) \approx 1{,}33.$$

A l'aide de la courbe 3, représentée fig. 3 de l'appendice 5, on calcule pour $\sigma_R = 540$ MN/m² le coefficient de sensibilité superficielle $\varepsilon_s = 0{,}88$.

Les coefficients globaux d'influence sur l'endurance de tous les facteurs sont égaux à

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon_s}{\alpha^\sigma_{eff}} = \frac{0{,}88}{1{,}67} \approx 0{,}53 \quad \text{et} \quad \varepsilon_\tau = \frac{\varepsilon_s}{\alpha^\tau_{eff}} = \frac{0{,}88}{1{,}33} \approx 0{,}66.$$

Les valeurs maximales et minimales des contraintes normales et tangentielles en flexion et torsion variables sont:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{M_{max}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{400}{6{,}28 \cdot 10^{-6}} = 64 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 64 \text{ MN/m}^2;$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{min}}{W} = \frac{-160}{6{,}28 \cdot 10^{-6}} = -25{,}5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = -25{,}5 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_{max} = \frac{\max M_t}{W_p} = \frac{\max M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{640}{12{,}56 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 51 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 51 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_{min} = \frac{\min M_t}{W_p} = \frac{320}{12{,}56 \cdot 10^{-6}} = 25{,}5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 25{,}5 \text{ MN/m}^2.$$

Les contraintes moyennes et les amplitudes des cycles des contraintes normales et tangentielles sont:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{64 - 25{,}5}{2} \approx 19 \text{ MN/m}^2;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{64 + 25{,}5}{2} \approx 44{,}7 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{51 + 25{,}5}{2} \approx 38{,}2 \text{ MN/m}^2;$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{51 - 25{,}5}{2} \approx 12{,}7 \text{ MN/m}^2.$$

D'après la formule (263), on trouve les coefficients de sécurité par rapport aux contraintes normales et tangentielles:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_R}\sigma_m + \frac{\sigma_a}{\varepsilon_\sigma}} = \frac{240}{\frac{240}{540} \cdot 19 + \frac{44{,}7}{0{,}53}} \approx 2{,}59;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\tau_{-1}}{\tau_R}\tau_m + \frac{\tau_a}{\varepsilon_\tau}} = \frac{140}{\frac{140}{350} \cdot 38{,}2 + \frac{12{,}7}{0{,}66}} \approx 4{,}06.$$

D'après la formule (270), on établit la valeur du coefficient de sécurité global:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2{,}59 \cdot 4{,}06}{\sqrt{2{,}59^2 + 4{,}06^2}} \approx 2{,}18.$$

Exemple 146. La pièce représentée fig. 253 est en acier Ac 6 ayant $\sigma_R = 60$ kgf/mm^2, $\sigma_{éc} = 32$ kgf/mm^2, $\tau_{éc} = 22$ kgf/mm^2, $\sigma_{-1} = 25$ kgf/mm^2 et $\tau_{-1} = 15$ kgf/mm^2; $D = 80$ mm, $d = 40$ mm, $\rho = 0{,}2$ cm, $l = 40$ cm, $a = 10$ cm, $P_0 = \text{const} = 16$ kgf; la force P varie suivant un cycle symétrique depuis P_{max} jusqu'à $P_{min} = -P_{max}$.

Calculer la valeur admissible de P_{max}, si le coefficient de sécurité de la pièce $[n] = 2$. La surface de la pièce est grossièrement travaillée.

S o l u t i o n. A partir des courbes fig. 6 et 7 de l'appendice 5 pour:

$$\frac{\rho}{d} = \frac{0{,}2}{4} = 0{,}05, \quad \frac{D}{d} = 2 \quad \text{pour} \quad \sigma_R = 60 \text{ kgf/mm}^2,$$

on détermine les coefficients de concentration de contraintes effectifs dans le congé de raccordement :

$$\alpha_{\text{eff}}^{\sigma} \approx 2{,}07, \qquad \alpha_{\text{eff}}^{\tau} \approx 1{,}56.$$

D'après la courbe *4* (fig. 3 de l'appendice 5) pour $\sigma_R = 60$ kgf/mm^2, le coefficient de sensibilité superficielle $\varepsilon_s \approx 0{,}8$.

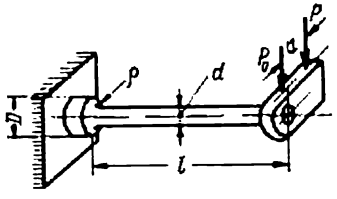


Fig. 253

Les coefficients globaux d'influence sur l'endurance de tous les facteurs sont :

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon_s}{\alpha_{\text{eff}}^{\sigma}} = \frac{0{,}8}{2{,}07} \approx 0{,}386 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\tau} = \frac{0{,}8}{1{,}56} \approx 0{,}512.$$

Les valeurs maximales et minimales des contraintes normales dans le congé de raccordement dues à la flexion variable suivant un cycle asymétrique sont :

$$\sigma_{\max} = \frac{P_0 + P_{\max}}{W} l \approx \frac{16 + P_{\max}}{0{,}1 \cdot 64} 40 = 100 + 62{,}5P_{\max} \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\sigma_{\min} = \frac{P_0 - P_{\max}}{W} l \approx \frac{16 - P_{\max}}{0{,}1 \cdot 64} 40 = 100 - 62{,}5P_{\max} \text{ kgf/cm}^2.$$

Les valeurs maximales et minimales des contraintes de cisaillement dans le congé de raccordement dues à la torsion variable suivant un cycle symétrique sont :

$$\tau_{\max} = \frac{P_{\max}}{W_p} a \approx \frac{P_{\max}}{0{,}2 \cdot 64} 10 = 0{,}732P_{\max} \text{ kgf/cm}^2,$$

$$\tau_{\min} = -\frac{P_{\max}}{W_p} a \approx -0{,}732P_{\max} \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes moyennes et les amplitudes des cycles des contraintes normales et tangentielles sont égales à :

$$\sigma_{moy} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 100 \text{ kgf/cm}^2; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} =$$

$$= 62{,}5P_{max} \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\tau_{moy} = 0; \quad \tau_a = 0{,}732P_{max} \text{ kgf/cm}^2.$$

D'après la formule (267) on trouve les coefficients de sécurité par rapport aux contraintes normales et tangentielles :

$$n_\sigma = \frac{25}{\frac{25}{32} \cdot 1 + \frac{0{,}625}{0{,}386} P_{max}} = \frac{25}{0{,}732 + 1{,}62P_{max}};$$

$$n_\tau = \frac{\varepsilon_\tau \tau_{-1}}{\tau_a} = \frac{0{,}512 \cdot 15}{0{,}0732P_{max}} \approx \frac{105}{P_{max}}.$$

Puisque, d'après la formule (270), le coefficient de sécurité global est :

$$n = 2 = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{25 \cdot 105}{P_{max}(0{,}732 + 1{,}62P_{max})} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\frac{25^2}{(0{,}732 + 1{,}62P_{max})^2} + \frac{105^2}{P_{max}^2}}} =$$

$$= \frac{25 \cdot 105}{\sqrt{25^2 P_{max}^2 + 105^2 (0{,}732 + 1{,}62P_{max})^2}},$$

alors

$$25^2 P_{max}^2 + 105^2 (0{,}732 + 1{,}62P_{max})^2 = \frac{25^2 \cdot 105^2}{4}$$

ou

$$P_{max}^2 + 0{,}885P_{max} - 58{,}1 = 0.$$

D'où l'on tire la valeur maximale cherchée de la force admissible :

$$P_{max} \approx -0{,}442 \pm \sqrt{0{,}442^2 + 58{,}1} \approx -0{,}442 \pm 7{,}63 \text{kgf}.$$

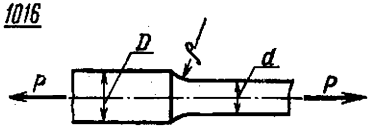
Puisque une seule racine de l'équation vérifie les conditions du problème, on a $P_{max} \approx 7{,}2$ kgf.

Problème 1015. Calculer à l'aide des limites inférieures des relations empiriques la valeur approchée de la limite d'endurance en torsion variable suivant un cycle symétrique, des pièces en acier ayant un concentrateur, si $\sigma_R = 960$ MN/m², $\alpha_\tau = 1{,}6$, $q = 0{,}9$.

Problème 1016. Une barre d'acier à gradins à section circulaire de diamètres $d = 36$ mm et $D = 72$ mm est soumise à une traction-compression variable avec $P_{max} = -P_{min} = 5$ t.

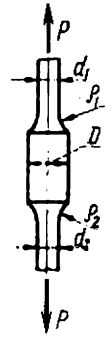
Calculer le rayon minimal admissible ρ du congé de raccordement, si l'on connaît $\sigma_R = 40$ kgf/mm², $\sigma_{-1p} = 12$ kgf/mm² et si l'on prend un coefficient de sécurité $[n] = 2$.

1016



Problème 1017. Une barre à gradins de section circulaire de diamètres $D = 60$ mm, $d_1 = 30$ mm et $d_2 = 32$ mm, est fabriquée en acier 20X, pour lequel $\sigma_R = 80$ kgf/mm² et $\sigma_{-1p} = 24$ kgf/mm². Les congés de raccordement $\frac{\rho_1}{d_1} = 0{,}3$ et $\frac{\rho_2}{d_2} = 0{,}1$. La surface de la barre est soigneusement polie.

1017



Calculer le coefficient de sécurité n de la barre dans l'eau douce sous l'action d'une force axiale variable $P_{max} = -P_{min} = 3$ t suivant un cycle symétrique.

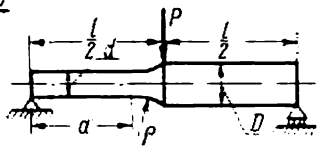
Problème 1018. Calculer la force fléchissante maximale P_{max} pour laquelle l'arbre tournant en acier à section variable à gradins travaille suivant le schéma indiqué sur la figure, avec un coefficient de sécurité $[n] = 1{,}8$.

On prendra: $\sigma_R = 1\,200$ MN/m², $\sigma_{-1} = 360$ MN/m², $D = 70$ mm, $d = 50$ mm, $\frac{\rho}{d} = 0{,}15$, $l = 60$ cm, $a = 40$ cm. La surface de l'arbre est rectifiée.

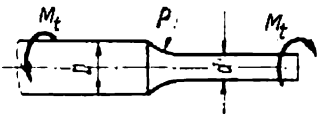
Problème 1019. Un arbre à gradins de diamètres $D = 60$ mm, $d = 50$ mm, $\frac{\rho}{d} = 0{,}05$ doit travailler dans de l'eau douce en torsion

alternée suivant un cycle symétrique avec un coefficient de sécurité $[n] = 1{,}5$. La surface de l'arbre est rectifiée. Etablir lequel des deux arbres sera le plus résistant : l'arbre en acier Ac 5 pour lequel $\sigma_R = 52$ kgf/mm^2 et $\tau_{-1} = 14$ kgf/mm^2 ou l'arbre en acier 40X pour lequel $\sigma_R = 100$ kgf/mm^2 et $\tau_{-1} = 22$ kgf/mm^2.

1018



1019



Problème 1020. Etant donnés un acier de marque 30XM et les valeurs expérimentales de $\sigma_R = 90$ kgf/mm^2, $\sigma_{-1p} = 36$ kgf/mm^2 et des amplitudes limites σ_a^r pour des contraintes moyennes données σ_m^r :

σ_m^r kgf/mm^2	20	40	60 ;
σ_a^r kgf/mm^2	32	26	16.

Calculer $\sigma_{\pm 0{,}6}$.

Problème 1021. Calculer $\sigma_{-0{,}5}$ pour l'acier, qui a pour équation approchée de la courbe des amplitudes limites (pour les cycles considérés $\sigma_m > 0$) : $\sigma_a^r = 20 \left[1 - \left(\frac{\sigma_m^r}{40}\right)^2\right]$.

Problème 1022. Calculer le coefficient de sécurité d'une pièce en acier, travaillant avec des contraintes variables de traction-compression, si $\sigma_R = 90$ kgf/mm^2, $\sigma_{éc} = 70$ kgf/mm^2, $\sigma_{-1p} = 30$ kgf/mm^2, $\sigma_{max} = 16$ kgf/mm^2, $\sigma_{min} = -6$ kgf/mm^2, $\alpha_{eff} = 1{,}5$; $\varepsilon_E = 0{,}7$; $\varepsilon_s = 0{,}9$; $\beta = 1{,}3$.

Problème 1023. Une pièce en acier doit travailler en flexion alternée avec une amplitude de contraintes $\sigma_a = 200$ MN/m^2 et un coefficient de sécurité $[n] = 2$. Quel doit être le coefficient d'asymétrie du cycle r, si $\sigma_R = 1\,100$ MN/m^2, $\sigma_{éc} = 900$ MN/m^2, $\sigma_{-1} = 480$ MN/m^2, $\alpha_\sigma = 1{,}2$; $q = 0{,}9$, $\varepsilon_E = 0{,}8$, $\varepsilon_s = 1$; $\beta = 1{,}4$.

Problème 1024. Calculer la valeur minimale de la contrainte admissible pour une pièce en acier soumise à l'action d'une traction-compression variable avec une caractéristique du cycle $r = -0{,}4$ et un coefficient de sécurité $[n] = 1{,}4$.

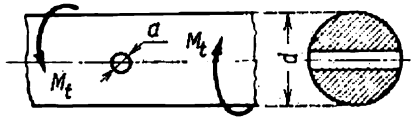
L'acier est au carbone avec $\sigma_R = 50$ kgf/mm^2 et $\sigma_{éc} = 24$ kgf/mm^2. La pièce est de section circulaire de diamètre $d = 30$ mm et a un

concentrateur pour lequel $\alpha_\sigma = 2$. Le coefficient de dureté, dû à l'écrouissage superficiel, $\beta = 1{,}2$.

Problème 1025 *. Un arbre en acier de section circulaire de diamètre $d = 40$ mm est traversé de part en part par une ouverture circulaire de diamètre $a = 6$ mm et doit travailler suivant un cycle pulsatoire ($r = 0$) avec un coefficient de sécurité $[n] = 1{,}8$.

Calculer la valeur du moment de torsion variable maximal $\max M_t$, si l'on connaît que l'arbre est fabriqué en acier de marque 30ХГСА pour lequel $\sigma_R = 110$ kgf/mm², $\tau_{éc} = 51$ kgf/mm² et $\tau_{-1} = 23$ kgf/mm².

1025

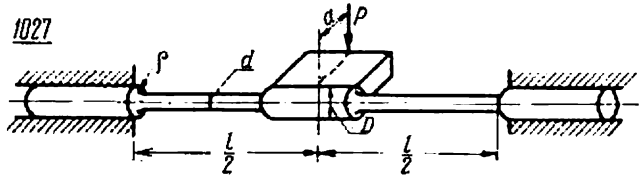


Problème 1026 *. Calculer le coefficient de sécurité n d'une pièce soumise à une traction et à une torsion variables, si l'on sait qu'elle est fabriquée en acier de marque 45: $\sigma_R = 60$ kgf/mm²; $\sigma_{éc} = 32$ kgf/mm²; $\sigma_{-1p} = 20$ kgf/mm²; $\tau_{éc} = 22$ kgf/mm²; $\tau_{-1} = 16$ kgf/mm²; $\alpha^\sigma_{eff} = 1{,}7$; $\alpha^\tau_{eff} = 1{,}4$; $\varepsilon_E = 0{,}7$; $\varepsilon_s = 1$; $\beta = 1$; $\sigma_{max} = 1\,000$ kgf/cm²; $\sigma_{min} = 200$ kgf/cm²; $\tau_{max} = 400$ kgf/cm²; $\tau_{min} = -1\,000$ kgf/cm².

Problème 1027 *. Une barre cylindrique en acier de section circulaire de diamètre $d = 30$ mm est encastrée à ses extrémités. Sur la partie saillante de la barre agit une force P variant suivant un cycle symétrique.

Calculer la valeur de la force maximale P_{max}, si l'on connaît la marque de l'acier 40ХН, pour lequel $\sigma_R = 900$ MN/m²; $\sigma_{-1} = 400$ MN/m²; $\tau_{-1} = 240$ MN/m². Le diamètre de la barre dans

1027



* Résoudre les problèmes notés par un astérisque à l'aide du diagramme rectifié de Soderberg.

sa partie médiane $D = 60$ mm ; $\frac{\rho}{d} = 0{,}1$; $l = 32$ cm ; $a = 10$ cm ; $\beta = 1{,}2$; $[n] = 1{,}6$.

Problème 1028*. Un arbre en acier de section circulaire variable à gradins de diamètres $D = 60$ mm et $d = 50$ mm et de rayon du congé de raccordement $\rho = 5$ mm est soumise à une flexion et à une torsion variables.

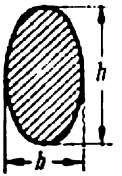
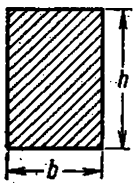
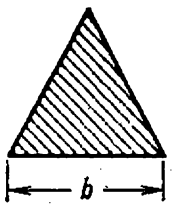
Déterminer le coefficient de sécurité n de l'arbre, si dans la section dangereuse de transition, les moments dus à la flexion sont $M_{max} = 3\text{kN} \cdot \text{m}$, $M_{min} = 1{,}5\text{kN} \cdot \text{m}$, ceux dus à la torsion sont $\max M_t = 2\text{kN} \cdot \text{m}$, $\min M_t = -0{,}5\text{kN} \cdot \text{m}$.

L'arbre est fabriqué en acier de marque 40XH, pour lequel $\sigma_R = 900$ MN/m^2 ; $\sigma_{éc} = 750$ MN/m^2 ; $\sigma_{-1} = 400$ MN/m^2 ; $\tau_{éc} = 390$ MN/m^2 ; $\tau_{-1} = 240$ MN/m^2.

L'effet durcissant des facteurs technologiques est évalué par le coefficient $\beta = 1{,}3$.

APPENDICES

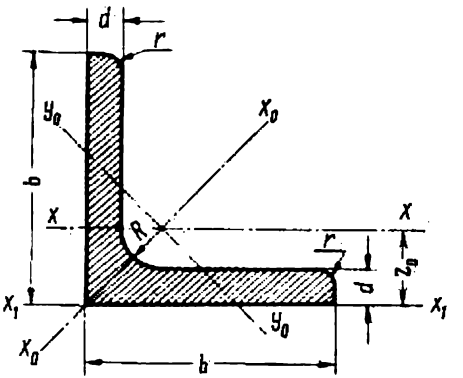
Données pour le calcul de torsion des sections non circulaires

Forme de la section	Moment d'inertie de la section en torsion I_t, cm^4	Module de résistance en torsion W_t, cm^3	Les points de contraintes tangentielles maximales $\tau_{max} = M_t/W_t$	Remarques
	$I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{m^3}{m^2+1} b^4 = \frac{16F^4}{\pi^3 bh(b^2+h^2)}$	$W_t = \frac{\pi b^3}{16} m = \frac{\pi b^2 h}{16}$	A l'extrémité du petit demi-axe $\tau_{max} = M_t/W_t$ A l'extrémité du grand demi-axe $\tau = \frac{\tau_{max}}{m}$	$\frac{h}{b} = m > 1$ F — l'aire de la section
	$I_t = \alpha b^4$	$W_t = \beta b^3$	Au milieu des longs côtés $\tau_{max} = M_t/W_t$ Au milieu des petits côtés $\tau = \gamma \tau_{max}$ Aux sommets les contraintes sont nulles	Valeurs des coefficients α, β et γ selon la table:
Triangle équilatéral 	$I_t = \frac{b^4}{46{,}19} \approx 0{,}02165\, b^4$	$W_t = 0{,}05\, b^3$	$\tau_{max} = \frac{20\, M_t}{b^3}$ (aumilieu des côtés) Aux sommets les contraintes tangentielles sont nulles	

$m = \frac{h}{b}$	α	β	γ
1,0	0,140	0,208	1,0
1,5	0,294	0,346	0,859
2,0	0,457	0,493	0,795
3,0	0,790	0,801	0,753
4,0	1,123	1,127	0,745

Appendice 2
Table 1

ASSORTIMENT D'ACIER LAMINÉ
Cornière isocèle d'acier laminé. GOST 8509-57



Numéro du profil	Dimensions, mm				Aire du profil, cm²	Poids de 1 m, kgf	Grandeurs de référence pour les axes							z_0, cm
							$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	
	b	d	R	r			I_x, cm⁴	i_x, cm	$I_{x_0\max}$, cm⁴	$i_{x_0\max}$, cm	$I_{y_0\min}$, cm⁴	$i_{y_0\min}$, cm	I_{x_1}, cm⁴	
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4			1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76

2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	5	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4			3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	6	2	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4			4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57

Suite

Numéro du profil	Dimensions, mm				Aire du profil, cm²	Poids de 1 m, kgf	Grandeurs de référence pour les axes							z_0, cm
							$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	
	b	d	R	r			I_x, cm⁴	i_x, cm	$I_{x_0\max}$, cm⁴	$i_{x_0\max}$, cm	$I_{y_0\min}$, cm⁴	$i_{y_0\min}$, cm	I_{x_1}, cm⁴	
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9			12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18

8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7			10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8			12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00

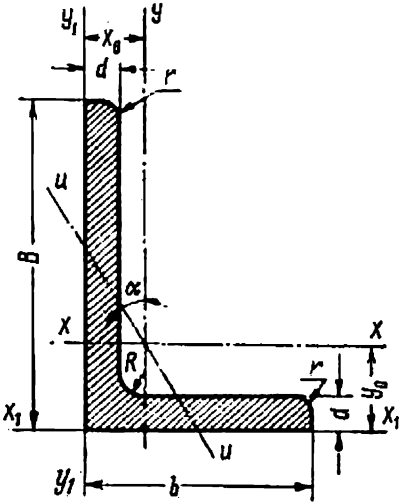
Suite

Numéro du profil	Dimensions, mm				Aire du profil, cm²	Poids de 1 m, kgf	Grandeurs de référence pour les axes							z_0, cm
							$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	
	b	d	R	r			I_x, cm⁴	i_x, cm	$I_{x_0\,max}$, cm⁴	$i_{x_0\,max}$, cm	$I_{y_0\,min}$, cm⁴	$i_{y_0\,min}$, cm	I_{x_1}, cm	
12,5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9			22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10			24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12			28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14			33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16			37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1 051	3,68
14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1 097	3,90
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774	4,96	1 229	6,25	319	3,19	1 356	4,30
		11			34,4	27,0	844	4,95	1 341	6,24	348	3,18	1 494	4,35
		12			37,4	29,4	913	4,94	1 450	6,23	376	3,17	1 633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1 662	6,20	431	3,16	1 911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1 866	6,17	485	3,14	2 191	4,55

		18			54,8	43,0	1299	4,87	2 061	6,13	537	3,13	2 472	4,63
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2 248	6,10	589	3,12	2 756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	2 128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	2 324	4,89
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4 560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5 494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			115,5	87,6	4020	6,00	6 351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814	6,83	4 470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	53,8	3175	6,81	5 045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	24	8	78,4	61,5	4717	7,76	7 492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	68,9	5247	7,73	8 337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20			97,0	76,1	5765	7,71	9 160	9,72	2370	4,94	10 401	6,91
		22			106,1	83,3	6270	7,69	9 961	9,69	2579	4,93	11 464	7,00
		25			119,7	94,0	7006	7,65	11 125	9,64	2887	4,91	13 064	7,11
		28			133,1	104,5	7717	7,61	12 244	9,59	3190	4,89	14 674	7,23
		30			142,0	111,4	8177	7,59	12 965	9,56	3389	4,89	15 753	7,31

Table 2

Cornière non isocèle d'acier laminé. GOST 8510-57



Numéro du profil	Dimensions, mm					Aire du profil, cm²	Poids de 1 m, kgf	Grandeurs de référence pour les axes										Pente de l'axe tg α
								x — x		y — y		x1 — x1		y1 — y1		u — u		
	B	b	d	R	r			I_x, cm⁴	i_x, cm	I_y, cm⁴	i_y, cm	I_{x1}, cm⁴	Distance du centre de gravité y_0, cm	I_{y1} min, cm⁴	Distance du centre de gravité x_0, cm	I_u min, cm⁴	i_u min, cm	
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392

3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4			2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4			2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
			4			3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	2,0	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
			4			3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5			4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5			4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6			5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5			5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406

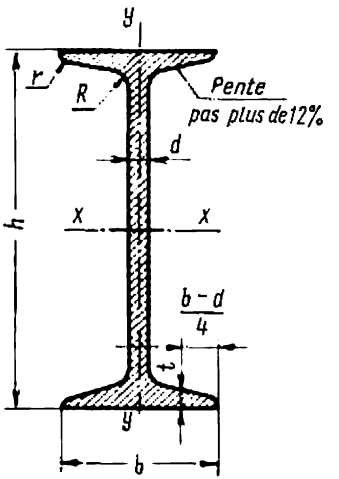
Suite

Numéro du profil	Dimensions, mm					Aire du profil, cm²	Poids de 1 m, kgf	Grandeurs de référence pour les axes										Pente de l'axe tg α
								x — x		y — y		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		u — u		
	B	b	d	R	r			I_x, cm⁴	i_x, cm	I_y, cm⁴	i_y, cm	I_{x_1}, cm⁴	Distance du centre de gravité y_0, cm	I_{y_1} min, cm⁴	Distance du centre de gravité x_0, cm	I_u min, cm⁴	i_u min, cm	
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6			7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8			9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6			7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6			8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8			11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7			11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7			12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,6	28,8	1,53	0,402
			8			13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400

12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8			16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10			19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12			23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10			22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10			25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12			30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14			34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12			33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12			37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14			43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,52	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6.	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16			63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18			71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20			78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

Table 3

Poutres en double té d'acier laminé. GOST 8239-56

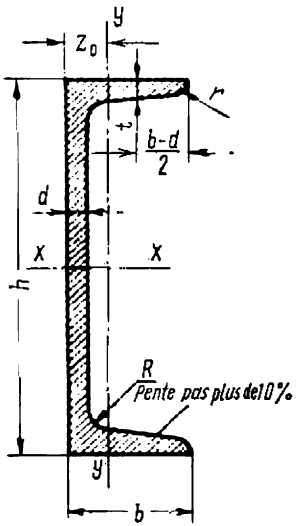


Numéro du profil	Poids de 1 m, kgf	Dimensions, mm						Aire de la section cm²	Grandeurs de référence pour les axes						
									x — x				y — y		
		h	b	d	t	R	r		I_x, cm⁴	W_x, cm³	i_x, cm	S_x, cm³	I_y, cm⁴	W_y, cm³	i_y, cm
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55

16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1 290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1 430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1 840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2 030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2 550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2 790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3 460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3 800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5 010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11	4,5	43,2	5 500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7 780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9 840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15	6	71,4	18 930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	16	7	83,0	27 450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17	7	97,8	39 290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18	7	114	55 150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	20	8	132	75 450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	22	9	153	101 400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	24	10	176	134 600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	24	10	202	152 700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70b	184	700	210	17,5	28,2	24	10	234	175 370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

Table 4

Poutres en U d'acier laminé. GOST 8240-56



Numéro du profil	Poids de 1 m, kgf	Dimensions, mm						Aire de la section, cm²	Grandeurs de référence pour les axes							z_0
									$x-x$				$y-y$			
		h	b	a	t	R	r		I_x, cm⁴	W_x, cm³	i_x, cm	S_x, cm³	I_y, cm⁴	W_y, cm³	i_y, cm	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16

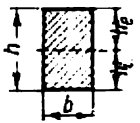
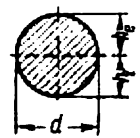
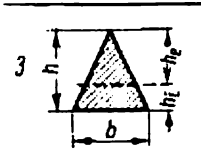
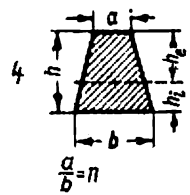
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,8	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2 330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2.67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Appendice 3

Coefficient de flambement par flexion

Elancement λ	Valeurs de φ pour				
	aciers 4,3,2,0C	acier 5	acier CHK	fonte	bois
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Formules pour les modules de résistance pour les fibres extérieures W_e et pour les fibres intérieures W_i, valeurs approchées du déplacement e de l'axe neutre et des coefficients α_e et α_i dans les formules pour les contraintes normales des fibres extérieure et intérieure d'une poutre à courbure initiale pour quelques formes de section droite

Forme de la section	$\frac{W_e}{W_i}$	e	α_e	α_i
1 	$\frac{bh^2}{6}$ $\frac{bh^2}{6}$	$\frac{h^2}{12\rho}$	$\frac{1+\frac{h}{6\rho}}{1+\frac{h}{2\rho}}$	$\frac{1-\frac{h}{6\rho}}{1-\frac{h}{2\rho}}$
2 	$\frac{\pi d^3}{32}$ $\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{d^2}{16\rho}$	$\frac{1+\frac{d}{8\rho}}{1+\frac{d}{2\rho}}$	$\frac{1-\frac{d}{8\rho}}{1-\frac{d}{2\rho}}$
3 	$\frac{bh^2}{24}$ $\frac{bh^2}{12}$	$\frac{h^2}{18\rho}$	$\frac{1+\frac{h}{12\rho}}{1+\frac{2h}{3\rho}}$	$\frac{1-\frac{h}{6\rho}}{1-\frac{1}{3}\frac{h}{\rho}}$
4  $\frac{a}{b}=n$	$\frac{n^2+4n+1}{2n+2}\cdot\frac{bh^2}{12}$ $\frac{n^2+4n+1}{2n+1}\cdot\frac{bh^2}{12}$	$\frac{n^2+4n+1}{(n+1)^2}\cdot\frac{h^2}{18\rho}$	$\frac{1+\frac{n^2+4n+1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{h}{6\rho}}{1+\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{h}{3\rho}}$	$\frac{1-\frac{n^2+4n+1}{(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{h}{6\rho}}{1-\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{h}{3\rho}}$

Données de référence pour les calculs d'endurance

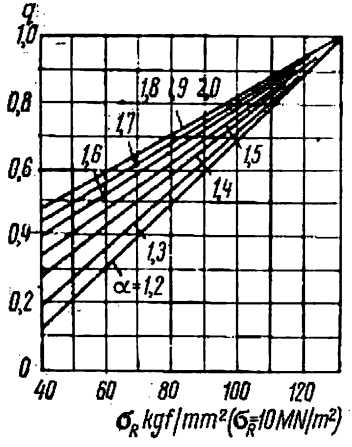


Fig. 1. Graphiques des coefficients de sensibilité aux concentrations de contraintes pour l'acier.

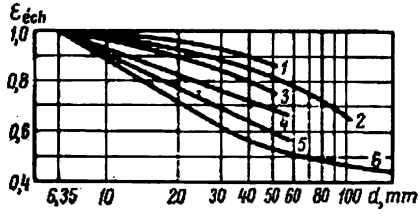


Fig. 2. Graphiques des coefficients d'échelle pour la flexion :
1 — acier au carbone, polissage lisse; *2* — acier au carbone, rectification lisse; *3* — acier allié, polissage lisse; *4* — acier allié, rectification lisse; acier au carbone avec concentration de contraintes; *5* — acier allié avec concentration de contraintes moyenne ($\alpha_{eff}^{\sigma} < 2$); *6* — acier de construction ($\sigma_R < 65$ kgf/mm² ou $\sigma_R < 650$ MN/m²), arbre avec une pièce frettée, fabriquée en acier non fretté; pour $d < 60$ mm — acier allié avec forte concentration de contraintes.

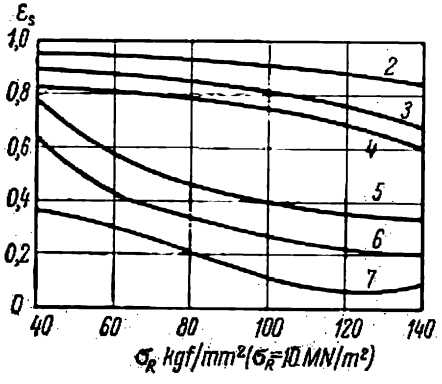


Fig. 3. Graphiques de sensibilité superficielle pour l'acier:

1 — polissage soigné; *2* — polissage grossier; *3* — rectification fine ou rabotage fin; *4* — rectification grossière ou rabotage grossier; *5* — essai dans l'eau douce avec concentration de contraintes; 6 — essai dans l'eau douce sans concentration de contraintes; *7* — essai dans l'eau de mer sans concentration de contraintes.

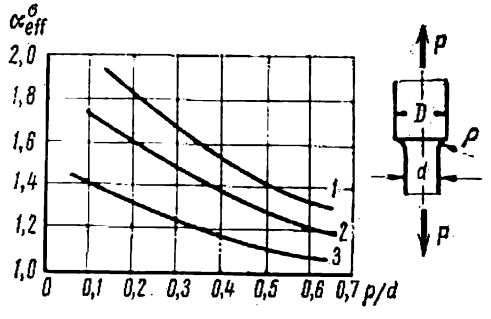


Fig. 4. Graphiques des coefficients effectifs de concentration de contraintes pour les arbres à gradins en traction (compression) avec $\frac{D}{d} = 2$ pour $d = 30 \div 50$ mm:

1 — pour l'acier ayant $\sigma_R = 120$ kgf/mm² ou $\sigma_R = 1200$ MN/m²; *2* — pour l'acier ayant $\sigma_R = 80$ kgf/mm² ou $\sigma_R = 800$ MN/m²; *3* — pour l'acier ayant $\sigma_R = 40$ kgf/mm² ou $\sigma_R = 400$ MN/m².

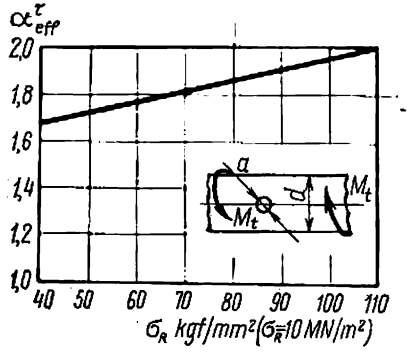


Fig. 5. Graphique du coefficient effectif de concentration de contraintes pour les arbres avec un trou latéral en torsion:

$\frac{a}{d} = 0{,}05 \div 0{,}25$; $\tau = \frac{M_t}{W_{t\,\text{netto}}}$ pour $d = 30 \div 50$ mm.

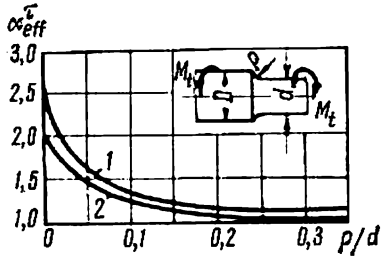


Fig. 6. Graphiques des coefficients effectifs de concentration de contraintes pour les arbres à gradins en torsion avec $\frac{D}{d} = 2$ pour $d = 30 \div 50$ mm;

1 — pour l'acier ayant $\sigma_R = 120$ kgf/mm² (1 200 MN/m²); *2* — pour l'acier ayant $\sigma_R = 50$ kgf/mm² (500 MN/m²).

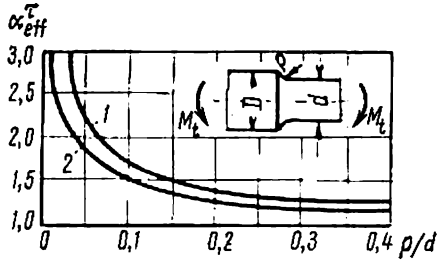


Fig. 7. Graphiques des coefficients effectifs de concentration de contraintes pour les arbres à gradins en flexion avec $\frac{D}{d} = 2$ pour $d = 30 \div 50$ mm:

1 — pour l'acier ayant $\sigma_R = 120$ kgf/mm² (1 200 MN/m²); *2* — pour l'acier ayant $\sigma_R = 50$ kgf/mm² (500 MN/m²).

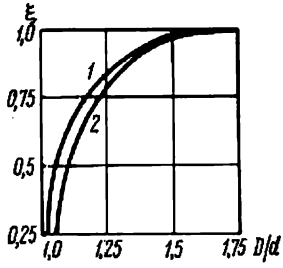


Fig. 8. Graphiques des coefficients correcteurs pour des rapports $\frac{D}{d} < 2$ (voir fig. 6 et 7):

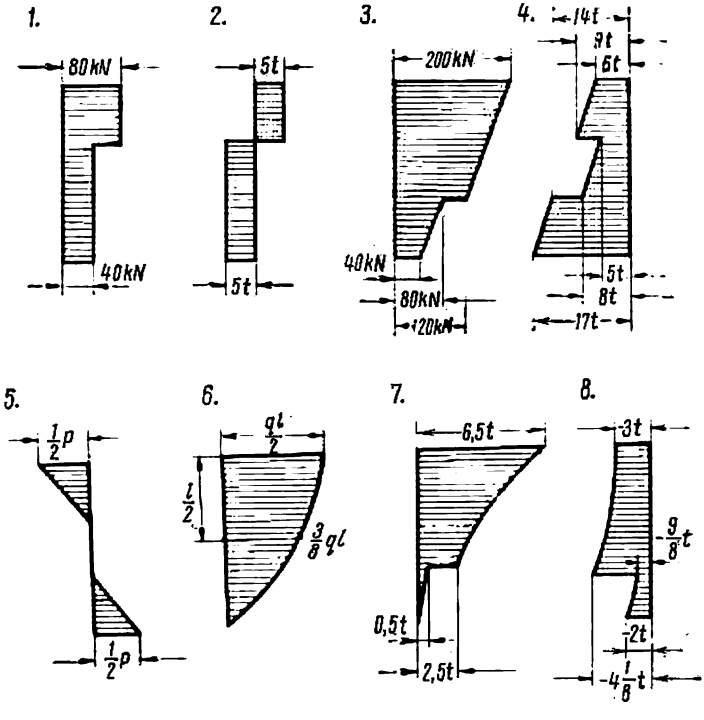
1 — flexion; *2* — torsion

Si $\frac{D}{d} < 2$, α_{eff} doit être déterminé par la formule

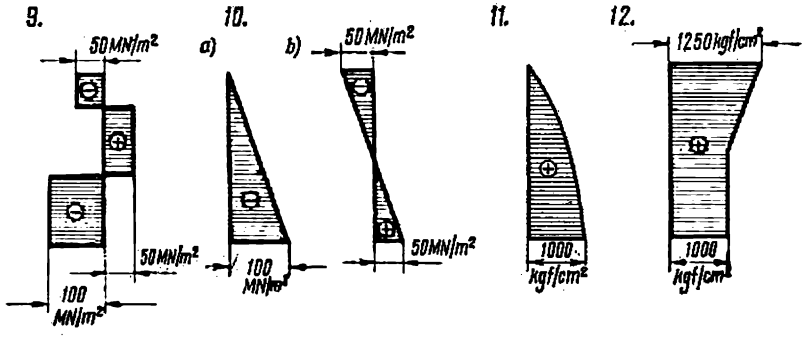
$$\alpha_{eff} = 1 + \xi (\alpha_{eff_0} - 1),$$

où α_{eff_0} est un coefficient dont la valeur est déterminée des graphiques des fig. 6 ou 7.

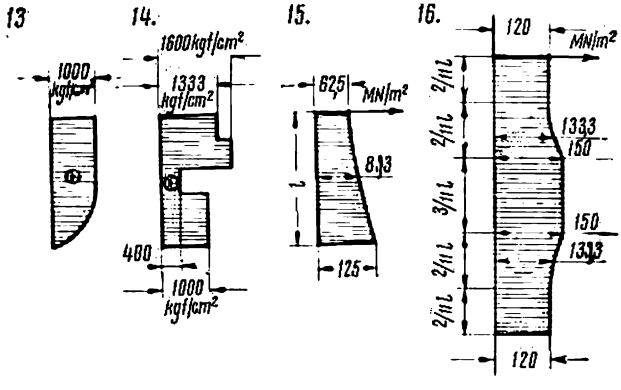
RÉPONSES AUX PROBLÈMES



9. $-0{,}15$ mm; $2{,}75\,J$. 10. a) 0,5 mm; $3{,}33\,J$; b) 0; $0{,}83\,J$.
11. 1 mm; 120 kgf·cm. 12. $\sim 0{,}531$ mm; $\sim 56{,}8$ kgf·cm.



13. $\sim 0{,}833$ mm; $\sim 76{,}7$ kgf·cm 14. $\sim 1{,}067$ mm; 282,7 kgf.cm.
15. $\sim 0{,}87$ mm; $\sim 4{,}35\,J$. 16. $\sim 1{,}36$ mm; $\sim 27{,}2\,J$. 17. $\frac{4\mu}{E}\cdot\frac{P}{\pi d^2}$.



18. $\frac{Ea}{P}\Delta b$. 19. 0,09 mm²; 0,003 mm. 20. $\frac{4}{3}\cdot\frac{1-2\mu}{E}\cdot\frac{P}{\pi d^2}$. 21. $3\,\frac{1-2\mu}{E}\,Pl$
22. $2\,\frac{1-2\mu}{E}\,Pl$. 23. $\frac{2}{3}\,\frac{1-2\mu}{E}\,Pl$. 24. 3 750 kgf.

25. $\delta_y=\frac{Pa}{8EF}(1+3\sqrt{3})$; $\delta_x=\frac{Pa}{8EF}(3-\sqrt{3})$; $\sigma_I=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{P}{F}$; $\sigma_{II}=\frac{P}{2F}$.

26. $\delta_y\approx 1{,}36$ mm; $\delta_x\approx 0{,}53$ mm; ~ 440; ~ 470 kgf/cm².

27. $\frac{(2P+\sqrt{2}\,qa)\,a}{EF}$; $\frac{P+\sqrt{2}\,qa}{\sqrt{2}\,F}$; $\frac{P}{\sqrt{2}\,F}$.

28. $\frac{Pa}{EF\cos^2\beta}(\sin^2\beta+2)$; $\frac{P}{F}\operatorname{tg}\beta$; $\frac{P}{F\cos\beta}$.

29. $\delta_x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{Pa}{EF}$; $\delta_y=\frac{Pa}{2EF}(2+\sqrt{2})$; $\frac{P}{\sqrt{2}\,F}$; $\frac{P}{F}$.

30. $\delta_x=\frac{3}{2}\cdot\frac{Pa}{EF_1}$; $\delta_y=\frac{3Pa}{EF_2}$; $\frac{P}{F_1}$; $\frac{3}{2}\cdot\frac{P}{F_1}$.

31. $\frac{(2P+qa)\,a}{4EF}$; $\frac{2P+qa}{4F}$. 32. $\delta_x=\delta_y=\frac{Pa}{EF}$; $\frac{P}{F}$.

33. $\frac{Pa}{E_2F_2}$; $\frac{P}{2F_2}$. 34. $\frac{10Pa}{E_1F_1}$; $\frac{2P}{F_1}$; $\frac{4P}{F_1}$.

35. $\delta_x\approx 5{,}4$ mm; $\delta_y\approx 1{,}8$ mm; ~ 900; $\sim 1\,800$; $\sim 1\,200$ kgf/cm².
36. 8,5 mm; 1 000; 500 kgf/cm². 37. 3,9 mm; 30; 150 MN/m².
38. $\delta_y=0{,}7$ mm; $\delta_x=0{,}35$ mm; 80; 40; 20 MN/m².
39. $\delta_y=2{,}125$ mm; $\delta_x=0{,}08$ mm; 100; 150; 75 MN/m².

40. $\sim 5{,}6$ mm; ~ 142; 164 MN/m². 41. $\frac{P}{\sqrt{3}\,[\sigma]}$; $\frac{P}{2\sqrt{3}\,[\sigma]}$; $\frac{P}{2\,[\sigma]}$.

42. $\frac{P}{[\sigma]}$. 43. $\frac{3P}{2\,[\sigma]}$; $\frac{P}{[\sigma]}$. 44. $\frac{7qa}{2\,[\sigma]}$; $\frac{7\sqrt{2}\,qa}{4\,[\sigma]}$.

45. 5 cm². 46. 5,33 cm². 47. 4,9 cm²; 8 cm².

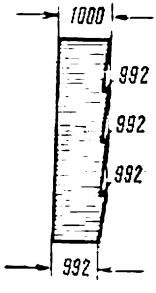
48. $F_1=F_2=\frac{7P}{8\,[\sigma]}$; $F_3=\frac{7}{4}\cdot\frac{P}{[\sigma]}$. 49. 9 kN. 50. 64 kN. 51. 176,5 kgf.

52. $\sim 0{,}7$ m. 53. 894 kgf/cm². 54. $d=\sqrt{\frac{P}{\pi\,([\sigma]-\gamma l)}}$; $\Delta a=\frac{l}{4E}\left(\frac{2P}{F}+\gamma l\right)$.

55. $\Delta a=\frac{a}{E}\left[\frac{P}{F}+\gamma\left(l-\frac{a}{2}\right)\right]$. 56. 3 m²; 617 m², $\sim 0{,}4$ cm.

55.

56.



57. 2 500 cm²; 2 620 cm²; 19,6 t. 58. 600; 800; —800 kgf/cm².
59. —200; 343; 300 kgf/cm². 60. 130; —20; —120; 5 kgf/cm².

61. $\max\sigma_I=\frac{22}{7}\gamma a$; $\min\sigma_{III}=-\frac{31}{14}\gamma a$. 62. $\sim 1\,040$; $\sim 1\,560$ kgf/cm².

63. $\sim 1\,164$; ~ 875 kgf/cm². 64. ~ 61; ~ 87 kgf/cm².
65. $\sim 70{,}7$; $\sim 141{,}4$ MN/m². 66. 120 MN/m². 67. ~ 10; $\sim 7{,}1$ MN/m².
68. 25; 1 000 kgf/cm². 69. ~ 390; ~ 312 kgf/cm².
70. ~ 903; ~ 903; ~ 452 kgf/cm². 71. ~ 33 mm. 72. $\sim 35{,}7$ cm.

73. $\frac{3}{4}\cdot\frac{P}{[\sigma]}$. 74. ~ 739; ~ 261 kgf/cm². 75. 300; 200 kgf/cm².

76. $\sim 1\,091$; ~ 545 kgf/cm². 77. $\frac{\Delta E}{5a}\sin\beta$; $\frac{2\Delta E}{5a}\sin\beta$.

78. $\sim 16{,}4$; $\sim 15{,}4$; $\sim 16{,}4$ MN/m². 79. 20; 40; 60 MN/m².
80. ~ 764; ~ 917; $\sim 1\,070$ kgf/cm². 81. ~ 87; ~ 302 kgf/cm².
82. ~ 172; ~ 98; 1 000 kgf/cm²; 83. ~ 596; ~ 43 kgf/cm². 84. 35 MN/m².

85. ~ 513 ; ~ 726 ; 1 025 kgf/cm². **86.** ~ 6 ; $\sim 10{,}4$; $\sim 10{,}4$ MN/m².
87. ~ 106 MN/m². **88.** 800 ; 600 ; 1 400 kgf/cm² ; 120 ; 200 ; 160 kgf/cm².
89. 800 ; 450 kgf/cm² ; 144 ; 192 kgf/cm². **90.** 500 ; 1 500 kgf/cm² ; 576; 192 kgf/cm².
91. 400 ; 450 ; 550 kgf/cm² ; 288 ; 432 ; 144 kgf/cm².
92. 50 ; 37,5 ; 75 ; 62,5 MN/m² ; 48 ; 36 ; 12 ; 6 MN/m².
93. 130 ; 10 ; 50 MN/m² ; 16 ; 32 ; 16 MN/m².
94. $\sim 19{,}1$; 27,5t ; ~ 671 ; 322 ; 168 kgf/cm².
95. $P = P' \approx 14{,}3$t ; $\sigma_{I_t} \approx 147$ kgf/cm² ; $\sigma_{II_t} = \sigma_{III_t} \approx 93$ kgf/cm².
96. $\sim 9{,}06$t ; $\sim 11{,}53$t ; ~ 220 ; ~ 294 ; 280 kgf/cm².
97. $\sim 7{,}14$t ; 8,74t; ~ 93 ; 93 ; 54 kgf/cm². **98.** 5,2t ; 6,4t ; 72 kgf/cm².
99. ~ 63 kN ; ~ 82 kN. **100.** 2,05t ; 2,8t ; ~ 300 ; 225 kgf/cm².
101. $\sim 28{,}3$ kN ; 32 kN ; $\sim 16{,}3$; $\sim 8{,}1$; 5,4 MN/m².
102. 1 000 kgf/cm² ; $q = 100$ kgf/cm.

103. $\sigma_I = \dfrac{2E}{D}\delta \operatorname{tg}\alpha$; $\dfrac{2E}{(D+b_1)}\delta \operatorname{tg}\alpha$; $q \approx \dfrac{4a\delta \operatorname{tg}\alpha}{D^2}(b_1E_1 + b_2E_2)$.

104. a) 217 ; 290 kgf/cm² ; 17,4 kgf/cm² ; b) 369°. **105.** 60 kgf/cm².

106. $E\left(\alpha\,\Delta t - \dfrac{\Delta}{D}\right)$. **107.** $\sigma_I = \sigma_{II} = 1\,333$ kgf/cm².

Numéro du problème	τ_1	τ_2	τ_3	σ_α	τ_α	σ_α	τ_α	σ_α	τ_α	ρ_0	σ_0	τ_0
				sur les aires parallèles à								
				l'axe 1		l'axe 2		l'axe 3				
	kgf/cm²											
108	0	±600	±600	0	0	300	520	900	520	694	400	566
109	±600	±600	0	−300	+520	−900	520	0	0	694	−400	566
110	±200	±600	±400	300	173	300	520	1000	346	730	533	500
111	±500	±750	±250	−250	+433	−625	649	375	216	645	−167	624
112	±100	±300	±200	−450	87	−450	260	−100	173	416	−333	249
113	±400	±400	0	600	346	200	346	800	0	654	533	377
114	0	±500	±500	−1000	0	−750	433	−250	433	817	−667	471
115	±100	±300	±200	350	87	350	260	700	173	529	467	249
116	±400	±700	±300	0	346	−250	606	650	260	589	133	573
117	±200	±500	±300	−300	173	−350	433	250	260	432	−133	411
118	±100	±300	±200	−850	87	−850	260	−500	173	775	−733	249
119	±450	±450	0	375	390	−75	390	600	0	519	300	424

Numéro du problème	τ_1	τ_2	τ_3	σ_α	τ_α	σ_α	τ_α	σ_α	τ_α	ρ_0	σ_0	τ_0
				sur les aires parallèles à								
				l'axe 1		l'axe 2		l'axe 3				
	MN/m²											
120	0	±50	±50	−80	0	−55	43,3	−5	43,3	66,5	−46,7	47,1
121	0	0	0	50	0	50	0	50	0	50	50	0
122	0	0	0	−70	0	−70	0	−70	0	70	−70	0

Numéro du problème	ε_1	ε_2	ε_3	$\frac{\Delta V}{V}$	U_0	U_0^f	U_0^v
	%			kgf·cm/cm³			
108′	0,060	—0,018	—0,018	0,024	0,36	0,312	0,048
109′	0,018	0,018	—0,06	—0,024	0,36	0,312	0,048
110′	0,054	0,002	—0,024	0,032	0,328	0,243	0,085
111′	0,04	0,0075	—0,0575	—0,010	0,388	0,379	0,009
112′	0,015	—0,011	—0,024	—0,020	0,094	0,061	0,033
113′	0,028	0,028	—0,024	0,032	0,224	0,139	0,085
114′	0,03	—0,035	—0,035	—0,04	0,350	0,217	0,133
115′	0,031	0,005	—0,008	0,028	0,126	0,061	0,065
116′	0,046	0,007	—0,045	0,008	0,326	0,321	0,005
117′	0,032	—0,007	—0,033	—0,008	0,170	0,165	0,005
118′	0,007	—0,019	—0,032	—0,044	0,222	0,061	0,161
119′	0,0255	0,0255	—0,033	0,018	0,202	0,175	0,025

Numéro du problème	ε_1	ε_2	ε_3	$\frac{\Delta V}{V}$	U_0	U_0^f	U_0^v
	%				J/m³		
120′	0,034	—0,031	—0,031	—0,028	$28{,}2\cdot10^3$	$21{,}7\cdot10^3$	$6{,}5\cdot10^3$
121′	0,01	0,01	0,01	0,03	$7{,}5\cdot10^3$	0	$7{,}5\cdot10^3$
122′	—0,014	—0,014	—0,014	—0,042	$14{,}7\cdot10^3$	0	$14{,}7\cdot10^3$

Numéro du problème	$\sigma_{éq_I}$	$\sigma_{éq_{II}}$	$\sigma_{éq_{III}}$	$\sigma_{éq_{IV}}$	$\sigma_{éq_V}$
	kgf/cm²				
108″	1200	1200	1200	1200	1200
109″	—	360	1200	1200	600
110″	1200	1080	1200	1060	1200
111″	500	800	1500	1320	1000
112″	—	300	600	530	300
113″	800	560	800	800	800
114″	—	600	1000	1000	500
115″	800	620	600	530	700
116″	800	920	1400	1220	1100
117″	400	640	1000	870	700
118″	—	140	600	530	100
119″	600	510	900	900	750

Numéro du problème	$\sigma_{éq_I}$	$\sigma_{éq_{II}}$	$\sigma_{éq_{III}}$	$\sigma_{éq_{IV}}$	$\sigma_{éq_V}$
	MN/m²				
120″	20	68	100	100	60
121″	50	20	0	0	25
122″	—	—	0	0	0

123. a) $6{,}6\cdot10^{-5}$ mm²/kgf ; $1{,}51\cdot10^{4}$ kgf/mm². b) $9{,}6\cdot10^{-5}$ mm²/kgf ; $1{,}04\cdot10^{4}$ kgf/mm². c) $14{,}6\cdot10^{-5}$ mm²/kgf ; $0{,}685\cdot10^{4}$ kgf/mm².

124. 0 ; $-\mu p'$; $-p$; $\dfrac{1-\mu^2}{E}\,pa$; $\dfrac{\mu(1+\mu)}{E}\,pb$.

125. 0 ; $-\dfrac{4\mu_2 pE_1F_1}{(E_2ab+4E_1F_1)}$; $-p$; $-\dfrac{(1-2\mu)\,p\,(4\mu_2E_1F_1+E_2ab+4E_1F_1)}{E_2\,(E_2ab+4E_1F_1)}$.

126. $\sigma_1=\sigma_2=\dfrac{-\mu p}{(1-\mu)+\dfrac{d}{(d_1-d)}\dfrac{E}{E_1}}$; $\sigma_3=-p$.

127. $\sigma_1=\sigma_2=\dfrac{-\mu p}{1-\mu}$; $\sigma_3=-p$; $\Delta a=\dfrac{(\mu+2\mu^2-1)\,pa}{E\,(1-\mu)}$; $U=\dfrac{(1+\mu)\,(1-2\mu)\,p^2}{2E\,(1-\mu)}$.

128. $\sigma_1=\sigma_2=1\,000$ kgf/cm² ; $\sigma_3=0$; $\tau_1=\tau_2=500$ kgf/cm² ; $\tau_3=0$; $\Delta D=0{,}35$ mm.

129. 2,5 mm. **130.** $\dfrac{pD}{2\,[\sigma]\cos\alpha}$; $\dfrac{pD^2\operatorname{tg}\alpha}{3\,[\sigma]}$. **131.** 15 mm ; 11,1 cm².

132. $\sigma_1^{sph}=\sigma_2^{sph}=75$ kgf/cm² ; $\sigma_3^{sph}=0$ (pour la surface intérieure $\sigma_3^{sph}=-0{,}3$ kgf/cm²) ; $\sigma_1^{c}=100$ kgf/cm² ; $\sigma_2^{c}=83$ kgf/cm² ; $\sigma_3^{c}=0$ (pour la surface intérieure $\sigma_3^{c}=-0{,}2$ kgf/cm²) ; $\sigma_b=67$ kgf/cm².

133. $\dfrac{\gamma y\operatorname{tg}\alpha}{2\delta\cos\alpha}\left(h-\dfrac{2}{3}y\right)$; $\dfrac{\gamma y\,(h-y)\operatorname{tg}\alpha}{\delta\cos\alpha}$; $\dfrac{\gamma y\,(h-y)\operatorname{tg}\alpha}{\delta\cos\alpha}$ pour $0<y\leqslant\dfrac{3}{4}h$.

134. 69,3 ; 40 MN/m². **135.** 0 ; ± 80 MN/m².

136. 50 ; 70 ; 20 MN/m² ; $0{,}625\cdot10^{-3}$; $0{,}785\cdot10^{-3}$; $0{,}25\cdot10^{-3}$.

137. 20 ; 100 ; 80 ; 84,9 MN/m² ; $0{,}25\cdot10^{-3}$; $1{,}25\cdot10^{-3}$; 10^{-3} ; $1{,}061\cdot10^{-3}$.

138. 500 ; 0 ; -500 kgf/cm² ; $0{,}625\cdot10^{-3}$; $0{,}27\cdot10^{-3}$.

139. a) 12,5 kgf·cm, b) 0,86 kgf·cm.

140. $\sigma_1=-\sigma_3=\dfrac{2M_t}{\pi D_{moy}^2\delta}$; $\sigma_2=0$; $[M_t]\approx157$ kgf·m ; $(M_t)_{éc}\approx236$ kgf·m.

141. $d_0\approx1{,}59$ cm ; $d\approx1{,}35$ cm ; $\delta\approx0{,}74$ cm ; $b\approx1{,}35$ cm.

142. $d\approx2{,}8$ cm ; $a=3$ cm ; $h=6$ cm ; $b=3{,}75$ cm ; $c=1$ cm ; $f=1{,}25$ cm ; $k=1{,}25$ cm.

143. $d=4$ cm ; $d_1=5{,}6$ cm ; $d_2\approx6{,}9$ cm ; $t_1\approx2$ cm ; $t_2\approx1{,}4$ cm.

144. $d\approx3{,}1$ cm ; $d_1\approx4{,}37$ cm ; $a\approx1{,}06$ cm ; $d_2\approx4{,}88$ cm.

145. $b\approx4{,}87$ cm ; $a\approx5{,}97$ cm ; $\delta\approx1{,}99$ cm ; $h\approx7{,}97$ cm ; $c\approx2{,}66$ cm ; $l\approx2{,}99$ cm.

146. $a\approx3{,}16$ cm ; $d\approx1{,}06$ cm ; $c\approx1{,}19$ cm ; $b\approx9{,}46$ cm² ; $l\approx11{,}56$ cm.

147. $a\approx3{,}16$ cm ; $c\approx1{,}06$ cm ; $b_1\approx3{,}87$ cm ; $b\approx5$ cm ; $d\approx0{,}87$ cm.

148. $d\approx3{,}57$ cm ; $\delta\approx2{,}1$ cm ; $b\approx21{,}4$ cm ; $l\approx13{,}1$ cm.

149. $d\approx3{,}25$ cm ; $\delta_1\approx1{,}92$ cm ; $\delta_2\approx1{,}44$ cm ; $b\approx9{,}75$ cm.

150. $x_c=1{,}5a$; $y_c=4a$. **151.** $x_c=2a$; $y_c=3{,}9a$. **152.** $x_c=2a$; $y_c=3{,}71a$.

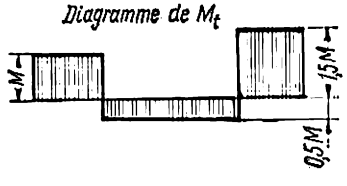
153. $x_c=0{,}5a$; $y_c=\dfrac{\left(\pi-\alpha-\dfrac{2}{3}\sin\alpha\right)}{\pi-\alpha}\,a$. **154.** $x_c=0{,}5a$; $y_c=0{,}6b$.

155. $x_c=17{,}79$ cm ; $y_c=11{,}88$ cm. **156.** $\dfrac{4}{15}b^4$. **157.** $\dfrac{7}{96}a^4$; $\dfrac{5}{96}a^4$.

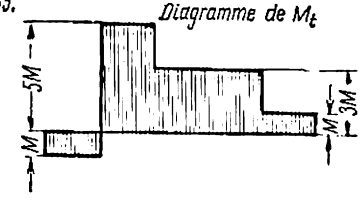
158. $I_x=I_y=7\,869$ cm⁴ ; $I_{xy}=0$. **159.** $11{,}9a^4$; $12{,}4a^4$. **160.** $5{,}407a^4$; $5{,}382a^4$.

161. $0{,}726R^4$; $0{,}678R^4$; **162.** $5{,}25a^4$; $1{,}57a^4$. **163.** 5 791 cm⁴ ; 11 591 cm⁴.

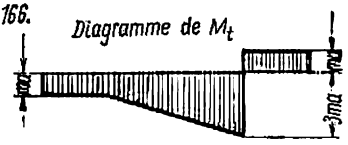
164.



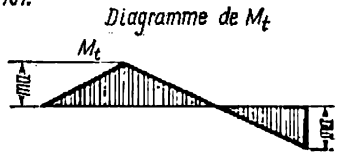
165.



166. Diagramme de M_t



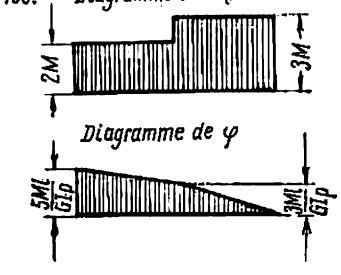
167. Diagramme de M_t



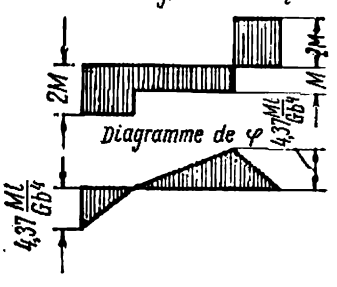
168. $\frac{48M}{\pi d^3}$; $\frac{208M^2l}{G\pi d^4}$. 169. $\frac{4{,}06M}{b^3}$; $\frac{11M^2l}{Gb^4}$. 170. $\frac{80N}{\pi\omega d^3}$ N/m². $\frac{1552N^2l}{\pi\omega^2 Gd^4}$ J.

171. $\frac{15{,}3ml}{d^3}$; $\frac{262m^2l^3}{Gd^4}$. 172. $\frac{16M}{\pi d^3}$; $7{,}85\frac{M^2l}{Gd^4}$. 173. $\frac{10ml}{d^3}$; $18{,}85\frac{m^2l^3}{Gd^4}$

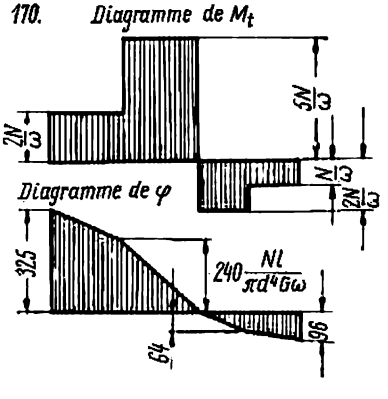
168. Diagramme de M_t



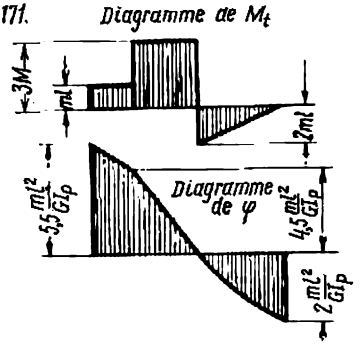
169. Diagramme de M_t



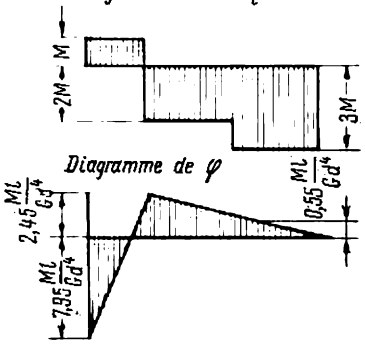
170. Diagramme de M_t



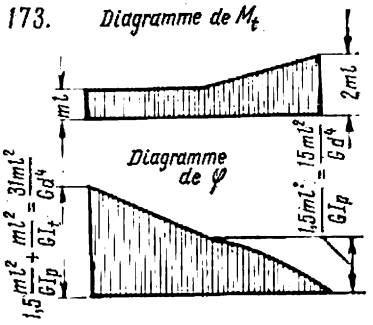
171. Diagramme de M_t



172. Diagramme de M_t



173. Diagramme de M_t

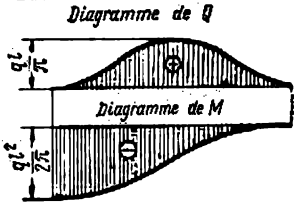


174. $\sim 4{,}07$ cm. 175. ~ 4 cm. 176. $D \approx 6{,}84$ cm ; $d \approx 3{,}42$ cm. 177. $\sim 3{,}64$ cm.
178. $d_1 \approx 2{,}94$ cm ; $d_2 \approx 4$ cm ; $\varphi \approx 9{,}2°$.
179. $d_1 = d_3 \approx 2{,}94$ cm ; $d_2 \approx 3{,}72$ cm ; $\varphi \approx 1{,}05 \cdot 10^{-2}$ rad.
180. $a \approx 2{,}88$ cm ; $d \approx 2{,}94$ cm ; $\varphi \approx 0{,}41°$.
181. $d_1 \approx 8$ cm ; $d_2 \approx 5{,}9$ cm ; $\varphi \approx 2{,}06°$. 182. $d \approx 2{,}5$ cm ; $\varphi \approx 0{,}98°$.
183. $d \approx 2{,}5$ cm ; $\varphi \approx 6{,}7'$. 184. 490 tr/mn ; 126 kgf/cm².
185. ~ 5 CV ; 127 kgf/cm². 186. $\sim 4{,}48$ kgf·m ; ~ 105 kgf/cm².
187. ~ 354 kgf/cm² ; 2,38°. 188. ~ 70 kgf/m ; $\sim 0{,}18°$.
189. ~ 363 N·m ; $\sim 77{,}2$ MN/m² ; $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ rad.
190. 81,25 kgf·m ; ~ 318 kgf/cm² ; $\sim 1{,}64°$. 191. $\sim 24{,}6$ kW ; $1{,}41 \cdot 10^{-2}$ rad.
192. ~ 194 tr/mn ; $\sim 1{,}18°$. 193. ~ 448 kgf/cm² ; $\sim 2°$. 194. 200 kgf/cm².
195. 7 ; 19 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$. 196. ~ 35 kgf/cm² ; $\sim 2°$. 197. $\sim 51{,}3$ N·m ; $\sim 27{,}5$ MN/m².
198. 78,5 kgf ; 5 mm (vers le haut) ; 30 mm (vers le bas). 199. ~ 425 ; ~ 123.
200. $\sim 0{,}98$; $\sim 1{,}22$. 201. — 693 kgf/cm² ; ~ 400 kgf/cm².
202. $d = \sqrt[3]{\frac{32M}{3\pi[\tau]}}$; $\varphi_A^0 = \frac{180Ma}{\pi G}[\tau] \sqrt[3]{\frac{3\pi[\tau]}{2M}}$. 203. $\sim 3{,}94$ cm ; $\sim 0{,}48°$.
204. $\sim 1{,}97$ cm ; 0. 205. $\sim 2{,}17$ kN·m ; $1{,}48 \cdot 10^{-2}$ rad ; $\sim 16{,}1$ J.
206. ~ 126 kgf·m ; $\sim 0{,}215°$; $\sim 23{,}5$ kgf·cm. 207. ~ 573 kgf/cm² ; $\sim 0{,}41°$.
208. ~ 780 kgf/cm² ; $\sim 1{,}19°$. 209. $\sim 33{,}3$ MN/m² ; $\sim 6{,}2 \cdot 10^{-3}$ rad. 210. $b \approx 1{,}28\,a$.
211. 270 kgf/cm². 212. ~ 390 N·m ; $\sim 2{,}81 \cdot 10^{-3}$ rad. 213. $\sim 12{,}7$ mm ; ~ 0.
214. $\sim 3{,}17$ cm ; $\sim 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ rad. 215. $\tau_{\max i} = M \frac{d_i}{2 \sum_{i=1}^{n} I_{p_i}}$.
216. ~ 306 ; ~ 318 kgf/cm². 217. ~ 750 kgf/cm² ; ~ 37 kgf/cm² ; $\sim 1{,}14°$.
218. $\sim 1\,000$ kgf/cm² ; ~ 100 kgf/cm². 219. $\tau_{\max} \approx 0{,}052 \frac{M}{\pi d^3}$; $\sigma_I \approx 3{,}3 \frac{M}{\pi d^3}$;
$\sigma_{II} \approx 0{,}45 \frac{M}{\pi d^3}$; $\varphi_{AB} \approx 0{,}57 \frac{Ma}{G\pi d^4}$.
220. ~ 402 kgf/cm² ; ~ 134 kgf/cm² ; $\sim 0{,}213°$.
221. ~ 468 ; ~ 742 ; ~ 883 kgf/cm² ; $\sim 2{,}5°$; $\sim 2{,}13°$.

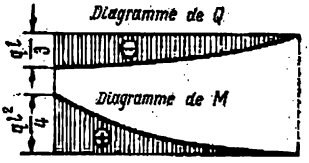
Numéro du problème	Q_{max}	M_{max}	Numéro du problème	Q_{max}	M_{max}	Numéro du problème	Q_{max}	M_{max}
223	$\frac{ql}{4}$	$\frac{ql^2}{6}$	243	4t	4t·m	255	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{16}$
224*	$\frac{ql}{\pi}$	$\frac{ql^2}{2\pi}$	244	$\frac{3}{2}qa$	$\frac{17}{16}qa^2$		(pour $a=\frac{\sqrt{2}}{4}l$)	
225*	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{4}$	245	$\frac{7}{6}qa$	$\frac{5\sqrt{5}}{9}qa^2$	256	$\frac{5}{4}qa$	qa^2
227*	$\frac{ql}{12}$	$\frac{ql^2}{12\sqrt{3}}$	247	$\frac{3}{4}qa$	$\frac{qa^2}{4}$	258	$2{,}25qa$	$3{,}531qa^2$
228*	$\frac{ql}{4}$	$\frac{\sqrt[3]{2}ql^2}{32}$	248	qa	qa^2	259*	$0{,}21ql$ (pour $a=0{,}275l$)	$0{,}0128ql^2$
229*	$\frac{ql}{\pi}$	$\frac{ql^2}{\pi^2}$	249	$2qa$	qa^2	262*	$2qa$	$1{,}167qa^2$
230*	$\frac{ql}{2\pi}$	$\frac{ql^2}{4\pi^2}$	250	$2P$	$\frac{Pl}{3}$	263	$\frac{3}{4}qa$	$\frac{qa^2}{2}$
242	$\frac{qb(l+a)}{2l}$	$\frac{qb^2(l+a)^2}{8l^2}$	252	$0{,}462ql$ (pour $a=0{,}21l$)	$0{,}0535ql^2$	264	$\frac{qa}{2}$	$\frac{qa^2}{8}$
			253	qa	$\frac{3}{2}qa^2$	265	4t	3t·m
			254	$\frac{3}{2}P$	$\frac{Pl}{6}$	266	qa	qa^2
						267	P	Pa
						268	ql	$\frac{ql^2}{2}$
						269*	P	Pa
						270*	P	Pa

Remarque. Les diagrammes de Q et M sont donnés dans les réponses des problèmes marqués par un astérisque.

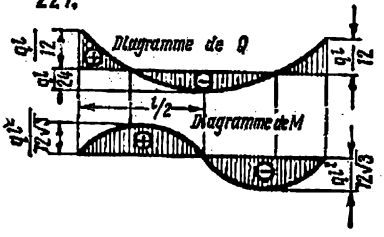
224.



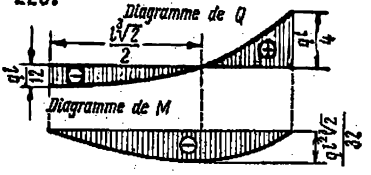
225



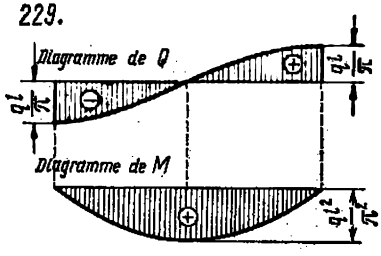
227.



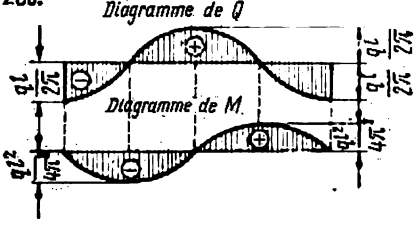
228.



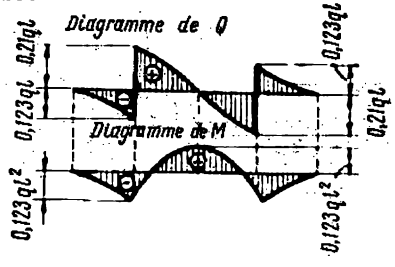
229.



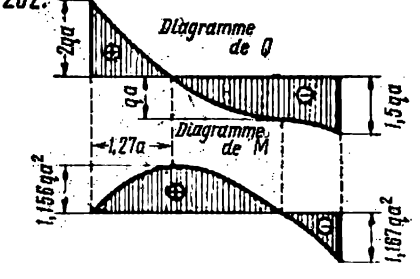
230.



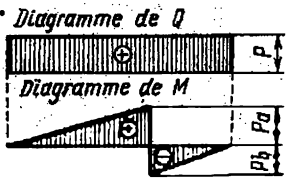
258.



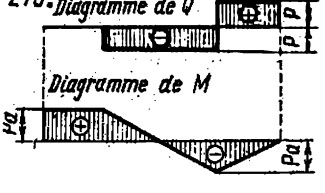
262.



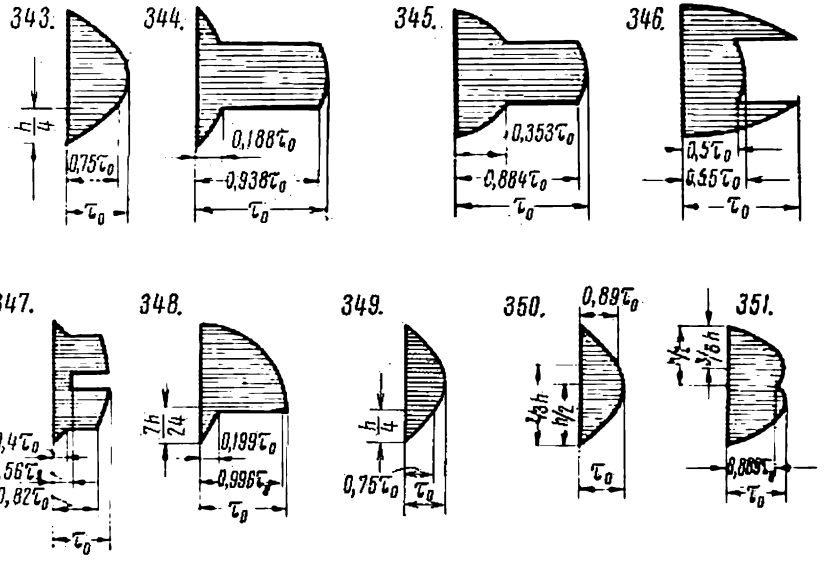
269.



270.



286. $0{,}082H^3$. **287.** $0{,}0183a^3$. **288.** $\frac{13}{60}b^3$. **289.** $\frac{a^3}{6}(1-1{,}5k^2-4k^4)$.
290. 229 cm³. **291.** $0{,}0597a^3$. **292.** $0{,}0706a^3$. **293.** 359,3 cm³. **294.** 79 cm³.
295. $0{,}0425a^3$. **296.** $0{,}147a^3$. **297.** $0{,}74R^3$. **298.** 205 cm³. **299.** ~ 737 cm³.
300. ~ 663 cm³. **301.** 0,560 cm³. **302.** 0,470 cm³. **303.** 1,865 cm³. **304.** 0,780 cm³.
305. 1,478 cm³. **306.** 2 770 cm³. **307.** 1 196 kgf/cm². **308.** 91,7 kgf/cm².
309. 865; -432 kgf/cm². **310.** $\frac{4\sqrt{3}}{\pi d^3}M$. **311.** $\sim 3{,}83\frac{Pa}{d^3}$; 0. **312.** $12\sigma_0$.
313. $\sim 0{,}0894\sigma_0$. **314.** $a=5$ cm. **315.** $b=19$ cm. **316.** N° 24*a*. **317.** $D=29{,}3$ cm.
318. $b=13{,}4$ cm. **319.** $n=4$ barres. **320.** N° 33. **321.** N° 14*a*. **322.** N° 45.
323. $a=3{,}42$ cm. **324.** 16 cm. **325.** N° 50. **326.** $a=1$ cm. **327.** $b=20$ cm.
328. $h_1=177{,}7$ cm, $h_2=38{,}3$ cm. **329.** $a=1$ cm. **330.** $P=1\,067$ kgf.
331. $P=1\,400$ kgf. **332.** $P=453$ kgf. **333.** $q=330$ kgf/m. **334.** $P\approx 2{,}14$ t.
335. $P\approx 2{,}16$ t. **336.** $M\approx 1{,}92$ kN·m. **337.** $M\approx 3{,}44$ kN·m. **338.** $q=9{,}36$ kN/m.
339. $q=3{,}75$ kN/m. **340.** $q=38{,}4$ kgf/cm. **341.** $P=a^2\sigma_0$. **342.** $P=1$ t.



352. $d=8$ cm; $\tau_{max}=16$ kgf/cm². **353.** $h=24{,}2$ cm; $\tau_{max}=5{,}6$ kgf/cm².
354. N° 27 a; $\tau_{max}=125$ kgf/cm². **355.** $l=3$ m; $\tau_{max}=60{,}5$ kgf/cm².
356. 2,79 MN/m². **357.** $H\approx 8{,}0$ cm; $\tau_{max}=1{,}82$ MN/m². **358.** 1,2*a*.
359. $\sim 6{,}65$ cm. **360.** $\sim 1{,}034a$. **361.** $\sim 0{,}702a$. **362.** $-0{,}5827r$. **363.** $-0{,}762a$.
364. 1745; -417 kgf/cm²; $\alpha=26°$. **365*.** 11,3; $-120{,}3$ kgf/cm².
366*. 370; -5 kgf/cm². **367*.** 26; $-0{,}4$ kgf/cm². **368.** $P=49$ t. **369.** N° 24.
370. N° 40. **371.** $b=15{,}7$ cm. **372.** N° 55. **373.** N° 50. **374.** 1,59. **375.** 1,4.
376. 3. **377.** 1,28. **378.** 1,70. **379.** 2. **380.** $b=20$ mm; $b'=17{,}5$ mm.
381. $d=10$ cm; $d'=8{,}4$ cm. **382.** $q=2{,}93$ t/m; $q'=4{,}16$ t/m.
383. $P=1{,}47$ t; $P'=1{,}66$ t. **384.** $q=10{,}7$ kN/m; $q'=12{,}2$ kN/m.

* Les contraintes sont déterminées sur la paroi à l'endroit de changement brusque de la largeur de la section.

386.

Numéro du problème	222	223	224	225	226
f	$-\frac{ql^4}{30EI}$	$\frac{7}{120}\frac{ql^4}{EI}$	$\sim -0{,}057\frac{ql^4}{EI}$	$\frac{13}{180}\frac{ql^4}{EI}$	$\frac{ml^3}{3EI}$
θ	$-\frac{ql^3}{24EI}$	$\frac{ql^3}{12EI}$	$-\frac{ql^3}{4\pi EI}$	$\frac{ql^3}{10EI}$	$\frac{ml^2}{2EI}$
Numéro du problème	227	228	229	230	231
f	$\sim 0{,}000204\frac{ql^4}{EI}$	$\sim 0{,}00386\frac{ql^4}{EI}$	$\frac{ql^4}{\pi^4 EI}$	$-\frac{ql^4}{16\pi^4 EI}$	0
θ_g θ_d	$-\frac{ql^3}{720EI}$ $+\frac{ql^3}{720EI}$	$\frac{ql^3}{90EI}$ $-\frac{ql^3}{72EI}$	$+\frac{ql^3}{\pi^3 EI}$ $-\frac{ql^3}{\pi^3 EI}$	$\frac{ql^3}{8\pi EI}$	0

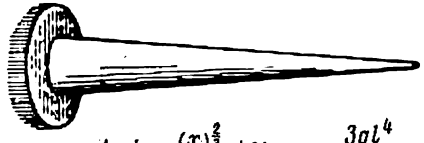
385. $P=8{,}05$ kN ; $P'=14{,}56$ kN. 387. Plus petit de 0,05 %. 388. 100 % ; 60 %. 389. 33 % ; 28 %. 390. 25 % ; 22 %. 391. 27,3 % ; 23,8 %.

Remarque. Les réponses des problèmes 392-443 sont données sous forme de coefficients numériques des quantités $\frac{Ma^2}{EI}$, $\frac{Pa^3}{EI}$ ou $\frac{qa^4}{EI}$ pour les déplacements verticaux et des quantités $\frac{Ma}{EI}$, $\frac{Pa^2}{EI}$ ou $\frac{qa^3}{EI}$ pour les rotations.

392. $\frac{-23}{8}$; $-\frac{3}{2}$. 393. $\frac{-19}{24}$; $\frac{-1}{3}$. 394. $\frac{-25}{4}$; $\frac{-5}{3}$. 395. $\frac{-16}{3}$; $\frac{-5}{3}$.
396. $\frac{-59}{24}$; $\frac{-3}{2}$. 397. -2 ; $\frac{-13}{12}$. 398. -2 ; $\frac{-17}{16}$. 399. $\frac{-85}{72}$; $\frac{-65}{72}$.
400. $\frac{-5}{8}$; $\frac{-7}{36}$. 401. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$. 402. $\frac{-1}{3}$; $\frac{-1}{12}$. 403. $\frac{-7}{9}$; $\frac{2}{9}$.
404. $\frac{-5}{12}$; $\frac{1}{6}$. 405. $\frac{19}{24}$; $\frac{-2}{3}$. 406. $\frac{19}{90}$; $\frac{101}{360}$. 407. $\frac{1}{72}$; $\frac{1}{15}$.
408. $\frac{25}{24}$; $\frac{7}{6}$. 409. $\frac{-62}{45}$; $\frac{187}{120}$. 410. $\frac{-11}{6}$; -1. 411. $\frac{-7}{6}$; $\frac{-1}{2}$.
412. -7 ; 2. 413. $\frac{-5}{12}$; $\frac{-1}{2}$. 414. $\frac{-11}{36}$; $\frac{1}{9}$. 415. 0 ; $-\frac{1}{3}$.
416. $\frac{-11}{24}$; $\frac{-7}{12}$. 417. $\frac{1}{12}$; $\frac{-11}{12}$. 418. $\frac{-2}{3}$; $\frac{1}{3}$. 419. $\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{3}$
420. $\frac{-4}{3}$; $\frac{-3}{2}$. 421. $\frac{-10}{3}$; 3. 422. $\frac{-7}{12}$; $\frac{-1}{2}$; $\frac{1}{4}$. 423. $\frac{-5}{12}$; $\frac{-7}{12}$; 0.

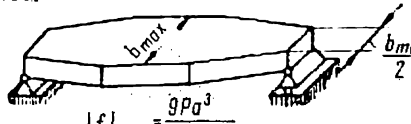
424. $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{-3}{4}$. 425. $\frac{-17}{18}$; $\frac{-1}{2}$; $\frac{-7}{9}$. 426. $\frac{45}{8}$; 2. 427. 3; 2.
428. $\frac{19}{8}$; $\frac{11}{6}$. 429. $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{3}$. 430. $\frac{9}{4}$; $\frac{27}{8}$. 431. $\frac{65}{162}$; $\frac{5}{9}$. 432. $\frac{131}{90}$; $\frac{5}{4}$.
433. $\frac{733}{648}$; $\frac{10}{9}$. 434. $\frac{-23}{24}$; $\frac{-71}{24}$. 435. -2; -11. 436. $\frac{-7}{3}$. 437. $\frac{-31}{12}$.
438. $\frac{-5}{8}$. 439. $\frac{-1}{12}$; $\frac{-1}{8}$. 440. $\frac{1}{6}$; $\frac{-5}{6}$. 441. $\frac{-1}{4}$. 442. $\frac{-13}{12}$.
443. $\frac{-11}{12}$. 444. 1,31 cm. 445. 3,55 cm. 446. 1,35 cm. 447. 1,29 cm. 448. 1,6 cm.
449. N° 22. 450. N° 22 (16). 451. N° 27. 452. 12×20 cm². 453. 20 cm.
454. $\frac{4}{3}$. 455. $\frac{19}{18}$. 456. $\frac{144}{7}$. 457. 4,4. 467. 160 kgf; 4 cm.

458.



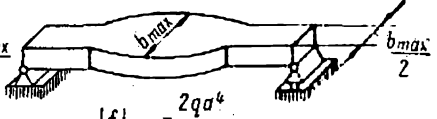
$$d = d_{max}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}};\quad |f|_{max} = \frac{3ql^4}{8EI_{max}}$$

459.



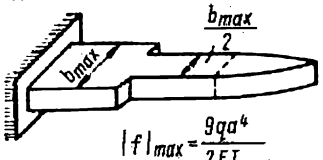
$$|f|_{max} = \frac{9pa^3}{4EI_{max}}$$

460.



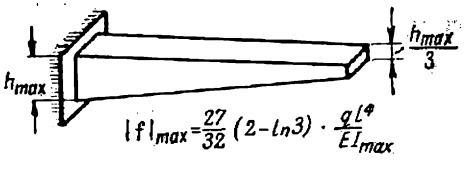
$$|f|_{max} = \frac{2qa^4}{EI_{max}}$$

461.



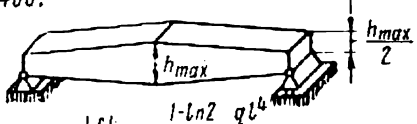
$$|f|_{max} = \frac{9qa^4}{2EI_{max}}$$

462.



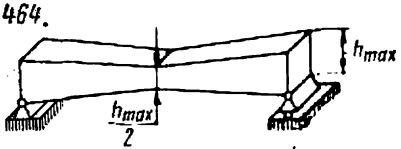
$$|f|_{max} = \frac{27}{32}(2 - \ln 3) \cdot \frac{ql^4}{EI_{max}}$$

463.



$$|f|_{max} = \frac{1 - \ln 2}{4} \cdot \frac{ql^4}{EI_{max}}$$

464.

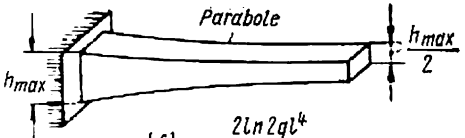


$$|f|_{max} = \frac{2\ln 2 - 1}{4} \cdot \frac{ql^4}{EI_{max}}$$

465.

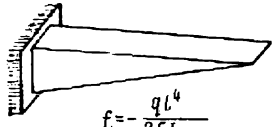
$h=\frac{2h_{max}}{l}\sqrt{lx-x^2}$; $|f|_{max}=\frac{\pi-2}{64}\cdot\frac{ql^4}{EI_{max}}$

466.



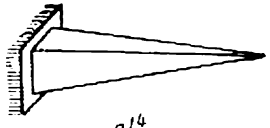
$|f|_{max}=\frac{2\ln 2\,ql^4}{EI_{max}}$

468.



$f=-\frac{ql^4}{2EI_{max}}$

469.



$f=-\frac{ql^4}{6EI_{max}}$

Les contraintes tangentielles n'affectent pas la forme de la poutre. $\theta=\infty$, puisque aux extrémités libres des poutres la courbure $\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$ est grande, et on ne peut utiliser l'équation de la déformée. **470***. 1) $\frac{3}{4}l$; 2) 2; 3; 10. **471***. 1) $\frac{2}{5}l$; 2) $\frac{81}{77}$; $\sim 2{,}082$; $\sim 2{,}912$.

472*. 1) $\frac{l}{3}$; 2) $\sim 1{,}10$; $\sim 2{,}420$; $\sim 3{,}251$. **473***. 1) $\frac{l}{4}$; 2) $\frac{4}{3}$; $\sim 2{,}841$; $\sim 3{,}271$; **474***. 1) $\frac{l}{4}$; 2) $\frac{32}{27}$; 2; $\frac{8}{3}$. **475***. 1) $\frac{l}{2}$; 2) $\frac{32}{27}$; $\sim 2{,}898$; 4 et 2.

476. 1,061 $\frac{M_{max}}{W_{max}}$ pour $x=0{,}3826l$. **477.** 1,294 $\frac{M_{max}}{W_{max}}$ pour $x=0{,}2665l$.

Remarque. Les réponses des problèmes 478-491 sont données sous forme de coefficients numériques: $\frac{Ql^3}{EI_{max}}$, $\frac{Pa^3}{EI_{max}}$ ou $\frac{M_0a^2}{EI_{max}}$ pour les déplacements verticaux, et des quantités $\frac{Pa^2}{EI_{max}}$ ou $\frac{M_0a}{EI_{max}}$ pour les rotations. **478.** $\frac{1}{12}$. **479.** $\frac{1}{6}$. **480.** $\frac{2}{3}(3-4\operatorname{Log}2)\approx 0{,}1516$. **481.** $\frac{1}{7}$. **482.** $\frac{17}{6}$; $\frac{3}{2}$. **483.** 10; $\frac{9}{2}$. **484.** $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}$. **485.** $\frac{7}{6}$; $\frac{2}{3}$. **486.** 3; 2. **487.** $\frac{265}{72}$; $\frac{14}{3}$; **488.** $\frac{205}{108}$; $\frac{41}{18}$. **489.** $\frac{121}{576}$; $\frac{11}{24}$. **490.** $\frac{25}{72}$; $\frac{5}{6}$. **491.** $\frac{98}{81}$; $\frac{14}{9}$. **492.** $|M|_{max}=\frac{7}{32}qa^2$; $|Q|_{max}=\frac{41}{63}qa$. **493.** $|M|_{max}=\frac{13}{24}qa^2$; $|Q|_{max}=\frac{49}{72}qa$. **494.** $\theta=\frac{ql^3}{240EI}$. **495.** $f_B=\frac{ql^4}{16EI}$. **496.** $|M|_{max}=\frac{5}{6}M$; $|Q|_{max}=\frac{1}{6}\frac{M}{a}$. **497.** $|M|_{max}=Pa$; $|Q|_{max}=\frac{4}{3}P$. **498.** $|M|_{max}=\frac{9}{32}qa^2$; $|Q|_{max}=\frac{57}{64}qa$. **499.** $|M|_{max}=Pa$; $|Q|_{max}=P$. **500.** $[M]=3{,}14$ t·m. **501.** $[M]=2{,}85$ t m. **502.** $[P]=7{,}73$ t. **503.** $[P]=11{,}6$ t. **504.** $[q]=7{,}4$ t/m. **505.** $[q]=5{,}2$ t/m. **506.** N° 12. **507.** N° 14. **508.** N° 18.

* La distance est indiquée de l'extrémité gauche de la poutre.

509. N° 10. 510. $\frac{15}{28}M$. 511. $\frac{8}{11}Pa$. 512. $\frac{9}{8}qa^2$. 513. $\frac{3}{4}Pa$. 514. $\frac{3qa^4}{32EI}$. 515. $\frac{qa^4}{20EI}$. 516. $\frac{7Ma^2}{12EI}$. 517. $\frac{Pa^3}{4EI}$. 518. $\frac{ql^4}{24EI}$. 519. $\frac{Pa^3}{12EI}$. 520. 720 kgf. 521. $\frac{5\sqrt{3}}{12}qa$. 522. 47 kgf. 523. 172 kgf. 524. $\frac{12M}{5a}$ t. 525. 2,56; 3,2 kN. 526. $\sigma_1 = 109$ MN/m². 527. $N_3 = \frac{64\Delta EI}{3a^3}$. 528. $-7{,}5$; 15 MN/m². 529. 288,5; 43,3 kgf/cm². 533. $B = \frac{3}{20}P$; $M_{max} = \frac{7}{10}Pl$. 531. $B_y = \frac{17}{12}P$; $B_x = \frac{3}{16}P$; $M_{max} = Pa$. 532. $B_x = \frac{3}{13}P$; $M_{max} = \frac{7}{13}Pa$. 533. $B_x = \frac{P}{8}$; $M_{max} = \frac{Pa}{3}$. 534. $N = 25$ kgf; $M_{max} = 750$ kgf·cm; 535. $N = 98$ kgf; $M_{max} = 1\,440$ kgf·cm. 536. $N = \frac{3}{38}qa$; $M_{max} = \frac{11}{152}qa^2$. 537. La pression dans l'articulation est $N = \frac{3}{4}P$; $M_{max} = \frac{Pa}{2}$. 538. $B_x = \frac{48\Delta EI}{7a^3}$; $B_y = \frac{3}{8}B_x$. 539. $B_x = \frac{3\Delta EI}{8a^3}$. 540. $N = \frac{3(\alpha_c - \alpha_{Ac})\Delta t E_{Ac}E_c FI}{5a^2E_cF + 3E_{Ac}I}$. 541. $N = 180$ kgf. 542. $B_x = \frac{3\alpha\Delta tEI}{5a^2}$. 543. $B_x = \frac{12\alpha\Delta tEI}{a^2}$. 544. Sur l'appui intermédiaire $M_2 = 1{,}5$ t·m. 545. Sur l'appui intermédiaire $M_2 = -\frac{31}{12}Pa$; $M_3 = \frac{25}{92}Pa$. 546. $\sqrt[3]{\frac{32qa^2}{\pi[\sigma]}}$. 547. $\sqrt[3]{\frac{6Pa}{[\sigma]}}$. 548. N° 16. 549. N° 18a. 550. 6,28 t/m. 551. 5,9 t/m. 552. $\sim 2{,}6$ t·m. 553. 1,86 t/m. 554. 19,6 kN·m. 555. 24,3 kN. 556. $-\frac{7Pa^3}{6EI}$. 557. $-\frac{13}{768}\cdot\frac{Pl^3}{EI}$. 558. $0{,}707Pl$; $0{,}293l$; $0{,}707l$. 559. 0,662 t·m. 560. $\sim \frac{5}{384}\times \frac{ql^4}{EI}$. 561. $\frac{Pl^3}{144EI}$. 562. 2 t. 563. 3,65 t. 564. $\frac{3\eta W[\sigma]}{a}$. 565. $\eta W[\sigma]$. 566. $\frac{16\eta W[\sigma]}{a^2}$. 567*. $2[\sigma]\left(F + \frac{\sqrt{2}\eta W}{a}\right)$. 568. 17,6 cm; 8,8 cm. 569. 14 cm; 7 cm. 570. 9,2 cm; 4,6 cm. 571. 9,2 cm; 4,6 cm. 572. 1,97. 573. 1,62. 574. 3,06. 575. 1,6. 577. 985 kgf·cm. 578. 210 kgf·cm. 579. 3 565 kgf·cm.

576

Numéro du problème	222	223	224	225	226
U	$\frac{q^2l^5}{504EI}$	$\frac{187q^2l^5}{20160EI}$	$\frac{(3+8\pi^2)q^2l^5}{192\pi^4EI}$	$\frac{13q^2l^5}{1620EI}$	$\frac{m^2l^3}{6EI}$
Numéro du problème	227	228	229	230	231
U	$\frac{q^2l^5}{60480EI}$	$\frac{q^2l^5}{2592EI}$	$\frac{q^2l^5}{4\pi^4EI}$	$\frac{\pi^4q^2l^5}{64EI}$	0

* F est l'aire de la section droite de la barre diagonale.

580. $\frac{3P^2a^3}{8b^4E}$. 581. $\frac{[\sigma]\,l^2}{4E}\sqrt{bq\,[\sigma]}$. 582. $U_1 : U_2 : U_3 = 1 : \frac{7}{16} : 0{,}25$. 583. Pour une poutre d'égale résistance U est 1,5 plus grande. 584. 1) 1,2 ; 2) $\frac{32}{27}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 2 ; 5) 2,4 ; 6) 1,8. 585. (577) $U_\tau = 535$ kgf·cm, c.à.d. 35 % de U ; (578) ; $U_\tau = 1$ kgf·cm, c.à.d. 0,5 % de U ; (579) $U_\tau = 314$ kgf·cm, c.à.d. 11,3 % de U. 586. 1 104 kgf/cm² ; $\beta = 67°35'$. 587. 1 454 kgf/cm² ; $\beta = 59°53'$; $f_v = 1{,}13$ cm ; $f_h = 0{,}65$ cm. 588. 95 kgf/cm² ; $\beta = 61°38'$. 589. 1 059 kgf/cm² ; $\beta = 44°31'$. 590. 118,9 kgf/cm² ; $\beta = 49°06'$. 591. 1 210 kgf/cm² ; $\beta = 74°35'$. 592. 82,6 kgf/cm². $\beta = 16°06'$. 593. 9,13 MN/m² ; $\beta = 82°59'$; $f_1 = 1{,}030$ cm ; $\beta_1 = 7°11{,}6'$ avec la direction de la force P_1. 594. $\sim 4{,}025\,\frac{Pl}{a^3}$; $\beta = 75°$. 595. 9 MN/m² ; $\beta = 14°56'$. 596. 160 kgf ; $\beta = 23°58'$; $f = 1{,}334$ cm ; $\beta_1 = 34°56'$ de la verticale. 597. 9 220 kgf ; $\beta = 73°26'$. 598. 47,5 kN ; $\beta = 33°40'$. 599. 12,9 kN ; $\beta = 75°37'$; $f = 0{,}377$ cm ; $\beta_1 = 88°11'$ de la verticale. 600. $44{,}9\,\frac{a^3\,[\sigma]}{l}$; $\beta = 26°47'$. 601. $0{,}0295\,\frac{d^3\,[\sigma]}{a}$; $\beta = 15°37'$. 602. $\sim 12 \times 18$ cm² ; $\beta = 52°25'$. 603. N° 27 ; $\beta \approx 84°52'$. 604. $\sim 18 \times 24$ cm² ; $\beta = 36°15'$; $f \approx 1{,}94$ cm ; $\beta_1 \approx 41°30'$. 605. $D \approx 12$ cm ; $\beta \approx 70°54'$. 608. $f_{\max} = 5{,}5\,\frac{Pa^3}{Eb^4}$; $\sim 45°$ par rapport aux côtés du rectangle. 609. $\sigma_{\max} = \frac{27Pl}{16\sqrt{5}\,a^3}$ pour $x = \frac{3}{4}l$ de l'extrémité libre. 610. $\sigma_{\max} \approx 0{,}453\,\frac{ql^2}{a^3}$ pour $x \approx 0{,}317l$ de l'appui. 611. $f_{\max} \approx 17{,}8\,\frac{Pa^3}{Eb^4}$; $\sim 15°42'$.

Remarque. Dans les réponses des problèmes 612-620, la position de l'axe neutre est définie par les segments y_0 et z_0 coupés par l'axe neutre sur les axes principaux d'inertie de la section.

612. 0 ; -40 kgf/cm² ; $y_0 = \infty$; $z_0 = 15$ cm. 613. $-3{,}51$; $-4{,}63$ kgf/cm² ; ∞ ; -363 cm. 614. 25 ; -50 kg/cm² ; $-6{,}67$ cm ; -8 cm. 615. 65 ; -286 kgf/cm² ; $-12{,}5$ cm ; ∞. 616. 26,5 $\frac{P}{a^2}$; $-27{,}5\,\frac{P}{a^2}$; $\frac{a}{54}$; $-\frac{a}{27}$. 617. 1 285 ; $-1\,355$ kgf/cm² ; 0,29 cm ; 1,47 cm. 618. 17,6 ; $-14{,}4$ MN/m² ; $-0{,}834$ cm ; 0,625 cm. 619. $-4{,}88p$; $-7{,}37p$; $6{,}2a$; ∞. 620. 9,3 ; $-11{,}3$ MN/m² ; $-4{,}67$ cm ; $-1{,}43$ cm. 621. 650 kgf/cm² ; $z_0 = -\frac{d}{24}$. 622. 44,7 kgf/cm² ; $y_0 = \frac{a}{6}$; $z_0 = \frac{a}{15}$. 623. 300 kgf/cm² ; $y_0 = 8{,}3$ cm ; $z_0 = 7{,}8$ cm. 624. 85,8 ; $-80{,}8$ kgf/cm² ; 625. 79,3 $\frac{P}{d^2}$; $-93{,}5\,\frac{P}{d^2}$. 626. 58,4 ; $-63{,}6$ MN/m². 627. 1 122 ; $-1\,034$ kgf/cm². 628. $\frac{P}{3ab}$ pour $a_x = 3a$; $-\frac{4P}{3ab}$ pour $a_x = \frac{3}{2}a$. 629. $\frac{P}{\pi d^2}$ pour $d_x = 2d$; $-\frac{125P}{27d^2}$ pour $d_x = 1{,}2d$. 630. $a \geqslant 2\sqrt{\frac{P}{[\sigma]}}$. 631. $a = 4$ cm. 632. N° 22a ; $d \approx 1{,}26$ cm. 633. N° 27. 634. $d \approx 17\sqrt{\frac{P}{[\sigma]}}$. 635. $d \approx 1{,}5$ cm. 636. $t_1 \approx 4{,}65$ t. 637. $d = 3$ m. 638. 64 kgf. 639. 9 040 kgf. 640. 2 780 kgf. 641. 19 550 kgf. 642. 4 180 kgf·

643. 360 kgf. **644.** 6 000 kgf. **645.** 368 kgf. **646.** $\frac{\pi d^2 [\sigma]}{176}$. **647.** 4 590 kgf. **648.** 8,68 kN $\leqslant P \leqslant$ 12,15 kN. **649.** $P_1 = 8P$; $\sigma_{\min} = -\frac{32P}{3a^2}$.

Remarque. Dans les réponses des problèmes 650-655, on donne les coordonnées des points anguleux du contour du noyau de la section dans le système d'axes principaux centraux d'inertie YZ (en cm).
650. Quadrilatère ; $0{,}160a$; 0 ; $-0{,}072a$; 0 ; 0 ; $\pm 0{,}166a$. **651.** Quadrilatère ; $0{,}697a$; 0 ; $-0{,}650a$; 0 ; 0 ; $\pm 0{,}532a$. **652.** Octogone ; 0 ; $\pm 0{,}107a$; $\pm 0{,}107a$; 0 ; $\pm 0{,}08a$; $\pm 0{,}08a$. **653.** Hexagone ; $0{,}226a$; 0 ; $-0{,}131a$; 0 ; 0 ; $\pm 0{,}107a$; $0{,}086a$; a ; $\pm 0{,}113a$. **654.** Rectangle ; $\frac{a\sqrt{3}}{12}$; $\pm 12a$; $-\frac{a\sqrt{3}}{12}$; $\pm 12a$. **655.** Quadrilatère ; $\frac{13}{36}b$; 0 ; $\frac{13}{45}b$; 0 ; $-\frac{13}{126}b$; $\pm\frac{15}{56}b$. **656.** 51 $\frac{Pa}{d^3}$. **657.** 1 075 kgf/cm². **658.** 91,6 $\frac{Pa}{d^3}$. **659.** 78 $\frac{q}{a}$. **660.** 1 000 kgf/cm². **661.** 95 MN/m². **662.** $\approx 4{,}9\frac{Pl}{\pi d_0^3}$ pour $x \approx 0{,}448\ l$ de l'extrémité libre. **663.** 19,4 $\frac{Pa}{d^3}$. **664.** $\sim$ 1 040 kgf/cm². **665.** $\sigma_{\max_I} = 827$ kgf/cm² ; $\sigma_{\min_I} = -223$ kgf/cm² ; $\sigma_{\max_{II}} = 1\,755$ kgf/cm² ; $\sigma_{\min_{II}} = -35$ kgf/cm² ; $\delta_p = 0{,}53$ mm. **666.** $d \geqslant 3{,}7\sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$. **667.** $b = 3{,}35\sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$. **668.** $d \approx 40$ mm. **669.** $d \approx 60$ mm. **670.** $d \approx 85$ mm. **671.** $d_1 \approx 22$ mm ; $b \approx 22$ mm ; $d_2 \approx 36$ mm. **672.** $a = 3\sqrt{\frac{2P}{[\sigma]}}$. **673.** $d \geqslant 2{,}46\sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$. **674.** $d \approx 50$ mm. **675.** $d \approx 38$ mm ; $b \approx 22$ mm. **676.** $d_1 \approx 54{,}5$ mm ; $d_2 \approx 64$ mm. **677.** $d \approx 70$ mm. **678.** $d \geqslant 1{,}84\sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$. **679.** $d \approx 24{,}2$ mm. **680.** $d \approx 80$ mm. **681.** $P \leqslant \frac{[\sigma] d^3}{51a}$. **682.** $q \leqslant \frac{0{,}082\,[\sigma]\,b^3}{a^2}$. **683.** $M \leqslant 0{,}026\,[\sigma]\,D^3$. **684.** $q \leqslant 1{,}4$ kN/m. **685.** $P \leqslant 100$ kgf. **686.** $P \leqslant 0{,}556\,[\sigma]\,\frac{d^3}{l}$. **687.** $M \approx 117$ kgf·cm. **688.** $P \approx 6{,}4$ kgf. **689.** $\sigma_{III} = 47{,}4\frac{P}{d^2}$. **690.** $\sigma_{III} = 1\,240$ kgf/cm². **691.** $\sigma_{III} = 1\,510$ kgf/cm². **692.** $\sigma_{III} = 89\frac{P}{d^2}$. **693.** $96\frac{P}{b^2} \leqslant [\sigma]$. **694.** $8{,}14\frac{P}{b^2} \leqslant [\sigma]$. **695.** 1 570 kgf/cm² $<$ 1 600 kgf/cm². **696.** $b = 12$ cm ; $h = 8{,}3$ cm. **697.** $d_1 \approx 8{,}5$ cm ; $d_2 \approx 8{,}5$ cm ; $d_3 \approx 6{,}1$ cm. **698.** $d_1 = 6$ cm ; $b = 3{,}63$ cm ; $d_2 = 5{,}71$ cm ; $c = 2{,}72$ cm. **699.** 715N ; $\tau_{\max} = 685$ MN/m². **700.** $\frac{\max \tau_1}{\max \tau_2} = 0{,}74$; $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 0{,}88$. **701.** $\max \tau_1 = 955$ kgf/cm² ; $\max \tau_2 = 2\,550$ kgf/cm² ; $\delta = 26$ cm. **702.** $\tau_{\max} = 4\,760$ kgf/cm² ; $n = 15$; $\delta_0 = 8{,}1$ cm. **703.** $\max \tau_1 = 128$ kgf/cm² ; $\max \tau_2 = 417$ kgf/cm². **704.** $P \approx 800$ kgf. **705.** De 10 %. **706.** $P_0 = 902$ N. **707.** $d = 1$ cm ; $n = 10$. **708.** $P = 109$ kgf. **709.** $P = 50$ kgf. **710.** 43 kgf ; 20,5 kgf/cm². **711.** 132,5 t ; 2 630 kgf/cm². **712.** a) 1 070 kgf ; 713 kgf/cm² ; b) 3 460 kgf ; 2 310 kgf/cm². **713.** a) 171 t ; 4 530 kgf/cm² ; b) 124 t ; 3 300 kgf/cm². **714.** 1 210 kgf ; 192 kgf/cm². **715.** 5,47 t ; 17,1 kgf/cm². **716.** 7,4. **717.** 2. **718.** $\frac{F}{2}\sqrt{\frac{\pi E \cos\alpha}{P}}$. **719.** 9,5 m.

720. $\frac{F}{2}\sqrt{\frac{\pi E}{qa}}$. 721. a) 31,9 cm; b) 17,8 cm. 722. 82°. 723. a) 37,5°; b) 10,1°. 724. 63°. 725. $d=13{,}5$ cm. 726. $d=6$ cm. 727. $d=6$ cm. 728. N° 22a. 729. Surtension 33 %. 730. Surtension 2,4 %. 731. Sous-tension 24 %. 732. Sous-tension 4,8 %. 733. Sous-tension 14 %. 734. 9,1 t. 735. 54,6 t. 736. 177,6 t. 737. $b\approx 11{,}3$ cm. 738. $b=2{,}86a$. 739. $b=2a$. 740. N° 30. 741. N° 20 (16). 742. $b=10$ cm. 743. 20 cm. 744. $d=8$ cm. 745. N° 14; $B=14$ cm; $l_0=40$ cm. 746. N° 16; $B=22$ cm; $l_0=70$ cm. 747. N° 10 (10); $B=39$ cm; $l_0=60$ cm (une des variantes possibles pour $\varphi=0{,}81$). 748. N° 10 (7); $B=34$ cm; $l_0=60$ cm; (une des variantes possibles pour $\varphi=0{,}81$). 749. 4,91 cm; 1 462 kgf/cm²; 750. 10,96 cm; 107,4 kgf/cm². 751. 1,30 cm; 67,1 kgf/cm². 752. 0,303 cm; 1 240 kgf/cm²; 2,52; 1,84. 753. 229 cm; 1 275 kgf/cm²; 2,27; 1,78. 754. $80\times 50\times 6$ (une des variantes possibles). 755. $d=16$ cm.

Remarque. Dans les réponses des problèmes 756-765 sont données les valeurs: N_{max}, Q_{max} et M_{max}. 756. $2P$; $2P$; $\frac{3}{2}Pa$. 757. P; $3P$; $3Pa$. 758. $P\sqrt{2}$; $P\sqrt{2}$; $2Pa$. 759. $qa\sqrt{2}$; $qa\sqrt{2}$; $2{,}414qa^2$. 760. $\frac{qa}{2}$; $\frac{qa}{2}$; $\frac{qa^2}{3}$. 761. $\frac{3}{2}P$; $\frac{3}{2}P$; $2Pa$. 762. $2qa$; $3qa$; $\frac{9}{2}qa^2$. 763. $2qa$; qa; $2qa^2$. 764. qa; $2qa$; $5{,}713qa^2$. 765. P; P; $\frac{5}{2}Pa$. 766. 127; -206; 111 kgf/cm². 767. 105; -87; -48 MN/m². 768. 1 050; -700; -382 kgf/cm². 769. 805; -403 kgf/cm². 770. $P=208$ t. 771. $M_1=123$ kgf·m; $M_2=303$ kgf·m; $M_3=128$ kgf·m; $M_4=134$ kgf·m. 772. $782<1\,600$ kgf/cm². 773. $360<1\,600$ kgf/cm². 774. $\frac{17Ph}{EF}$; $\frac{1{,}73Ph}{EF}$. 775. $2{,}12\frac{Pa}{EF}$; $3{,}6\frac{Pa}{EF}$. 776. $\frac{qr^2}{EF}$. 777. $34{,}4\frac{Ma}{Gd^4}$. 778. $\frac{28}{3}\frac{Ma}{GI_t}$. 779. $\frac{41}{24}\frac{Pa^3}{EI}$; $\frac{7}{6}\frac{Pa^2}{EI}$. 780. $\frac{qa^4}{4EI}$; $\frac{qa^3}{12EI}$. 781. $\frac{qa^4}{15EI}$; $\frac{17qa^3}{180\cdot EI}$. 782. $\frac{2}{3}\frac{qa^4}{EI}$; $-k\frac{qa^2}{GF}$. 783. $\frac{768P}{bE}$.

Les réponses des problèmes 784-790, 797-819 et 822-833 sont données sous forme de coefficients des quantités $\frac{Ma^2}{EI}$, $\frac{Pa^3}{EI}$ ou $\frac{qa^4}{EI}$ pour les déplacements linéiques et des quantités $\frac{Ma}{EI}$, $\frac{Pa^2}{EI}$ ou $\frac{qa^3}{EI}$ pour les déplacements angulaires. 784. $16\left(\frac{1}{3}-\frac{I}{a^2F}\right)$; 8; 2. 785. $2\left(\frac{8}{3}+\frac{I}{a^2F}\right)$; 1; 1. 786. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{I}{2a^2F}\right)$; $\frac{1}{4}$. 787. $2\left(11+\frac{I}{a^2F}\right)$; $2\left(9{,}1+\frac{I}{a^2F}\right)$. 788. $4\left(3+\frac{I}{a^2F}\right)$. 789. $2+\frac{3I}{a^2F}$. 790. $\frac{1}{2}$. 791. $103{,}7\frac{Pa^3}{Ed^4}$. 792. $85\frac{Pa^3}{Ed^4}$. 793. $39{,}1\frac{Pa^3}{Ed^4}$. 794. $\frac{80Pa^3}{Ed^4}\times$ $\times\left(1+\frac{d^2}{63a^2}\right)$. 795. $\frac{170Pa^3}{Eb^4}\left(1+\frac{b^2}{170a^2}\right)$. 796. $\frac{56{,}9Pa^3}{Eb^4}\left(1+\frac{b^2}{56{,}9a^2}\right)$. 797. 13,6; $\frac{1}{2}$; 6,85. 798. $\frac{7}{6}$; 1,45; $\frac{5}{3}$. 799. 39; 19,1; 20,1. 800. 0,36; $\frac{1}{2}$; 0,57. 801. 0,071; 0; 0,142. 802. $\frac{1}{12}$; 0,010; 0,028. 803. 0,47; 0,85; 0,24. 804. 8; 37,4; 4π. 805. $\frac{1}{12}$; 0,0927; 0,0181. 806. $\frac{1}{2}$; 1,225. 807. $\frac{2}{3}$; 0,392.

808. 5,14; 3,14; 809. $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{1}{2}$. 810. 1,1; $\frac{1}{2}$. 811. 0,312. 812. 0,071. 813. 0,355. 814. $0{,}0198\left[1+3{,}57\frac{b^2}{a^2}\right]$. 815. 12,4. 816. $\frac{28}{3}$. 817. 3π. 818. $\frac{1}{2}$. 819. 7,24. 820. 45°. 821. 48°15′. 822. $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{12}$. 823. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 824. $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{9}$. 825. $\frac{28}{3}+\frac{I}{a^2F}$; $\frac{44}{9}$. 826. $\frac{7}{3}+2\frac{I}{a^2F}$; 2,5. 827. $\frac{23}{3}$; 3. 828. 14; 8,5. 829. 0,5; 0. 830. 3; 1. 831. $\frac{5}{6}$. 832. $\frac{7}{2}$. 833. $\frac{32}{3}$. 834. 0; $\frac{P}{2}\sin\beta$; $\frac{P}{2}\cos\beta$. 835. $\sim -0{,}739P$; $\sim 0{,}369P$. 836. ma. 837. $2{,}7M$. 838. $\frac{qa}{8}$; $\frac{7}{48}\frac{qa^4}{EI}$. 839. $\frac{7}{8}qa$; $\frac{5}{24}\frac{qa^4}{EI}$. 840. $\frac{6M}{7a}$; $\frac{Ma^2}{21EI}$. 841. $\frac{25}{16}qa$; $\frac{qa^4}{48EI}$; $M_A=\frac{23}{48}qa^2$. 842. $\frac{P}{10}$; $\frac{19Pa^3}{60EI}$. 843. $\frac{qa}{3}$; $\frac{16}{9}\frac{qa^4}{EI}$. 844. $\frac{3}{8}\frac{M}{a}$; $\frac{Ma^2}{2EI}$. 845. $\frac{3}{4}qa$; $\frac{3}{4}\cdot\frac{qa^4}{EI}$. 846. $\frac{qa}{7}$; $\sim 0{,}137\times$ $\times\frac{qa^4}{EI}$. 847. $\frac{3}{10}P$; $\frac{11}{15}\frac{Pa^3}{EI}$. 848. $\frac{15}{28}P$. 849. $\frac{45}{44}qa$. 850. $\sim 0{,}162P$. 851. $\frac{3}{2}qa$. 852. $A_y=0$; $A_x=\frac{P}{4}$. 853. $A_y=A_x=\frac{9M}{20a}$. 854. $A_y=\frac{32}{25}qa$; $A_x=\frac{14}{25}qa$. 855. $A_y=\frac{125}{54}qa$; $A_x=\frac{91}{54}qa$. 856. $A_y=\frac{14}{19}P$; $A_x=\frac{9}{38}P$. 857. $A_y=A_x=\frac{qa}{6}$. 858. $\frac{3}{5}Pa$. 859. $\frac{3}{4}Pa$. 860. $0{,}1642qa^2$. 861. $0{,}0634qa^2$. 862. $A_y=0$; $A_x=\frac{3P}{16}$; $M_A=\frac{Pa}{4}$. 863. $A_y=\frac{2}{11}qa$; $A_x=\frac{57}{55}qa$. 864. $A_y=\frac{P}{2}$; $A_x=\frac{3P}{62}$. 865. $A_y=$ $=\frac{40}{71}qa$; $A_x=\frac{76}{71}qa$. 866. $A_y=\frac{11}{20}qa$; $A_x=\frac{qa}{40}$; $M_A=\frac{qa^2}{10}$. 867. $A_y=\frac{P}{8}$; $A_x=\frac{15}{16}P$. 868. $\frac{44}{23}P$; $\frac{68}{69}\frac{Pa^3}{EI}$. 869. $\frac{10}{27}P$; $\frac{191}{81}\frac{Pa^3}{EI}$. 870. $\frac{19}{47}P$; $\sim 0{,}0722\frac{Pa^3}{EI}$. 871. $0{,}75E\alpha\Delta t\frac{h}{a}$. 872. $\frac{3}{11}E\alpha\Delta t\frac{h}{a}$. 873. $0{,}3E\alpha\Delta t\frac{h}{a}$. 874. $0{,}6E\alpha\Delta t\frac{h}{a}$. 875. $\frac{24}{31}Ea\Delta t\frac{h}{a}$. 876. $\frac{3}{11}\frac{\Delta Eh}{a^2}$. 877. $\frac{3\Delta Eh}{16a^2}$. 878. $\frac{\Delta Eh}{7a^2}$. 879. $\frac{3\Delta Eh}{8a^2}$. 880. $\frac{P}{3}$; $\frac{\pi+1}{3}\cdot\frac{Pa^2}{EI}$. 881. $0{,}0372qa$; $0{,}1188\frac{qa^4}{EI}$. 882. $\frac{5}{6}qa$; $\frac{\pi}{24}\frac{qa^4}{EI}$. 883. $0{,}0638P$; $0{,}1052\frac{Pa^3}{EI}$. 884. $0{,}1867qa$; $0{,}115\frac{qa^4}{EI}$. 885. $R_y=\frac{qa}{2}$; $R_x=0{,}590qa$. 886. $R_y=$ $=\frac{P}{2}$; $R_x=0{,}786P$. 887. $R_y=0$; $R_x=\frac{4qa}{\pi}$. 888. $R_y=\pi qa$; $R_x=3qa$. 889. $R_y=\frac{P}{2}$; $R_x=0{,}722P$; $M_R=1{,}077Pa$. 890. $3{,}44\frac{Pa^3}{EI}$. 891. $\frac{2\pi}{9}\frac{Pa^3}{EI}$. 892. $0{,}586\frac{Pa^3}{EI}$. 893. $0{,}25\frac{Pa^3}{EI}$. 894. $\frac{2\pi}{5}\frac{Pa^3}{EI}$. 895. $0{,}0994\frac{Pa^3}{EI}$. 896. $0{,}369Pa$. 897. $0{,}273qa^2$. 898. $0{,}629Pa$. 899. $1{,}152Pa$. 900. $A_y=0{,}216P$; $A_x=0{,}433P$. 901. $A_y=0{,}961P$; $A_x=0{,}774P$. 902. $A_y=\frac{3}{4}qa$; $A_x=\frac{qa}{4}$. 903. $A_y=0{,}271qa$; $A_x=0{,}277qa$. 904. $A_y=\frac{P}{2}$; $A_x=0{,}0522P$; $N=0{,}437P$. 905. $A_y=0{,}519qa$

$A_x = 0{,}339qa$. **906.** $A_y = 0{,}214qa$; $A_x = 0{,}701qa$; $M_A = 0{,}569qa^2$. **907.** 2,414; 2,515. **908.** 2,75; 9,40. **909.** 2,48; 8,52. **910.** 3,30; 15,26. **911.** $M_f = \frac{M}{2}$; $M_t = \frac{M}{9\pi}$; $\delta = 0{,}298\,\frac{Ma^2}{EI}$. **912.** $M_f = \frac{Pa}{2}$; $M_t = 0{,}565Pa$; $\delta = 0{,}625\,\frac{Pa^3}{EI}$. **913.** $M_f = 2qa^2$; $M_t = 0{,}934qa^2$; $\delta = 1{,}435\,\frac{qa^4}{EI}$. **914.** $d \approx 1{,}362\sqrt[3]{\frac{Pa}{[\sigma]}}$. **915.** $b \approx 1{,}371\sqrt[3]{\frac{qa^2}{[\sigma]}}$. **916.** $r_2 = 17{,}3$ cm; $\Delta r_1 = 0{,}23$ mm. **917.** $p_2 = 111$ MN/m²; $\Delta r_2 = -0{,}19$ mm. **918.** a) $r_2 = 14{,}1$ cm; $\Delta r_1 = 0{,}23$ mm; $\Delta r_2 = 0{,}19$ mm; b) $p_1 = 24$ MN/m². **919.** $p_0 = \frac{a\beta E\,(r_2^2 - r_1^2)}{2r_1\,[r_2^2 + r_1^2 + \mu\,(r_2^2 - r_1^2)]}$; $\max|\sigma_r| = p_0$; $\max\sigma_\tau = p_0\,\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$. **920.** $\beta = \frac{\Delta}{ar_1r_2}\,[r_2^2 + r_1^2 + \mu\,(r_2^2 - r_1^2)] \approx 0{,}017$ rad $\approx 1°$. **921.** $\beta = 0{,}028 \approx 1{,}6°$. **922.** $p_0 = 17{,}4$ kgf/cm²; $\sigma_{\text{éq}\,V} = 17{,}4$ kgf/cm². **923.** $p = 8{,}6$ kgf/cm²; $p_0 = 3{,}8$ kgf/cm². **924.** $p_0 = \frac{\mu q}{\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu}$. **925.** $p_0 = 0$.

Numéro du problème	σ_r, kgf/cm²			σ_τ, kgf/cm²				p_0, kgf/cm²
	Tube			Tube				
	I	II		I	II			
	points			points				
	1	2	3	1	2	2	3	
926	—2000	—577	0	1800	371	962	385	577
927	—2000	—248	0	2670	920	413	165	248
928	0	—173	0	—460	—290	290	115	173

929. $p_0 = \frac{\Delta}{2r_2A}\,E_I\,E_{II}\,(1 - n_1^2)\,(1 - n_2^2)$, où $n_1 = \frac{r_1}{r_2}$, $n_2 = \frac{r_2}{r_3}$, $A = (1 - n_1^2n_2^2) \times (E_I + E_{II}) + (n_1^2 - n_2^2)\,(E_{II} - E_I) - (1 - n_1^2)\,(1 - n_2^2)\,(\mu_IE_{II} - \mu_{II}E_I)$. **930.** $p_0 = \frac{\Delta E}{2r_2\left(\frac{r_2}{\delta} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu\right)}$.

Numéro du problème	σ_r, kgf/cm²			σ_τ, kgf/cm²				Diminution de la contrainte de calcul
	Tube			Tube				
	I	II		I	II			
	points			points				
	1	2	3	1	2	2	3	
931	—2000	—825	0	917	—309	1291	517	30%
932	—3000	—1500	0	1000	—500	2500	1000	—

$r_2 = 20$ cm; $r_3 = 40$ cm; $\Delta = 0{,}6$ mm

933	Tube	I		II		III	
	Points	1	2	3	3	3	4
$\sigma_{éq_{III}}$ kgf/cm²	Tube simple	5717	3650	3650	1860	1860	914
	Tube composé	3615	2304	3624	1852	3365	1654

934. $\max \sigma_I = 3\gamma l$; $\max \sigma_{II} = 66\gamma l$. **935.** $\sigma_I = 216$ MN/m² ; $\sigma_{II} = 10{,}8$ MN/m². **936.** $\sigma_I = 181$ kgf/cm² ; $\sigma_{II} = 287$ kgf/cm². **937.** a) $\sigma_I = \sigma_{III} = \sigma_{II} \cos^2 \alpha = \dfrac{Q \cos^2 \alpha}{(1 + 2\cos^3 \alpha) F} \left(1 + \dfrac{\omega^2 l}{g}\right)$; b) $\sigma_{III} = \dfrac{\sigma_I}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sigma_{II}}{1 + \sqrt{3}} = \dfrac{Q}{(3 + \sqrt{3}) F} \left(1 + \dfrac{\omega^2 l}{g}\right)$. **938.** $\sim 66{,}8$ MN/m². **939.** $32Q\omega^2 l^2 / g\pi d^3$. **940.** $d = 14{,}3$ cm ; $b = 12$ cm. **941.** 250 tr/mn. **942.** $\dfrac{4\gamma r l^2}{g\pi d^3} \sqrt{\varepsilon_0^2 + \omega_0^4}$. **943.** $\sim 0{,}3 \sqrt{\dfrac{Qn^2 r l}{g[\sigma]}}$. **944.** $\max \sigma_I = 1\,420$ kgf/cm² ; $\max \sigma_{II} = 2\,220$ kgf/cm². **945.** $\sim 1\,350$ kgf/cm². **946.** $\dfrac{Q\omega^2 \rho^4}{2gFI} (3\pi + 8)$. **947.** 195 tr/mn ; $\sim 1{,}59$ cm. **948.** $\dfrac{16Q\omega^2 R^2}{g\pi d^3}$. **949.** $4 \dfrac{\gamma \omega^2 R^3}{gd}$. **950.** $4{,}9 \dfrac{Q\omega^2 R^2}{g\pi d^3}$; $28{,}5 \dfrac{Q\omega^2 R^4}{gEd^4}$. **951.** $\dfrac{\pi b}{32r} \sqrt{\dfrac{E\pi bga}{Qr}}$. **952.** $\dfrac{\pi d^2}{32a} \sqrt{\dfrac{\pi Eg}{2Qa}}$. **953.** 672 tr/mn. **954.** a) 50 1/s ; b) 5,6 1/s. **955.** $\sqrt{\dfrac{2gEF}{7Qa}}$. **956.** $2\pi \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\dfrac{Q}{Cg}}$. **957.** $\dfrac{4\pi}{3} \sqrt{\dfrac{Qa^3}{EIg}}$. **958.** $4\pi \sqrt{\dfrac{Qa^3}{3EIg}}$. **959.** 1/40 s. **960.** $\dfrac{\pi l}{2} \sqrt{\dfrac{Ql}{6EIg}}$. **961.** 0,106 s. **962.** $1{,}17 \sqrt{\dfrac{EIg}{Qa^3}}$. **963.** 0,075 s. **964.** $\dfrac{d^2}{12R} \sqrt{\dfrac{\pi Gg}{2Qa}}$. **965.** 2,82 1/s. **966.** $\dfrac{61}{35}$. **967.** $\dfrac{41}{70}$. **968.** $\dfrac{333}{2240}$. **969.** $\dfrac{1}{3}$. **970.** $\dfrac{4}{3}$. **971.** 0,144 s. **972.** 0,147 s. **973.** $2\pi \sqrt{\dfrac{6Ql^3}{bh^3 Eg} \left(1 + \dfrac{Q_b}{15Q}\right)}$. **974.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{g\left(\dfrac{2C}{Q + \dfrac{1}{3}\gamma Fl} - \dfrac{1}{l}\right)}}$. **975.** $2\pi \sqrt{\dfrac{I_m a}{2GI_p} \left(1 + \dfrac{2\gamma I_p a}{3I_m g}\right)}$. **976.** 2 000 tr/mn. **977.** $A = \dfrac{P_0 Fq}{Cg - Q\omega_0^2}$. **978.** 1,65 mm. **979.** 0,8 mm. **980.** 0,54 rad. **981.** 20 cm ; 2160 kgf/cm². **982.** 550 kgf/cm². **983.** 510 kgf/cm². **984.** 2,1 kgf. **985.** 12,8 cm. **986.** $\sigma_{dI} = \dfrac{1}{2} \sigma_{dII} = \sqrt{\dfrac{QhE}{3Fa}}$; $\delta_d^B = \sqrt{\dfrac{4Qha}{3EF}}$. **987.** $\sqrt{\dfrac{18Qh}{C_I + 4C_{II}}}$. **988.** a) $\dfrac{Q}{C} \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2Ch}{Q}}\right)$; b) $v \sqrt{\dfrac{Q}{Cg}}$; c) $\dfrac{Q}{C} \sin \alpha \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2Ch}{Q \sin \alpha}}\right)$. **989.** $\dfrac{[\sigma]^2 W^2 a}{2QEI}$. **990.** $\sqrt{\dfrac{20Qha^3}{EI}}$. **991.** $av \sqrt{\dfrac{Qa}{2gEI}}$. **992.** 33,2 kgf. **993.** $\dfrac{[\sigma]^2 W^2 l}{6QEI}$. **994.** $\dfrac{5{,}2}{W} \sqrt{\dfrac{QhEI}{a}}$. **995.** $\dfrac{1{,}65}{W} \sqrt{\dfrac{QhEI}{a}}$. **996.** $7{,}46 \sqrt{\dfrac{Qha^3}{EI}}$. **997.**

$\frac{1}{W}\sqrt{\frac{1{,}6QhEI}{\pi a}}$. **998.** $v\sqrt{\frac{0{,}0379Qa^3}{gEI}}$. **999.** $\frac{1{,}88}{W}\sqrt{\frac{QhEI}{a}}$. **1000.** 9,3 MN/m². **1001.** $\sqrt{\frac{3{,}84Qha^3}{EI}}$. **1002.** $\sqrt{\frac{2Qha^3}{3GI_p}}$. **1003.** $2\sqrt{\frac{Qha^3}{3GI_p}}$. **1005.** 1) $a=\frac{l}{2}$; 2) $a=(2-\sqrt{2})\,l$. **1006.** a) $\frac{4\omega}{d}\sqrt{\frac{I_mG}{\pi l}}$; b) $\frac{4\omega}{d}\sqrt{\frac{2I_mG}{\pi l}}$. **1007.** $\frac{4\omega}{d}\sqrt{\frac{I_mG}{\pi a}}$. **1008.** 1 260 kgf/cm². **1009.** $\sqrt{\frac{6QE}{5F}}$. **1010.** 337 kgf/cm²; 0,78 mm. **1011.** 336 kgf/cm². **1012.** $h=\frac{W^2l\,[\sigma]^2}{6QEI}\left(1+\frac{13}{35}\,\frac{Q_0}{Q}\right)$; plus exactement $h=\frac{W^2l\,[\sigma]^2}{6QEI}\left(1+\frac{13}{35}\frac{Q_0}{Q}\right)\left(1-\frac{Ql}{4W\,[\sigma]}\right)$. **1013.** $\omega\sqrt{\frac{2I_mG}{V\left(\frac{3}{2}+\frac{I_a}{3I_m}\right)}}$, où $V=\frac{\pi d^2}{4}\,l$. **1014.** $\sigma_{dI}=336$ kgf/cm²; $\sigma_{dII}=512$ kgf/cm²; $\sigma_{dIII}=720$ kgf/cm². **1015.** 1 MN/m². **1016.** ~ 12 mm. **1017.** ~ 1,74. **1018.** 6,25 kN. **1019.** L'arbre d'acier Ac 5 est plus résistant. **1020.** $\sigma_{-0,6}\approx 43$ kgf/mm²; $\sigma_{0,6}\approx 80$ kgf/cm². **1021.** ~ 26 kgf/mm². **1022.** ~ 1,38. **1023.** ~ —0,5. **1024.** ~ 7,8 kgf/mm². **1025.** ~ 118 kgf·m. **1026.** ~ 1,3. **1027.** ~ 9,2 kN. **1028.** ~ 1,47.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5
Principales notations 7
Unités de mesure 12
Remarques générales sur les conditions des problèmes 12

I. Traction et compression 13

§ 1. Effort longitudinal 13
§ 2. Contraintes normales, allongement absolu et énergie potentielle 15
§ 3. Déformation latérale et variation de volume 18
§ 4. Déplacements des points d'un système articulé 20
§ 5. Résistance et rigidité 24
§ 6. Considération du poids propre 28
§ 7. Systèmes hyperstatiques 31

II. Etats de contrainte et hypothèses de résistance 44

§ 1. Etats de contrainte linéique, plan et volumique 44
§ 2. Hypothèses de résistance et contraintes équivalentes 51

III. Réservoirs à parois minces . 54

IV. Cisaillement pur 61

V. Calcul d'assemblages simples d'éléments de construction 65

VI. Les caractéristiques géométriques des figures planes 69

§ 1. Les aires et leurs moments statiques 69
§ 2. Moments d'inertie de l'aire d'une figure 71

VII. La torsion 81

§ 1. Moment de torsion 81
§ 2. Contraintes tangentielles, angle de torsion et énergie potentielle de déformation élastique 83
§ 3. Résistance et rigidité 87
§ 4. Problèmes hyperstatiques 94

VIII. Flexion plane . . 102

§ 1. Effort tranchant et moment fléchissant 102
§ 2. Contraintes normales et choix des dimensions de la section droite de la poutre 121
§ 3. Contraintes tangentielles, centre de flexion et vérification de la résistance des poutres aux contraintes tangentielles 131
§ 4. Contraintes principales et vérification totale de la résistance de la poutre 140
§ 5. Eléments de calcul de la résistance des poutres d'après la capacité portante 148
§ 6. Déplacements des poutres en flexion 151
§ 7. Poutres à section variable 168
§ 8. Poutres hyperstatiques 181
§ 9. L'énergie potentielle de déformation élastique en flexion 209

IX. Poutre droite de grande rigidité soumise à des sollicitations composées 216

§ 1. Flexion déviée 216
§ 2. Flexion composée 225
§ 3. Traction ou compression et torsion 241
§ 4. Torsion et flexion 244
§ 5. Cas général de sollicitations composées 257
§ 6. Ressort cylindrique hélicoïdal de traction ou de compression . . 266

X. Le flambement 272

§ 1. Force critique et contrainte critique 272
§ 2. Calcul des barres comprimées à la stabilité 276
§ 3. Flambement par flexion 289

XI. Poutres planes à courbure initiale . 295

§ 1. Effort longitudinal, effort tranchant et moment fléchissant . . . 295
§ 2. Contraintes 308
§ 3. Calcul de résistance 313

XII. Méthode énergétique de calcul des systèmes élastiques . . 317

§ 1. Calcul des déplacements élastiques généralisés 317
§ 2. Calcul des systèmes hyperstatiques 337
§ 3. Calcul d'anneaux plans à parois minces 354

XIII. Calcul des tubes épais 382

§ 1. Tube cylindrique 382
§ 2. Tubes cylindriques composés 389

XIV. L'action dynamique des forces 397

§ 1. Calcul des corps (systèmes) en mouvement compte tenu des forces d'inertie 397
§ 2. Oscillations élastiques 407
§ 3. Choc 431

XV. Contraintes variables 451

§ 1. Principaux facteurs affectant l'endurance du matériau 453
§ 2. Calcul de résistance dans le cas d'un état de contrainte linéique et de cisaillement pur (de torsion) 457
§ 3. Calcul de résistance losque l'état de contraintes est composé . . . 464
Appendice 1 475
Appendice 2 476
Appendice 3 490
Appendice 4 491
Appendice 5 492
Réponses aux problèmes 495